ПМТФ, № 3, 1972

УДК 532.516

ПЛОСКАЯ СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

В. В. Пухначев

(Новосибирск)

Рассматривается модельная задача о плоском медленном установившемся движении вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей. Предполагается, что свободная граница не имеет общих точек с твердыми поверхностями, ограничивающими жидкость. Путем решения вспомогательной задачи с фиксированной границей для уравнений Навье — Стокса задача сводится к операторному уравнению для определения формы свободной поверхности. Исследуются вопросы существования, единственности и качественного поведения решения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоское установившееся движение вязкой несжимаемой жидкости в криволинейной полосе, верхняя граница которой свободна, а нижняя (дно) представляет собой твердую прямолинейную стенку с периодически расположенными на ней участками втекания и вытекания жидкости. Введем безразмерные переменные, отнеся расстояния к средней глубине жидкости h, скорости к $h^{-1}\nu$ (ν — коэффициент кинематической вязкости), давление — к $\rho h^{-2}\nu^2$ (ρ — плотность жидкости). Тогда уравнения движения запишутся в виде (массовые силы отсутствуют)

$$\Delta \mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} - \nabla p = 0, \quad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \tag{1.1}$$

в полосе $-\infty < x_1 < \infty$, $-1 < x_2 < f(x_1)$. Здесь $x_2 = f(x_1)$ — уравнение свободной поверхности, которая по предположению однозначно проектируется на дно $x_2 = -1$. Будем разыскивать решения, периодические по

$$\mathbf{v}(x_1 + l,\ x_2) \equiv \mathbf{v}(x_1,\ x_2),\quad p(x_1 + l,\ x_2) \equiv p(x_1,\ x_2),\quad f(x_1 + l) \equiv f(x_1) \tag{1.2}$$

Через Ω обозначим «прямоугольник» $0 < x_1 < l$, $-1 < x_2 < f$ с нижним основанием $\Sigma = \{x_1, x_2{:}0 < x_1 < l,\ x_2 = -1\}$ и криволинейным верхним основанием $\Gamma = \{x_1,\ x_2{:}\ 0 < x_1 < l,\ x_2 = f(x_1)\}$; $\overline{\Omega}$ означает замыкание Ω.

Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор внешней нормали и через $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной к свободной поверхности. Условия на свободной поверхности имеют вид

$$\mathbf{v}|_\Gamma\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n}\cdot T|_\Gamma\cdot\boldsymbol{\tau} = 0 \tag{1.3}$$

$$\left(\frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}}\right)' = \mu\mathbf{n}\cdot T|_\Gamma\cdot\mathbf{n} \tag{1.4}$$

$$T_{ij} = -p\sigma_{ij} + 2S_{ij},\quad i,\ j = 1,2,\quad 2S_{ij} = \partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i$$

Здесь T — тензор напряжений, S_{ij} — элемент тензора скоростей деформаций, штрих означает дифференцирование по x_1, $\mu = \rho\nu^2(\sigma h)^{-1}$ — безразмерный параметр, связанный с коэффициентом поверхностного натяжения σ. Первое условие (1.3) означает отсутствие потока жидкости через свободную границу, а второе — обращение в нуль касательной составляющей вектора напряжений, действующих на свободную поверхность. Условие (1.4) гласит, что нормальная составляющая вектора напряжений равна поверхностному давлению, которое по формуле Лапласа пропорционально кривизне свободной поверхности.

Требуя, чтобы безразмерная средняя глубина жидкости равнялась единице, получаем, что

$$\int_0^l f dx_1 = 0 \tag{1.5}$$

Потребуем еще выполнения неравенства $|f| \leqslant \delta < 1$ для всех x_1 ($\delta = \text{const} > 0$), исключающего возможность контакта свободной поверхности с дном.

