

УДК 532.526.2

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ НАГРУЗКИ ПО ЛЕДЯНОМУ ПОКРОВУ

В. Д. Жесткая

Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет,
681013 Комсомольск-на-Амуре

Предлагается метод расчета ледяного покрова на изгиб при движении по нему нагрузки. Задача решена в динамической постановке. Алгоритм решения получен на основе метода конечных элементов и метода конечных разностей. Предлагаемый метод позволяет определять напряженно-деформированное состояние ледяного покрова при любом законе движения нагрузки по льду. Рассмотрены два варианта начальных условий. Приведены примеры расчета.

Исследования напряженно-деформированного состояния ледяного покрова при движении по нему различного вида нагрузок позволяют решить ряд прикладных задач, возникающих в практике судоходства и при эксплуатации инженерных сооружений на речной и морской акваториях. На наш взгляд, значительный интерес представляют два класса таких задач: 1) изучение возможностей резонансного метода разрушения льда, т. е. возбуждения в ледяном покрове движущейся нагрузкой изгибно-гравитационных волн достаточной амплитуды [1]; 2) оценка несущей способности ледяного покрова, используемого в качестве несущей платформы. Для решения этих задач в условиях бесконечного сплошного ледяного поля при стационарном движении нагрузки проведен ряд обширных исследований [2–4]. Для реальных ледовых условий (ограниченные размеры акватории, наличие торосов, майн, трещин и т. д.) применение известных решений становится затруднительным. Недостатки указанных теоретических исследований можно устранить путем численного решения дифференциальных уравнений колебаний ледяного покрова с учетом нестационарности движения нагрузки.

В качестве основных уравнений, моделирующих рассматриваемую задачу, приняты [2] уравнение вязкоупругих колебаний льда под действием движущейся нагрузки

$$\frac{Gh^3}{3} \left(1 + \tau_f \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^4 w + \rho_w g w + \rho_i h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_w \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0} = p(t), \quad (1)$$

уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

граничные условия на дне бассейна и границе льда и воды

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad (4)$$

где Φ — потенциал движения жидкости; w — прогиб льда; G — модуль упругости льда при сдвиге; h — толщина ледяного покрова; H — глубина бассейна; ρ_i , ρ_w — плотность

льда и воды; g — ускорение силы тяжести; τ_f — время релаксации деформаций; p — интенсивность внешней нагрузки. Оси координат x и y лежат в плоскости ледяной пластины, причем ось x направлена в сторону движения нагрузки, а ось z — вверх.

Известные аналитические решения подобной задачи [2] содержат ряд недостатков: решение уравнения (1) имеет разрыв 2-го рода; не удается выполнять расчеты, если во льду имеются неоднородности и нарушения сплошности в виде трещин, майн, торосов, переменности толщины и т. п.; исследования не доведены до стадии инженерных расчетов.

В предлагаемом в настоящей работе решении задачи недостатки, перечисленные выше, отсутствуют. К расчету напряженно-деформированного состояния ледяного покрова при воздействии на него движущейся нагрузки впервые применен численный метод, причем расчет возможен как при прямолинейном, так и при криволинейном движении последней.

Представим прогиб w и потенциал Φ в виде конечных сумм:

$$w = \sum_{m=1}^n w_m; \quad (5)$$

$$\Phi = \sum_{m=1}^n \Phi_m = \sum_{m=1}^n \varphi_m(x, y, t) \operatorname{ch} k_m(z + H), \quad k_m = \text{const}. \quad (6)$$

Подставим (5) и (6) в уравнения (1)–(4). При этом уравнение (3) тождественно удовлетворяется. Исключая φ_m из остальных уравнений, получим систему двух уравнений

$$\sum_{m=1}^n \left(\frac{Gh^3}{3} \left(1 + \tau_f \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^4 w_m + \rho_w g w_m + \rho_i h \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} + \rho_w \frac{\operatorname{cth} k_m H}{k_m} \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} \right) = p(t), \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_m}{\partial y^2} + k_m^2 w_m \right) = 0.$$

