УДК 533.6.11

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ МЕТЕОРОВ ДЛЯ НЕДРОБЯЩЕГОСЯ ТЕЛА С УНОСОМ МАССЫ В НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ АТМОСФЕРЕ

М. Д. Брагин*,**, Г. А. Тирский**,***

* Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 125047 Москва, Россия
** Московский физико-технический институт, 141701 Долгопрудный, Россия
*** Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, 119192 Москва, Россия
E-mails: michael@bragin.cc, tirskiy@imec.msu.ru

Получены аналитические решения уравнений физической теории метеоров для недробящегося метеороида в неизотермической атмосфере при задании параметра уноса массы в виде степенной зависимости от скорости при движении по траектории. Получены соотношение, связывающее массу метеороида и его скорость, и соотношение, связывающее скорость метеороида, его начальные параметры и атмосферное давление. Также получены простые приближенные формулы для массы и скорости метеороида на начальном участке траектории, соотношения для определения экстремальных значений основных динамических характеристик метеороида: торможения, скоростного напора, скорости уноса массы, площади миделевого сечения и кинетической энергии на единицу пути.

Ключевые слова: физическая теория метеоров, метеороид, торможение, унос массы, неизотермическая атмосфера.

DOI: 10.15372/PMTF20190502

Введение. Большие скорости космических тел при входе в атмосферу Земли обусловливают возникновение процессов, не проявляющихся при обтекании космических аппаратов. Под действием интенсивных тепловых потоков метеороид нагревается, плавится, испаряется и теряет значительную часть своей массы. Под действием возрастающих по мере вхождения в более плотные слои атмосферы аэродинамических нагрузок большинство метеороидов разрушается. Моделирование взаимодействия метеороидов с атмосферой, как правило, проводится с использованием системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений физической теории метеоров [1], включающей уравнение движения центра массы метеороида, уравнение уноса его массы при движении по траектории и уравнение траектории. Эти уравнения содержат три коэффициента: коэффициенты сопротивления C_D и теплопередачи C_H и эффективную теплоту уноса массы Q. Их комбинация $\sigma = C_H/(C_D Q)$, называемая параметром уноса массы, полагается постоянной и определяется в основном по данным наблюдений за полетом и свечением космических тел. В настоящей работе полагается, что параметр уноса массы зависит от скорости метеороида.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-01-00740-а).

Аналитическое решение уравнений физической теории метеоров. Уравнения торможения, уноса массы и прямолинейной траектории метеороида без учета силы тяжести запишем в виде

$$M\,\frac{dV}{d\rho} = -\frac{1}{2}\,\frac{AC_DhV}{\sin\theta}, \qquad \frac{dM}{d\rho} = -\frac{1}{2}\,\frac{AhC_H}{Q\sin\theta}\,V^2, \qquad \frac{dz}{dt} = -V\sin\theta, \qquad h = -\Big(\frac{1}{\rho}\,\frac{d\rho}{dz}\Big)^{-1}, \tag{1}$$

где V, M, A — скорость, масса и площадь миделя метеороида; ρ — плотность атмосферы; θ — угол наклона траектории метеороида к горизонту; h — шкала высот атмосферы по плотности; z — высота над уровнем моря. Разделив второе из уравнений (1) на первое, получаем

$$\frac{1}{M}\,\frac{dM}{d\rho} = \sigma V\,\frac{dV}{d\rho}, \qquad \sigma = \frac{C_H}{QC_D} \tag{2}$$

(σ — параметр уноса массы). Представим параметр σ на траектории в виде степенной зависимости от скорости $\sigma = \sigma_0 V^\alpha$, известной для микрометеороидов [1]. Подставляя эту зависимость в уравнение (2), находим его решение в виде выражения массы метеороида через его скорость:

$$\bar M = \exp\Big(\frac{\sigma_0 V_e^{2+\alpha}}{2+\alpha}\,(\bar V^{2+\alpha} - 1)\Big), \qquad \bar V = \frac{V}{V_e}, \qquad \bar M = \frac{M}{M_e} \tag{3}$$

(индекс e соответствует начальным значениям величин при входе метеороида в атмосферу).