Наконец, поставим для системы (1.1) краевое условие на дне

$$\mathbf{v}|_\Sigma = \mathbf{w}(x_1) \tag{1.6}$$

Здесь $\mathbf{w}$ — заданная вектор-функция, l-периодическая по x и такая, что сужение $\mathbf{w}$ на $[0, l]$ есть функция из гельдеровского класса $\mathbf{C}^{2+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, финитная в $(0, l)$. (Определение пространств Гельдера $C^{m+\alpha}$, $m \geqslant 0$ — целое, см., например, в [1].) Если $\varphi(x) \in C^{m+\alpha}(\bar{Q})$, где $\bar{Q}$ — замкнутая ограниченная область, то $|\varphi|_{m+\alpha\bar{Q}}$ обозначает норму φ в $C^{m+\alpha}$. Выражение $\mathbf{w} \in \mathbf{C}^{2+\alpha}[0, l]$ означает, что каждая компонента вектора $\mathbf{w}$ принадлежит $C^{2+1}[0, l]$. Требование стационарности приводит к дополнительному условию

$$\int_0^l w_2 dx_1 = 0 \tag{1.7}$$

что означает равенство нулю суммарного расхода жидкости через каждую «ячейку» дна.

Сформулированная задача состоит в определении дважды непрерывно дифференцируемых функций $\mathbf{v}(x_1, x_2)$, $f(x_1)$ и непрерывно дифференцируемой функции $p(x_1, x_2)$, которые удовлетворяют соотношениям (1.1)—(1.6).

Заметим, что разбиение условий на свободной границе на две группы (1.3) и (1.4) не случайно. Оно диктуется предлагаемым способом решения задачи (1.1) — (1.6). На первом этапе форма свободной поверхности фиксируется. При заданном f для системы (1.1) решается краевая задача с условиями (1.2), (1.3), (1.6). В дальнейшем эту задачу будем просто называть вспомогательной задачей. Замечательная особенность вспомогательной задачи состоит в том, что она разрешима «в целом» — без каких-либо ограничений на исходные данные.

Определим из решения вспомогательной задачи $\mathbf{n} \cdot T|_\Gamma \cdot \mathbf{n}$ и подставим результат в оставшееся условие на свободной границе (1.4). Полученное соотношение можно трактовать как уравнение для определения кривой по заданной кривизне. Обращая оператор кривизны с условиями (1.2), (1.5), приходим к уравнению $f = F(f)$, где F — нелинейный непрерывный оператор в некотором банаховом пространстве. Доказывается, что при малых $|\mathbf{w}|_{2+\alpha}$ это уравнение имеет решение, единственное «в малом».

В предлагаемом подходе к рассматриваемой задаче с неизвестной границей существенным моментом является введение поверхностного натяжения в краевое условие на свободной границе. Именно это обстоятельство позволяет свести задачу (1.1)—(1.6) к хорошему операторному уравнению. Следует отметить, что ранее роль поверхностного натяжения как регуляризующего фактора в задачах со свободной границей указывалась Р. М. Гариповым [2] и Г. В. Щербиной [3]. (Как сообщил автору В. Х. Изаксон, введение поверхностного натяжения в задачу о возникновении термической конвекции в слое жидкости со свободной границей позволяет свести ее к классической задаче о точках бифуркации вполне непрерывного оператора.)

2. Основные определения и неравенства. Рассмотрим пространство $\mathbf{L}_2(\Omega)$, образованное l-периодическими по x_1 двумерными вектор-функциями, компоненты которых квадратично суммируемы по области Ω. Скалярное произведение в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ определяется равенством

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\,dx$$

а норма $||\mathbf{u}|| = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}$.

Введем в рассмотрение оператор $\mathcal{A}$, устанавливающий соответствие между решениями $\mathbf{u}(x)$ линейных задач

$$-\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \zeta(x), \quad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \quad x \in \Omega \tag{2.1}$$

$$\mathbf{u}(x_1 + l, x_2) \equiv \mathbf{u}(x_1, x_2), \quad \mathbf{u}|_\Sigma = 0, \quad \mathbf{u}|_\Gamma\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n}\cdot T|_\Gamma\cdot\boldsymbol{\tau} = 0 \tag{2.2}$$

