

**РАЗРУШЕНИЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В СРЕДЕ
С БЕЗЫНЕРЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ**

В. Е. Захаров, В. В. Соболев, В. С. Сынах

(Новосибирск)

Проводится теоретическое рассмотрение и численное моделирование нелинейной стадии неустойчивости монохроматической волны в среде с безынерционной нелинейностью. Показано, что если имеют место одновременно продольная и поперечная неустойчивость, то происходит разбиение волны на трехмерные сгустки, внутри которых образуются особенности амплитуды. В результате происходит «разрушение» монохроматической волны, сопровождающееся значительным уширением ее спектра и увеличением угловой расходимости.

1. В некоторых экспериментах по самофокусировке света [1-3] наблюдалось значительное уширение прежде очень узкой спектральной линии. Данная работа ставит своей целью изучить конкретный механизм уширения спектра в среде с безынерционной нелинейностью. Таким механизмом может быть одновременное развитие продольной и поперечной неустойчивости световой волны [4-6], приводящее к разбиению ее на «коллагсирующие» за конечное время трехмерные сгустки. Это явление можно назвать разрушением монохроматической волны. Явление разрушения волны не специфично для света и может иметь место также и в других нелинейных средах с дисперсией; поэтому целесообразно изучать его с общей точки зрения.

2. Рассмотрим изотропную нелинейную среду. При слабой нелинейности среды в ней может распространяться монохроматическая волна

$$\varphi(r, t) = \varphi_0 \cos(\omega t - kz), \quad \omega = \omega_k + q |\varphi_0|^2$$

Здесь ω_k — закон дисперсии волн, q — величина, характеризующая нелинейность среды.

Рассмотрим теперь волну, близкую к монохроматической, и введем для нее комплексную огибающую ψ

$$\varphi(r, t) = \text{Re} [\psi(r, t) \exp(-i\omega_k t + ikr)]$$

Огибающая $\psi(r, t)$ подчиняется уравнению [5-9]

$$i \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + V_* \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\omega_k''}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{V_*}{2k} \Delta_{\perp} \psi = q |\psi|^2 \psi \quad (2.1)$$

Здесь V_* — групповая скорость.

Для монохроматической волны имеем

$$\psi = \varphi_0 \exp(-iq |\varphi_0|^2 t) \quad (2.2)$$

В безынерционном диэлектрике со скалярным механизмом нелинейности, когда показатель преломления имеет вид

$$n = n_0(\omega) + \delta n_* |E|^2$$

уравнение (2.1) справедливо при любой эллиптической поляризации волны [10]. При этом

$$\omega_k'' = -\frac{1}{V_*^2} \frac{d^2(\omega n_0)}{d\omega^2}, \quad q = -\frac{V_*}{k} \frac{\delta n_*}{n_0}, \quad V_* = \frac{C}{(\omega n_0)'}_0$$

Линеаризуя уравнение (2.1) относительно решения (2.2) и полагая для возмущения $\delta\psi$

$$\delta\psi \sim \exp(-iq|\varphi_0|^2 t - i\Omega t + ipr)$$

получим

$$\Omega = V_* p_z \pm \sqrt{q|\varphi_0|^2 \left(\omega_k'' p_z^2 + \frac{V_*}{k} p_\perp^2 \right) + \frac{1}{4} \left(\omega_k'' p_z^2 + \frac{V_*}{k} p_\perp^2 \right)^2} \quad (2.3)$$

Если $q > 0$ и $\omega_k'' > 0$, то монохроматическая волна устойчива; в остальных случаях имеет место неустойчивость. При $q < 0$ имеет место поперечная неустойчивость, приводящая к самофокусировке волны. Если при этом $\omega_k'' > 0$, то имеет место также и продольная неустойчивость. В дальнейшем будет рассматриваться только этот случай.

Заметим еще, что уравнение (2.1) имеет инварианты

$$\begin{aligned} J_1 &= \int |\psi|^2 dr \\ J_2 &= \frac{1}{2} \int \left(\omega_k'' \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|^2 + \frac{V_*}{k} |\nabla_\perp \psi|^2 + q |\psi|^4 \right) dr \\ p_\perp &= \frac{iV_*}{k} \int (\psi^* \nabla_\perp \psi - \psi \nabla_\perp \psi^*) dr \\ p_z &= i\omega_k'' \int \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) dr \end{aligned} \quad (2.4)$$

3. Совершив переход к безразмерным переменным

$$\tau = V_* k t, \quad r_\perp = k r, \quad z' = k \left(\frac{V_*}{k \omega_k''} \right)^{1/2} (z - V_* t)$$

$$u = \left(\frac{|q|}{2kV_*} \right)^{1/2} \psi$$

получим уравнение

$$2i \frac{\partial u}{\partial \tau} + \Delta u + |u|^2 u = 0 \quad (3.1)$$

с интегралами движения

$$\begin{aligned} I_1 &= \int |u|^2 dr \\ I_2 &= \int (|\nabla u|^2 - 1/2 |u|^4) dr \\ S &= i \int (u^* \nabla u - u \nabla u^*) dr \end{aligned}$$

Здесь Δ — трехмерный лапласиан в переменных r_\perp, z' .