Используя алгоритм метода конечных элементов, построим дискретную модель ледяной пластины, полагая

$$w_m(x, y, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) q_{im}(t), \quad (8)$$

где $N_i(x, y)$ — функции формы; $q_{im}(t)$ — узловые перемещения, являющиеся компонентами вектора (матрицы-столбца) узловых перемещений $[q]_m(t)$:

$$[q]_m(t) = \begin{bmatrix} q_{1m}(t) \\ q_{2m}(t) \\ \dots \\ q_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

(n — число узловых перемещений; тот же смысл эта величина имеет и в формулах (5), (6)).

Заметим, что значение n определяется типом и количеством конечных элементов, образующих дискретную модель ледяной пластины. Необходимое для достижения достаточной точности число конечных элементов оценивается отдельно для каждой задачи. Вопросы сходимости при увеличении числа конечных элементов рассматриваются в теории метода конечных элементов.

Прогиб пластины с учетом (8) представляется в виде

$$w = \sum_{m=1}^n w_m = \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^n N_i(x, y) q_{im}(t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) q_i(t),$$

где $q_i(t) = \sum_{m=1}^n q_{im}(t)$.

Величины $q_i(t)$ являются компонентами полного вектора (матрицы-столбца) узловых перемещений $[q](t)$:

$$[q](t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \dots \\ q_n(t) \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^n [q]_m(t). \quad (9)$$

Внося (8) в систему уравнений (7) и применив обобщенный метод Бубнова — Галёркина, получим систему матричных уравнений

$$\sum_{m=1}^n \left([M]_m \frac{d^2[q]_{r_m}}{dt^2} + [C] \frac{d[q]_m}{dt} + [K][q]_{r_m} \right) = [P](t), \quad ([S] - k_m^2[T]) \frac{d[q]_{r_m}}{dt} = 0. \quad (10)$$

Здесь $[P](t)$ — вектор (матрица-столбец) внешних узловых сил; матрица $[M]_m$ зависит от k_m .

Для решения системы (10) применим метод конечных разностей. Разобьем рассматриваемый промежуток времени на l равных участков. Первую и вторую производные в r -м узле сетки аппроксимируем разностными формулами

$$\left(\frac{d[q]_{r_m}}{dt} \right)_r = \frac{[q]_{m,r+1} - [q]_{m,r-1}}{2\Delta t}, \quad \left(\frac{d^2[q]_{r_m}}{dt^2} \right)_r = \frac{[q]_{m,r+1} - 2[q]_{m,r} + [q]_{m,r-1}}{(\Delta t)^2}, \quad (11)$$

где Δt — шаг сетки; $[q]_{m,r}$ — значение вектора $[q]_m$ в r -м узле.

Подстановка (11) в систему (10) приводит к матричным уравнениям

$$\sum_{m=1}^n ([A]_m [q]_{m,r+1} + [B]_m [q]_{m,r} + [D]_m [q]_{m,r-1}) = [P](t)(\Delta t)^2, \quad (12)$$

$$([S] - k_m^2[T])([q]_{m,r+1} - [q]_{m,r-1}) = 0, \quad r = 0, 1, 2, \dots, l,$$

где $[A]_m = [M]_m + \frac{\Delta t}{2} [C]$, $[B]_m = (\Delta t)^2 [K] - 2[M]_m$, $[D]_m = [M]_m - \frac{\Delta t}{2} [C]$.

Второму уравнению системы (12) можно удовлетворить, представив $[q]_{m,r}$ в виде

$$[q]_{m,r} = [X]_m \alpha_{m,r}, \quad (13)$$

где $[X]_m$ — собственный вектор матрицы $[S] - k_m^2[T]$, соответствующий собственному значению k_m^2 ; $\alpha_{m,r}$ — неизвестный коэффициент.