и их свободными членами $\zeta(x)$, а именно $\mathcal{A}\mathbf{u} = \zeta$. Область определения D_A оператора $\mathcal{A}$ состоит из соленоидальных вектор-функций $\mathbf{u} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, подчиненных краевым условиям (2.2). Оператор $\mathcal{A}$ симметричен, поскольку для $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in D_{\mathcal{A}}$

$$(\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega (-\Delta\mathbf{u} + \nabla p)\cdot\mathbf{v}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)dx \equiv 2\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} S_{ij}(\mathbf{u})\,S_{ij}(\mathbf{v})\,dx$$

При получении последнего равенства использована формула Грина для системы Стокса [1]. Возникающие при этом поверхностные интегралы обращаются в нуль ввиду условий (2.2). На множестве введем новое скалярное произведение, полагая по определению

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \frac{1}{2}(\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} S_{ij}(\mathbf{u})\,S_{ij}(\mathbf{v})\,dx \tag{2.3}$$

Нетрудно показать, что для (2.3) выполнены все аксиомы скалярного произведения. В частности, если $[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = 0$, то $S_{ij}(\mathbf{u}) = 0$ для $x \in \bar{\Omega}$. Отсюда и из $\mathbf{u}|_\Sigma = 0$ следует $\mathbf{u} = 0$ в $\bar{\Omega}$.

Пополняя множество $D_{\mathcal{A}}$ по норме $||\mathbf{u}||$, получим подпространство пространства $\mathbf{L}_2(\Omega)$, которое обозначим $\mathbf{J}(\Omega)$. Ортогональное дополнение в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ до $\mathbf{J}(\Omega)$ обозначим через $\mathbf{G}(\Omega)$. Следуя [1], можно показать, что $\mathbf{G}(\Omega)$ состоит из $\nabla\varphi$, где $\varphi \in W_2^1(\Omega)$. (Определение и свойства соболевских пространств W_r^m см., например, в [4].) Если $\varphi(x) \in W_r^m(\Omega)$, то символ $||\varphi||_r^{(m)}$ означает норму φ в W_r^m. Если $m = 0$, верхний индекс в обозначении $||\varphi||_r^{(0)}$ опускается.

Пополнение множества $D_{\mathcal{A}}$ по норме $|||\mathbf{u}||| = [\mathbf{u}, \mathbf{u}]^{1/2}$ приводит к гильбертову пространству, которое назовем энергетическим пространством оператора $\mathcal{A}$ и обозначим $\mathbf{H}(\Omega)$. Заметим, что элементы пространства $\mathbf{H}(\Omega)$ «в среднем» удовлетворяют всем краевым условиям (2.2), кроме последнего $\mathbf{n}\cdot T|_\Gamma\cdot\boldsymbol{\tau} = 0$. По терминологии [5] это условие будет естественным для дифференциального оператора $\mathcal{A}$, а остальные условия (2.2) — главными условиями.

В силу (2.3) пространство $\mathbf{H}(\Omega)$ является подпространством векторного пространства $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$ с нормой

$$\|\mathbf{u}\|_2^{(1)} = \left[\int\limits_\Omega (|\nabla\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{u}|^2)\,dx\right]^{1/2}$$

Весьма важным является тот факт, что нормы $\|\mathbf{u}\|_2^{(1)}$ и $|||\mathbf{u}|||$ эквивалентны. Ясно, что $|||\mathbf{u}||| \leqslant C\|\mathbf{u}\|_2^{(1)}$, причем в качестве C можно выбрать 2. Доказательство обратного неравенства между нормами в $\mathbf{H}$ и $\mathbf{W}_2^1$ основано на двух неравенствах, справедливых для $\mathbf{u}$ из $\mathbf{H}(\Omega)$. Первое из них

$$\int\limits_\Omega |\mathbf{u}|^2\,dx \leqslant C_1 \int\limits_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2\,dx \tag{2.4}$$

доказывается так же, как и в [1]; в качестве C_1 может быть выбрано число $(1+\delta)^2$, где $\delta = \max|f|$. (Здесь и в дальнейшем C_k, $k = 1,2,3, \ldots$, обозначают положительные постоянные.) При доказательстве (2.4) используется плотность $D_{\mathcal{A}}$ в $\mathbf{H}(\Omega)$ и то, что $\mathbf{u}|_\Gamma = 0$ для $\mathbf{u} \in D_{\mathcal{A}}$.