Используя феноменологическое выражение для площади миделя $A/A_e = (M/M_e)^\mu$ (μ — коэффициент формы тела) [2] и вводя новую переменную u вместо скорости V, получаем

$$u = \frac{1-\mu}{2+\alpha}\,\sigma_0 V^{2+\alpha}, \quad \frac{u}{u_e} = \bar V^{2+\alpha} = \nu, \quad u_e = \frac{1-\mu}{2+\alpha}\,\sigma_0 V_e^{2+\alpha}, \quad \beta_e = \frac{M_e}{A_e},$$

где u, β_e — переменная и баллистический коэффициент метеороида при входе в атмосферу. Тогда с учетом последнего уравнения (1), соотношения (3) и гидростатического уравнения равновесия атмосферы $dz/dp = -1/(\rho g)$ уравнение торможения (первое уравнение (1)) запишем в виде

$$\mathrm{e}^{-u_e}\,\mathrm{e}^{u}\,\frac{du}{u} = -\frac{2+\alpha}{2}\,d\bar p, \qquad \bar p = \frac{p}{p_m}, \qquad p_m = \frac{\beta_e g\sin\theta}{C_D}, \tag{4}$$

где p — давление атмосферы; g — ускорение свободного падения.

Интегрируя уравнение (4), получаем аналитическое решение

$$\begin{gathered}\frac{2+\alpha}{2}\,\Delta\bar p = \mathrm{e}^{-u_e}\,\Delta\,\mathrm{Ei}\,(u_e, u), \qquad \Delta\bar p = \bar p - \bar p_e, \qquad \Delta\,\mathrm{Ei}\,(u_e, u) = \mathrm{Ei}\,(u_e) - \mathrm{Ei}\,(u),\\ \mathrm{Ei}\,(u) = \int\limits_{-\infty}^{u}\frac{\mathrm{e}^t\,dt}{t} = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^t\,dt}{t} + \int\limits_{\varepsilon}^{u}\frac{\mathrm{e}^t\,dt}{t}\Big) = \mathrm{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{u}\frac{\mathrm{e}^t\,dt}{t} = 0{,}5772 + \ln u + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{u^k}{k!k}.\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $\mathrm{Ei}\,(u)$ — интегральная показательная функция, представляющая собой несобственный интеграл в смысле главного значения по Коши и выражающаяся в виде сходящегося бесконечного ряда. Решение уравнения торможения (5) можно записать в виде

$$\ln\nu = -\Delta\bar p\,\frac{(2+\alpha)\,\mathrm{e}^{u_e}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_e^k(1-\nu^k)}{k!k}. \tag{6}$$

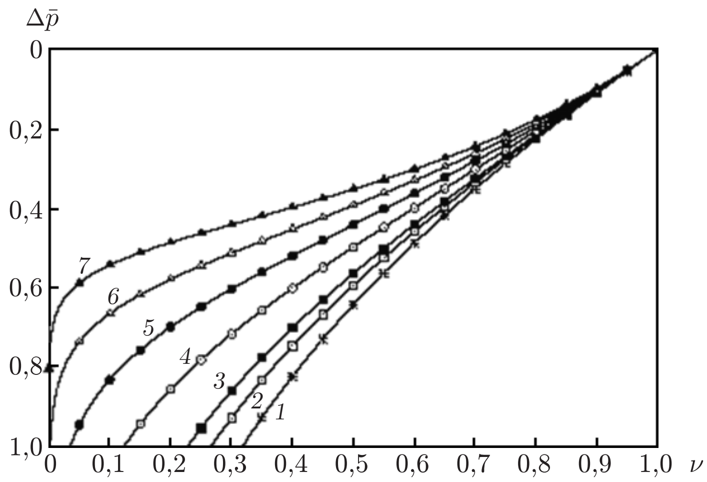

Рис. 1. Канонические кривые решения (6) при различных значениях безразмерной скорости при входе в атмосферу:
1 — $u_e = 0{,}5$, *2* — $u_e = 0{,}8$, *3* — $u_e = 1{,}0$, *4* — $u_e = 1{,}5$, *5* — $u_e = 2{,}0$, *6* — $u_e = 2{,}5$, *7* — $u_e = 3{,}0$