Подставив (13) в первое уравнение системы (12), получим

$$\sum_{m=1}^n ([A]_m [X]_m \alpha_{m,r+1} + [B]_m [X]_m \alpha_{m,r} + [D]_m [X]_m \alpha_{m,r-1}) = [P](t)(\Delta t)^2, \quad r = 0, 1, 2, \dots, l. \quad (14)$$

Уравнение (14) должно быть дополнено начальными условиями. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ вектор узловых перемещений $[q]$ равен $[f_0]$, а скорость его изменения — $[\dot{f}_0]$:

$$[q](0) = [f_0], \quad \left(\frac{d[q]}{dt} \right) \Big|_{t=0} = [\dot{f}_0]. \quad (15)$$

Из (9), (11), (13) и (15) следует, что

$$\sum_{m=1}^n [X]_m \alpha_{m,0} = [f_0], \quad \sum_{m=1}^n [X]_m (\alpha_{m,-1} - \alpha_{m,1}) = -2[\dot{f}_0]\Delta t. \quad (16)$$

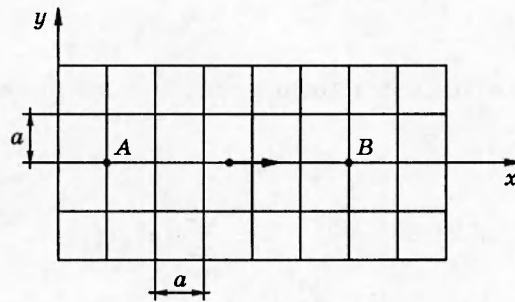


Рис. 1

Из уравнений (16) найдем $\alpha_{m,0}$ и $\alpha_m = \alpha_{m,-1} - \alpha_{m,1}$. Значения $\alpha_{m,0}$ и $\alpha_{m,-1} = \alpha_m + \alpha_{m,1}$ подставим в (14) и получим окончательный вид системы уравнений для определения $\alpha_{m,r}$ ($r = 1, 2, \dots, l$):

$$\sum_{m=1}^n ([D]_m + [A]_m)[X]_m \alpha_{m,1} = [P](0)(\Delta t)^2 - \sum_{m=1}^n [B]_m [X]_m \alpha_{m,0} - \sum_{m=1}^r [D]_m [X]_m \alpha_m,$$

$$\sum_{m=1}^n [A]_m [X]_m \alpha_{m,r+1} = [P](r\Delta t)(\Delta t)^2 - \sum_{m=1}^n [B]_m [X]_m \alpha_{m,r} - \sum_{m=1}^n [D]_m [X]_m \alpha_{m,r-1}, \quad (17)$$

$$r = 1, 2, \dots, l-1.$$

Иногда оказывается удобным принять начальные условия в виде

$$[q](0) = [f_0], \quad [q](-\Delta t) = [f_{-1}]. \quad (18)$$

В этом случае, действуя аналогично предыдущему, приходим к системе уравнений

$$\sum_{m=1}^n [A]_m [X]_m \alpha_{m,r+1} = [P](r\Delta t)(\Delta t)^2 - \sum_{m=1}^n [B]_m [X]_m \alpha_{m,r} - \sum_{m=1}^n [D]_m [X]_m \alpha_{m,r-1}, \quad (19)$$

$$r = 0, 1, 2, \dots, l-1.$$

Входящие в (19) $\alpha_{m,-1}$ и $\alpha_{m,0}$ находятся из условий (18).

Определив $\alpha_{m,r}$ из уравнений (17) или (19), найдем узловые перемещения в r -м узле сетки времени $[q]_r = \sum_{m=1}^n [X]_m \alpha_{m,r}$.

С использованием изложенного алгоритма решен ряд задач, связанных с нестационарным движением сосредоточенной силы по ледяному покрову, три из которых приведены ниже в качестве примера. Во всех случаях рассматривалась прямоугольная ледяная пластина, жестко заделанная по контуру; пластина разбита на квадратные конечные элементы со стороной a (рис. 1). Нагрузка двигалась вдоль оси x . Расчетная схема и дискретная модель одинаковы во всех трех задачах, отличия заключались в законе движения нагрузки по льду.