Второе неравенство является вариантом хорошо известного в теории упругости неравенства Корна; для любого

$$\int\limits_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2\,dx \leqslant C_2 \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} S_{ij}^2(\mathbf{u})\,dx \equiv C_2|||\mathbf{u}|||^2 \tag{2.5}$$

где C_2 зависит лишь от области Ω. Неравенства типа (2.5) для различных подпространств пространства $\mathbf{W}_2^1$ были установлены А. Корном, а также К. Фридрихсом [6], Д. М. Эйдусом [7,8] и другими авторами. Доказательство (2.5) не приводится ввиду ограничений на объем статьи. Отметим лишь, что оно очень похоже на доказательство [7]. На основании (2.4), (2.5) получаем

$$\|\mathbf{u}\|_2^{(1)} \leqslant C_3|\mathbf{u}|, \quad \|\mathbf{u}\| \leqslant C_4|||\mathbf{u}|||, \quad (C_3 = [(1+C_1)C_2]^{1/2}, \quad C_4 = (C_1C_2)^{1/2}).$$

Последнее неравенство означает, что оператор $\mathcal{A}$ — положительно определенный [5]. Из неравенства (2.5) и теоремы Реллиха [1] вытекает, что любое ограниченное множество в $\mathbf{H}(\Omega)$ компактно в пространстве $\mathbf{J}(\Omega)$.

Указанные свойства оператора $\mathcal{A}$ и его энергетического пространства $\mathbf{H}(\Omega)$ позволяют доказать существование собственных функций этого оператора. Собственные функции $\mathbf{e}_k$, $k = 1,2, 3, \ldots$ являются решениями задач

$$-\Delta\mathbf{e}_k + \nabla q_k = \lambda_k\mathbf{e}_k, \quad \nabla\cdot\mathbf{e}_k = 0, \quad x \in \Omega$$
$$\mathbf{e}_k(x_1 + l, x_2) \equiv \mathbf{e}_k(x_1, x_2)$$
$$\mathbf{e}_k|_\Sigma = 0, \quad \mathbf{e}_k|_\Gamma\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n}\cdot T(\mathbf{e}_k)|_\Gamma\cdot\boldsymbol{\tau} = 0$$

Применяя вариационный метод в соответствии со схемой, изложенной в [5], можно получить следующие результаты. Оператор $\mathcal{A}$ имеет бесконечное множество собственных чисел $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$, $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Обратный к $\mathcal{A}$ оператор вполне непрерывен. Собственные функции оператора $\mathcal{A}$ образуют систему, полную и ортогональную как в $\mathbf{J}(\Omega)$, так и в $\mathbf{H}(\Omega)$. Функции $\mathbf{e}_k$ бесконечно дифференцируемы в Ω. Их гладкость в замкнутой области определяется гладкостью Γ. Если $f \in C^{m+1+\alpha}[0, l]$, $m \geqslant 1$, то функции $\mathbf{e}_k$ принадлежат гельдеровскому классу $\mathbf{C}^{m+\alpha}(\bar{\Omega})$. Эти функции как решения некоторых вариационных задач удовлетворяют естественному для оператора $\mathcal{A}$ краевому условию $\mathbf{n}\cdot T|_\Gamma\cdot\tau = 0$ в обычном смысле.

Вернемся к неравенствам (2.4), (2.5). Согласно [1, 6–8], эти неравенства справедливы для областей с кусочно-гладкой границей. Рассмотрим теперь семейство областей Ω, ограниченных сверху различными кривыми $\Gamma: x_2 = f(x_1)$, $0 \leqslant x_1 \leqslant l$. Предположим, что функции f ограничены в совокупности по норме $C^{1+\alpha}[0, l]$, так что $|f|_{1+\alpha} \leqslant \delta < 1$. Тогда оказывается, что постоянные C_1, C_2 в неравенствах (2.4), (2.5) могут быть выбраны так, что они не зависят от области Ω. (Далее предполагаем, что такой выбор уже сделан.) Это утверждение доказывается простым рассуждением от противного.