Ограничимся рассмотрением сферически-симметричного случая. Тогда

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}$$

Введем в рассмотрение величины

$$A = \int_0^{\infty} r^4 |u|^2 dr$$

$$B = i \int_0^{\infty} r^3 \left(u^* \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial u^*}{\partial r} \right) dr$$

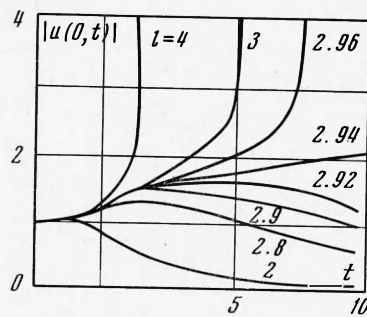
Из уравнения (5) получаем

$$\frac{\partial A}{\partial t} + B = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial t} + 2I_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} r^2 |u|^4 dr$$

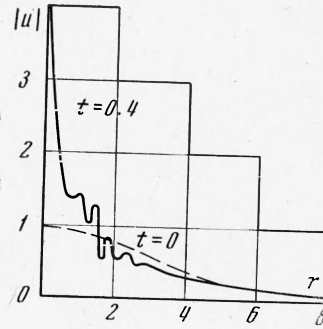
Отсюда имеем неравенство

$$A < I_2 t^2 + B(0)t + A(0) \quad (3.2)$$

В среде без нелинейности, когда $q = 0$, интеграл J_2 всегда положителен. В нелинейной среде возможны распределения $u(r, t)$, для которых $J_2 < 0$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Покажем, что развитие каждого из таких распределений приводит за конечное время к образованию особенности.

Действительно

$$I_2 = 0.25q \left(\frac{k}{V_*^3 \omega_k^n} \right)^{1/2} J_2$$

и также отрицательно при $J_2 < 0$. Из (3.2) следует, что через конечное время A также должно стать отрицательным, с другой стороны, A — существенно положительная величина. Это противоречие указывает на разрушение решения уравнения (2.4) за конечное время t_0 при $J_2 < 0$.

4. Уравнение (3.1) изучалось численно на машине БЭСМ-6 ВЦ СО АН СССР. В качестве начального условия выбиралось гауссово распределение

$$u(r, 0) = a_0 \exp(-r^2 / l^2)$$

а граничные условия

$$\frac{\partial u}{\partial r}(0, t) = 0, \quad u(\infty, t) = 0$$

Уравнение (3.1) (со сферическим лапласианом) аппроксимировалось неявной разностной схемой с переменным шагом по радиусу. Шаг по радиусу увеличивался от центра к периферии более чем в 10^3 раз, это по-

зволило взять достаточно большой интервал численного интегрирования по r (более чем в 20 раз превышающий начальную полуширину распределения). Контроль точности вычислений производился по сохранению инвариантов I_1, I_2 . Поведение амплитуды $|u(0, t)|$ для $a_0 = 1$ при разных значениях I_2 приведено на фиг. 1. Как видно из фигуры, при достаточно малых значениях I_2 за конечное время происходит образование особенности — «схлопывание». Как показывает машинный эксперимент, достаточно для схлопывания требование отрицательности I_2 не является необходимым — фактически схлопывание происходит уже при $I_2 < 0.675$. Типичная картина — появление особенности — изображена на фиг. 2 (для $l = 4$). Видно, что особенность охватывает область весьма малых радиусов.

Фактически удавалось проследить схлопывание до $|u(0, t)| \approx 6.3$. После этого из-за высоких градиентов вблизи оси происходило разрушение интеграла движения I_2 . Однако интеграл I_1 и в этот и в последующие моменты времени сохранился с точностью $\Delta I_1 / I_1 \sim 10^{-5}$. Это дает основание полагать, что дальнейший счет некорректен лишь в непосредственной близости к особенности, и продолжать изучение эволюции остального профиля.

При $t \rightarrow t_0$ на всем профиле возникает «рябь», которую можно интерпретировать как появление расходящихся из центральной области волн. Эти волны уносят положительное значение интеграла I_2 ; вблизи особенности плотность I_2 стремится к $-\infty$.