Задача 1. В начальный момент времени сосредоточенная сила P неподвижна и находится в точке A . При этом ледяная пластина имеет соответствующий статический прогиб. Закон движения силы P принят следующий: P начинает двигаться по оси x с постоянным ускорением, за время τ_0 приобретает заданную скорость v , с которой продолжает движение в том же направлении. При решении задачи с параметрами $P = 0,4 \cdot 10^6$ Н, $a = 50$ м, $\tau_0 = 25$ с, $v = 4$ м/с, $\Delta t = 0,3125$ с, $G = 0,2 \cdot 10^{10}$ Па, $h = 0,5$ м, $H = 5$ м, $\rho_i = 900$ кг/м³,

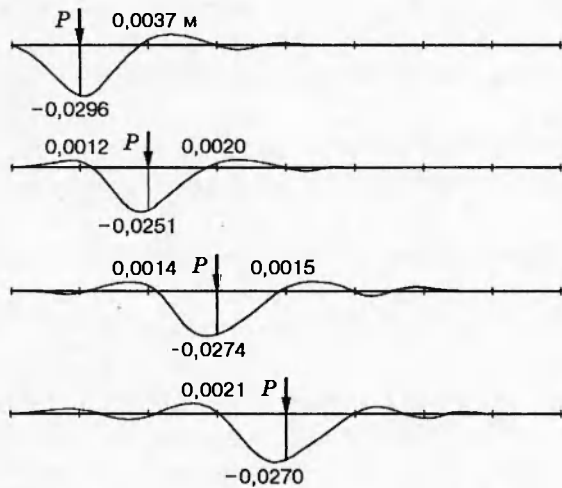


Рис. 2

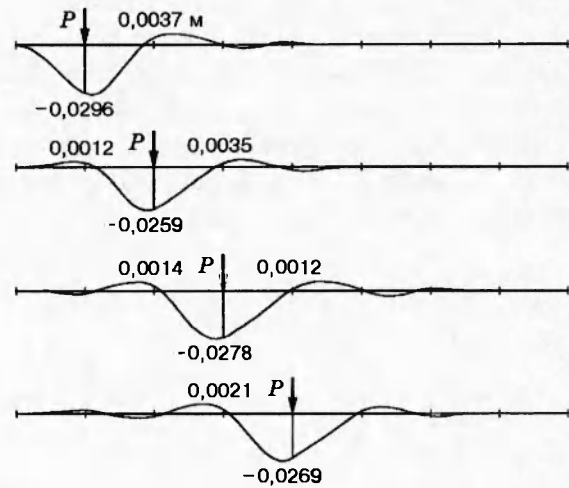


Рис. 3

$\rho_w = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\tau_f = 10 \text{ с}$ рассматривался период времени, за который сила P перемещалась из точки A в точку B . Результатами решения задачи являлись значения прогибов и напряжений в узловых точках дискретной модели ледяной пластины в заданные моменты времени, соответствующие узлам сетки по времени.

На рис. 2 приведены графики прогибов в точках пластины, расположенных на оси x , для нескольких моментов времени.

Задача 2. Сохранялись условия предыдущей задачи, но время разгона τ_0 принято равным нулю. На рис. 3 приведены графики прогибов точек оси x при тех же положениях силы P , что и в задаче 1.

Задача 3. Сила P внезапно приложена в точке A (см. рис. 1) и имеет горизонтальную скорость v (ситуация напоминает посадку самолета на лед). На рис. 4 даны графики прогибов точек оси x для нескольких положений силы P .