3. Обобщенное решение вспомогательной задачи. В этом пункте доказывается существование обобщенного решения задачи (1.1) — (1.3), (1.6). Считаем, что кривая Γ задана с помощью функций $f(x_1) \in C^{1+\alpha}[0, l]$ и $|f|_{1+\alpha} \leqslant \delta < 1$.

Лемма. 3. 1. Пусть задана функция $\mathbf{w}(x_1)$ на $[0, l]$, финитная в $(0, l)$, удовлетворяющая (1.7) и такая, что $\mathbf{w} \in \mathbf{C}^{m+\alpha}$, $m \geqslant 2$ — целое. Тогда существует вектор-функция $\mathbf{a}(x)$, такая что

$$\mathbf{a}(x_1, -1) = \mathbf{w}(x_1), \quad \mathbf{a} \in \mathbf{C}^{m+\alpha}(\bar{\Omega}), \quad \nabla\cdot\mathbf{a} = 0 \text{ для } x \in \Omega$$

$\mathbf{a}$ обращается в нуль вне прямоугольника $-1 \leqslant x_2 \leqslant -(1+\delta)/2$, $x_1, \in \operatorname{supp}\mathbf{w}$ и для любого $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\Omega)$

$$\left|\int_\Omega \mathbf{a}\cdot\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\,dx\right| \leqslant \frac{1}{C_2}\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2\,dx \tag{3.1}$$

Здесь C_2 — константа из неравенства (2.5), $\operatorname{supp}\mathbf{w}$— носитель $\mathbf{w}$. (Доказательство леммы см. в [9, 10, 1]). Указанные доказательства приводят к явному построению соленоидального продолжения $\mathbf{a}$ вектора $\mathbf{w}$ в область Ω. При этом можно добиться еще и того, что

$$|\mathbf{a}|_{2+\alpha,\bar{\Omega}} \leqslant C_5|\mathbf{w}|_{2+\alpha,[0,l]}.$$

Выберем одно из продолжений $\mathbf{a}(x)$ согласно лемме 3.1 и зафиксируем его.

Назовем обобщенным решением вспомогательной задачи функцию $\mathbf{v}(x)$ такую, что $\mathbf{v} - \mathbf{a} = \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\Omega)$ и для любого $\mathbf{\Phi} \in \mathbf{H}(\Omega)$ выполнено тождество

$$2[\mathbf{u}+\mathbf{a}, \mathbf{\Phi}] - \{\mathbf{u}+\mathbf{a}, \mathbf{u}+\mathbf{a}, \mathbf{\Phi}\} = 0 \tag{3.2}$$

где выражение $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ определено равенством (2.2) и введено обозначение

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} = \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{w}\,dx$$

Если обобщенное решение $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^2(\Omega')$ для любой внутренней подобласти Ω' области Ω, то существует однозначная, с точностью до постоянного слагаемого функция $p(x)$, такая что $\nabla p \in \mathbf{L}_2(\Omega')$ и почти всюду в Ω выполнены равенства (1.1). (Аналогичное утверждение относительно обобщенного решения первой краевой задачи для (1.1) доказано в [1]).

Лемма 3.2. Пусть $\mathbf{v}(x)$ — обобщенное решение вспомогательной задачи. Тогда существует верхняя грань $\|\mathbf{v}\|_2^{(1)}$, зависящая лишь от $\mathbf{w}$, δ, l.