Уравнение (6) представляет собой точное следствие уравнения торможения, определяющее в неявном виде скорость метеороида как функцию относительного давления $\Delta\bar{p}$, зависящую от параметра u_e. Зависимость ν от $\Delta\bar{p}$, являющаяся решением уравнения (6), показана на рис. 1 ($\alpha = 0{,}8$). Это решение при $u_e \to 0$ ($\sigma \to 0$) переходит в решение в отсутствие уноса массы $V = V_e\,\mathrm{e}^{-\Delta\bar{p}/2}$.

Приближенное решение для массы и скорости метеороида. В литературе (см., например, [3]) неоднократно отмечалось, что для не очень малых тел относительный унос массы метеороида существенно больше относительной потери скорости на начальном участке его входа в атмосферу. Поэтому рассмотрим уравнение уноса массы (второе уравнение (1)), используя соотношение $V = V_e$ в качестве нулевого приближения для скорости. Полагая, что $\mu = 2/3$ (форма тела вдоль траектории не меняется), преобразуем уравнение уноса массы следующим образом:

$$\frac{dM}{M^{2/3}} = -\frac{1}{2}\,\sigma V_e^2 M_e^{1/3}\,d\bar{p}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$M = M_e(1 - u_e\Delta\bar{p})^3 = M_e(1 - u_e\bar{p})^3, \qquad p_e \ll p, \quad u_e = \sigma V_e^2/6. \tag{7}$$

В случае изотермической атмосферы, вводя характерную плотность $\rho_m = p_m/(gh)$ ($h = \mathrm{const}$) и относительную плотность $\bar{\rho}$, решение (7) можно представить в виде

$$M = M_e(1 - u_e\Delta\bar{\rho})^3 = M_e(1 - u_e\bar{\rho})^3, \quad \bar{\rho}_e \ll \bar{\rho}, \quad \rho_m = \frac{\beta_e \sin\theta}{hC_D}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_m}, \quad \Delta\bar{\rho} = \bar{\rho} - \bar{\rho}_e. \tag{8}$$

Решение (8) совпадает с решением для изотермической атмосферы, полученным в работе [4]. Масса метеороида уменьшается с уменьшением высоты, с увеличением начальной массы метеороида унос массы на той же высоте увеличивается.

Уравнение для определения первого приближения скорости (первое уравнение (1)) с учетом найденной массы (8) принимает вид

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{2}\,\frac{d\bar{\rho}}{1 - u_e\bar{\rho}}. \tag{9}$$