Численно решалась также задача о стационарных решениях уравнения (5) вида $u = e^{it/2} \varphi(r)$. Для них

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi - \varphi^3 = 0, \quad \varphi_r(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = 0 \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) имеет бесчисленное множество решений; графики первых трех из них изображены на фиг. 3. Амплитуды $\varphi(0)$ и значения интеграла I_1 для первых семи состояний приведены ниже

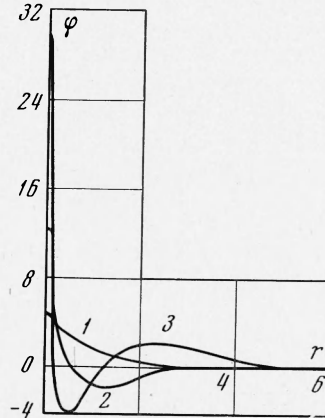
	1	2	3	4	5	6	7
$\varphi(0)$	4.34	14.06	28.68	46.87	65.45	81.38	94.39
I_1	1.50	9.47	28.72	64.09	121.02	205.68	324.18

Умножая уравнение (4.1) на $r^2 \varphi$ и интегрируя по r от 0 до ∞ , имеем

$$-\int_0^\infty r^2 \varphi_r^2 dr - \int_0^\infty r^2 \varphi^2 dr + \int_0^\infty r^2 \varphi^4 dr = 0$$

Далее, умножая на $r^3 \varphi_r$ и интегрируя, имеем

$$-\frac{1}{2} \int_0^\infty r^2 \varphi_r^2 dr - \frac{3}{2} \int_0^\infty r^2 \varphi^2 dr + \frac{3}{2} \int_0^\infty r^2 \varphi^4 dr = 0$$



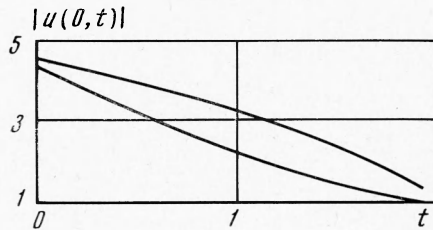
Фиг. 3

Отсюда получаем

$$I_2 = \int_0^{\infty} r^2 \varphi_r^2 dr - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} r^2 \varphi^4 dr = \int_0^{\infty} r^2 \varphi^2 dr = I_1 > 0$$

Для всех стационарных решений интеграл I_2 положителен и равен I_1 . Этот результат с высокой точностью (5—7 знаков) подтверждается счетом и служит дополнительным доказательством корректности вычислений.

Численно изучалась также устойчивость первого стационарного состояния, которое возмущалось гауссовой добавкой к амплитуде, дающей относительный вклад в интеграл $\delta I_1 / I_1 \sim 10^{-2}$. Как при отрицательных, так и при положительных добавках стационарное состояние расплывалось.



Фиг. 4

График поведения модуля амплитуды при $r = 0$ как функция времени приведен на фиг. 4.

5. Физически картину разрушения волны можно представить следующим образом. При $\omega_k'' = 0$ волновой пучок представляет собой совокупность бесконечно тонких поперечных «слоев», не взаимодействующих

один с другим. В каждом слое развивается поперечная неустойчивость, приводящая к разбиению его на области размером порядка

$$l_1 \sim \frac{1}{k} \left(\frac{V_*}{k |\psi|^2} \right)^{1/2}$$

В аксиально-симметричном случае эти области представляют собой кольцевые зоны. Области повышения интенсивности коллапсируют, образуя фокусы; при плавном изменении формы импульса эти фокусы движутся вдоль оси z (см. [11]). Амплитуда поля в фокусе ограничивается либо многофотонным поглощением, либо насыщением нелинейности.

При конечном $\omega_k'' > 0$ возникает взаимодействие между слоями, приводящее к перераспределению энергии между ними. На начальном этапе это взаимодействие приводит к нарастанию продольной модуляции с характерным размером $l_{||} \sim l_{\perp} (k \omega_k'' / V_*)^{1/2}$

Одновременно возникает поперечная неустойчивость на размере l_{\perp} , так что волна разбивается на трехмерные сгустки. За конечное время внутри каждого такого сгустка «прорастает» особенность амплитуды волны; область вблизи особенности излучает в широком диапазоне частот и углов. Возникающая при этом сильная продольная модуляция волны объясняет уширение спектра.

При отсутствии диссипативных механизмов прорастание особенности происходит до тех пор, пока ее размер не сравнивается по порядку величины с длиной волны. В этом случае происходит наиболее сильное уширение линии — $\Delta \omega \sim \omega$. В других случаях рост особенности ограничивается насыщением нелинейности, многоквантовым поглощением или конечным временем релаксации нелинейности среды τ^* . В последнем случае уширение линии происходит только до величины $\Delta \omega \sim 1 / \tau^*$. При достаточно большом времени релаксации

$$\tau^* \gg \frac{1}{\omega} \left(\frac{\omega_k''}{q |\psi|^2} \right)^{1/2} \sim \frac{1}{\omega} \left(\frac{V_*}{\delta n_* |E|^2} \frac{k \omega_k''}{V_*} \right)^{1/2}$$