Рассматривая результаты решения задачи 3, можно заметить, что в начальной стадии движения нагрузки существенно влияние реакции упругого основания (прогибы в дан-

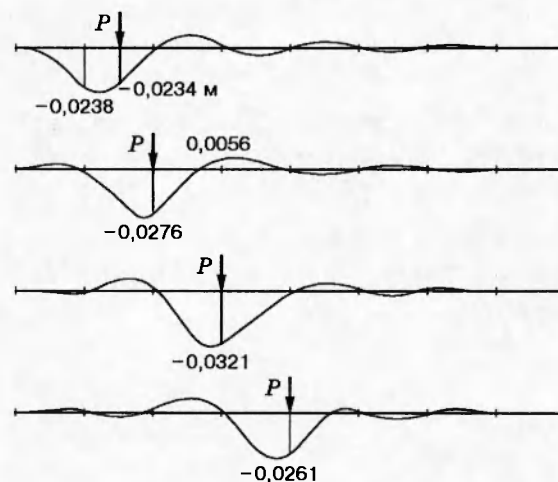


Рис. 4

ном случае меньше, чем при статическом нагружении). Более высокие значения прогибов, чем в задачах 1 и 2, объясняются интерференцией волн (ударная нагрузка возбуждает кольцевые расходящиеся волны, которые накладываются на волны, образующиеся при последующем поступательном движении нагрузки).

Результаты решения задач 1 и 2 показывают, что предлагаемая методика позволяет учесть влияние ускорения в начальной стадии на характер напряженно-деформированного состояния ледяной пластины.

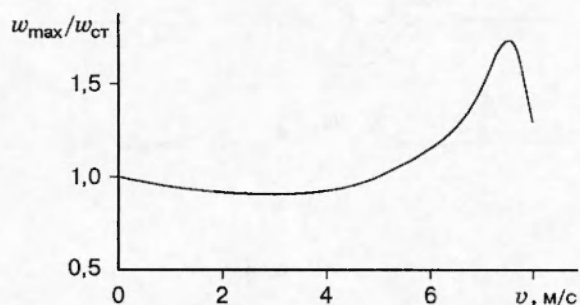


Рис. 5

Предлагаемым методом решена серия задач с целью исследования зависимости максимального прогиба от скорости движения нагрузки. Для ряда значений скорости при тех же значениях остальных параметров, что и в задаче 2 (кроме длины ледяного поля, которая принята равной 750 м), определялись значения максимальных прогибов. Результаты расчета представлены в виде графика (рис. 5), где w_{\max} — максимальный прогиб при движении нагрузки, $w_{\text{ст}}$ — максимальный статический прогиб.

Видно, что функция $w_{\max}/w_{\text{ст}}$ в рассматриваемом диапазоне скоростей имеет два экстремума. Знание соответствующих скоростей полезно для выработки рекомендаций по режиму движения нагрузки. Скорость, при которой $w_{\max}/w_{\text{ст}}$ имеет максимум (резонансная скорость), может быть рекомендована в случае, если ставится задача разрушения льда. Напротив, если требуется сохранение его несущей способности, следует двигаться со скоростью, при которой максимальные прогибы минимальны или, по крайней мере, не превышают статических.

В заключение отметим, что данный подход к решению задачи позволяет рассчитать напряженно-деформированное состояние ледяного покрова при любом законе движения нагрузки как на неограниченной, так и на ограниченной акватории; учесть интерференционные процессы, возникающие при разгоне и торможении; рассмотреть режимы выхода нагрузки на берег и преодоление препятствий в виде майн и торосов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жесткая В. Д., Козин В. М. Исследования напряженно-деформированного состояния полубесконечного ледяного покрова под действием движущейся нагрузки // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 5. С. 112–117.
2. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоздат, 1967.
3. Squire V. A., Robinson W. H., Haskell T. G., Moore S. C. Dynamic strain response of lake and sea ice to moving loads // Cold Region Sci. and Technol. 1985. V. 11. P. 123–139.
4. Букатов А. Е., Черкесов Л. В. Влияние ледяного покрова на волновые движения // Морские гидрофизические исследования. Севастополь: Изд-во Морского гидрофиз. ин-та АН УССР, 1971. № 2. С. 113–144.

Поступила в редакцию 5/VI 1997 г.,
в окончательном варианте — 2/XII 1997 г.