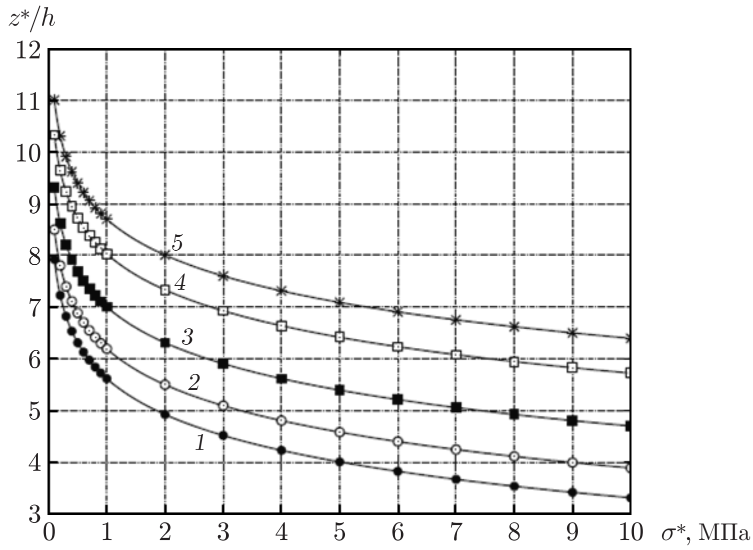

Рис. 2. Зависимость высоты, на которой начинается дробление метеороида, от прочности при различных значениях скорости на входе в атмосферу: *1* — $V_e = 15$ км/с, *2* — $V_e = 20$ км/с, *3* — $V_e = 30$ км/с, *4* — $V_e = 50$ км/с, *5* — $V_e = 70$ км/с

При $u_e = \mathrm{const}$, т. е. при постоянном параметре абляции σ, решение уравнения (9) имеет вид

$$\bar{V} = (1 - u_e \bar{\rho})^{1/(2u_e)}. \tag{10}$$

В случае $u_e \sim O(1)$ на достаточно больших высотах $\bar{\rho} \ll 1$ решение (10) можно представить в виде

$$\bar{V} \approx 1 - \bar{\rho}/2. \tag{11}$$

Из решения (11) следует, что в отличие от параметра уноса массы скорость метеороида в начале траектории в главном члене не зависит от параметра u_e. На рис. 1 этот вывод подтверждается тем, что поведение кривых в начале траектории слабо зависит от u_e.

С учетом условия равенства скоростного напора ρV^2 и прочности на разрушение σ^*

$$\rho V^2 = \sigma^* \tag{12}$$

полученное простое приближенное решение для скорости и массы метеороида на начальном участке траектории, где скорость меняется несущественно, можно использовать для определения высоты, на которой начинается дробление метеороида.

По плотности атмосферы на высоте разрушения z^* можно определить непосредственно высоту z^*. Зависимость функции z^*/h ($h = 7$ км) от прочности σ^* для различных скоростей входа в атмосферу V_e, полученная в предположении, что скорость метеороида незначительно меняется до высоты начала дробления, представлена на рис. 2. Согласно рис. 2 Челябинский метеороид, имевший скорость $V_e = 19$ км/с и начавший разрушаться, по данным наблюдений, на высоте приблизительно $45 \div 47$ км, имел прочность $\sigma^* = 0{,}5 \div 0{,}7$ МПа. Прочность входящего в атмосферу космического тела, зависящая от его состава, структуры и размера, заранее не известна, поэтому уравнение (12) обычно используется для определения прочности метеороида по высоте, на которой начинается его дробление и которая определяется по данным наблюдений.

Экстремальные значения баллистических характеристик метеороида. На траектории метеороида, движущегося в неизотермической атмосфере, найдем экстремумы (максимумы) следующих величин:

$$j = -\frac{dV}{dt}, \quad p_0' = \rho V^2, \quad \frac{dM}{dl}, \quad \frac{dA}{dl}, \quad \frac{d\beta}{dl}\left(\beta = \frac{M}{A}\right), \quad \frac{dK}{dl}. \tag{13}$$

Здесь l — длина пути вдоль траектории; $K = MV^2/2$ — кинетическая энергия метеороида. Приравняем к нулю производные по t от натурального логарифма величин (13), параметры $\sigma = \sigma_0 V^\alpha$, μ, C_D полагаем постоянными. Для определения значений

$$\bar{p} = \bar{p}_m \quad (\bar{p}_e \ll \bar{p}), \qquad u = u_m = \frac{1-\mu}{2+\alpha}\,\sigma_0 V_m^{2+\alpha},$$

при которых достигаются экстремальные значения величин (13), для каждой величины в (13) получаем следующие системы двух уравнений:

— для максимального торможения $j_{\max}$

$$\bar{p}_m = \frac{H}{h}\,\frac{\mathrm{e}^{u_m-u_e}}{1-u_m}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^{-1}, \qquad \frac{2+\alpha}{2}\,\bar{p}_m = \mathrm{e}^{-u_m}\,\Delta\,\mathrm{Ei}\,(u_e, u_m);$$

— для максимального скоростного напора $(p_0')_{\max}$

$$\bar{p}_m = \frac{H}{h}\,\mathrm{e}^{u_m-u_e}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^{-1}, \qquad \frac{2+\alpha}{2}\,\bar{p}_m = \mathrm{e}^{-u_e}\,\Delta\,\mathrm{Ei}\,(u_e, u_m);$$

— для максимальной потери массы на единицу длины пути $(dM/dl)_{\max}$

$$\bar{p}_m = \frac{H}{h}\,\mathrm{e}^{u_m-u_e}\left(1+\frac{\mu}{1-\mu}\,u_m+\frac{\alpha}{2}\right)^{-1}, \qquad \frac{2+\alpha}{2}\,\bar{p}_m = \mathrm{e}^{-u_e}\,\Delta\,\mathrm{Ei}\,(u_e, u_m);$$

— для максимального уменьшения площади миделя на единицу длины пути $(dA/dl)_{\max}$

$$\bar{p}_m = \frac{H}{h}\,\mathrm{e}^{u_m-u_e}\left(1-\frac{1-2\mu}{1-\mu}\,u_m+\frac{\alpha}{2}\right)^{-1}, \qquad \frac{2+\alpha}{2}\,\bar{p}_m = \mathrm{e}^{-u_e}\,\Delta\,\mathrm{Ei}\,(u_e, u_m);$$

— для максимального уменьшения баллистического коэффициента на единицу длины пути $(d\beta/dl)_{\max}$

$$\bar{p}_m = \frac{H}{h}\,\mathrm{e}^{u_m-u_e}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^{-1}, \qquad \frac{2+\alpha}{2}\,\bar{p}_m = \mathrm{e}^{-u_e}\,\Delta\,\mathrm{Ei}\,(u_e, u_m);$$

— для максимальной потери кинетической энергии на единицу длины пути $(dK/dl)_{\max}$

$$\bar{p}_m = \frac{H}{h}\,\mathrm{e}^{u_m-u_e}\left(1+\frac{\mu}{1-\mu}\,u_m+\frac{u_m(1+\alpha/2)}{1-\mu+u_m}\right)^{-1}, \qquad \frac{2+\alpha}{2}\,\bar{p}_m = \mathrm{e}^{-u_e}\,\Delta\,\mathrm{Ei}\,(u_e, u_m)$$

(H — шкала высот атмосферы по давлению). Из данных выражений получаем следующую последовательность появления экстремумов на траектории метеороида. При $\mu = 2/3$ (форма тела не меняется) сначала достигает максимума величина $-dK/dl$, затем $-dM/dl$, далее величины $-d\beta/dl$ и p_0' достигают максимальных значений одновременно, затем происходит максимальное торможение j и, наконец, достигает максимума величина $-dA/dl$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бронштэн В. А.** Физика метеорных явлений. М.: Наука, 1981.
2. **Левин Б. Ю.** Физическая теория метеоров и метеорное вещество в Солнечной системе. М.: Изд-во АН СССР, 1956.
3. **Брыкина И. Г., Тирский Г. А.** Унос массы и световая кривая крупного метеороида. Аналитическое решение // Прикл. математика и механика. 2017. Т. 81, № 5. С. 571–592.
4. **Hawkins G. S., Southworth R. B.** The statistics of meteors in the Earth's atmosphere // Smithsonian Contribut. Astrophys. 1958. V. 2, N 11. P. 349–363.

Поступила в редакцию 10/I 2019 г.,
после доработки — 3/IV 2019 г.
Принята к публикации 29/IV 2019 г.