Для доказательства положим в тождестве (3.2) $\mathbf{\Phi} = \mathbf{u}$. Заметив, что для $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\Omega)$ и выбранного $\mathbf{a}$

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{a}, \mathbf{u}\} = 0, \quad \{\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}\} = 0$$

приведем соотношение (3.2) к виду

$$2\,|||\,\mathbf{u}\,|||^2 = \{\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{u}\} + \{\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{u}\} - 2\,[\mathbf{a}, \mathbf{u}] \tag{3.3}$$

Применяя к оценке первого слагаемого в правой части неравенства (3.1) и используя неравенства (2.5) и Коши—Буняковского, получаем из (3.3), что

$$|||\,\mathbf{u}\,||| \leqslant 2\,\|\,\mathbf{a}\,\|_2^{(1)} + \sqrt{3}\,(\|\,\mathbf{a}\,\|_4)^2 = C_6 \tag{3.4}$$

Поскольку $\|\mathbf{v}\|_2^{(1)} \leqslant \|\mathbf{u}\|_2^{(1)} + \|\mathbf{a}\|_2^{(1)}$ и нормы $\|\,\mathbf{u}\,\|_2^{(1)}$ и $|||\mathbf{u}|||$ эквивалентны, то лемма 3.2 доказана.

Теорема 3.1. Существует по крайней мере одно обобщенное решение вспомогательной задачи.

Доказательство теоремы проводится методом Галеркина по схеме, предложенной Фудзита [10] для изучения первой краевой задачи для уравнений Навье — Стокса. Для любого $n \geqslant 1$ строится приближенное решение задачи в виде

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{a} + \mathbf{u}_n \equiv \mathbf{a} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i$$

Неизвестные коэффициенты α_i в разложении $\mathbf{u}_n$ по базису $\{\mathbf{e}_i\}$ в $\mathbf{H}\,(\Omega)$ определяются из условий

$$2\,[\mathbf{u}_n + \mathbf{a}, \mathbf{e}_i] - \{\mathbf{u}_n + \mathbf{a}, \mathbf{u}_n + \mathbf{a}, \mathbf{e}_i\} = 0$$

для каждого $i = 1, \ldots, n$. Так же, как и в [10], устанавливается априорная оценка $\mathbf{u}_n$ в $\mathbf{H}\,(\Omega)$, не зависящая от n, и доказывается существование приближенного решения. Ограниченность $\mathbf{u}_n$ означает, что существует подпоследовательность $\mathbf{u}_n$, слабо сходящаяся в $\mathbf{H}\,(\Omega)$. По теореме вложения Соболева (см., например, [4]), она сильно сходится в $\mathbf{L}_4\,(\Omega)$. Отсюда нетрудно заключить, что ее слабый предел $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{a}$ удовлетворяет тождеству (3.2) и, следовательно, определяет обобщенное решение вспомогательной задачи.

Теорема 3. 2. Если $|\mathbf{w}|_{2+\alpha[0,\,l]}$ достаточно мало, то обобщенное решение вспомогательной задачи единственно.

Доказательство теоремы основано на получении оценки $|||\mathbf{u}||| \leqslant C_7\,|\mathbf{w}|_{2+\alpha}\,(1 + |w|_{2+\alpha})$, которая вытекает из (3.4) и свойств продолжения $\mathbf{a}$ вектора $\mathbf{w}$. Далее оно следует доказательству теоремы единственности медленных стационарных течений (первая краевая задача), изложенному в [1].

В заключение отметим, что теоремы существования и единственности обобщенного решения вспомогательной задачи верны и при более слабых предположениях о гладкости $\mathbf{w}\,(x_1)$. Теорема 3.1 остается в силе, если $\mathbf{w} \in W_2^{1/2}\,(0, l)$, а для справедливости теоремы 3.2 достаточно, чтобы $\|\,\mathbf{w}\,\|_2^{1/2}$ было малым.

4. Гладкость обобщенного решения. Ниже исследуются дифференциальные свойства обобщенного решения вспомогательной задачи и их зависимость от гладкости границы Г.

Теорема 4.1. Если $f \in C^{m+1+\alpha}\,[0, l]$, $\mathbf{w} \in \mathbf{C}^{m+\alpha}\,[0, l]$, $m \geqslant 2$, то обобщенное решение $\mathbf{v}$ вспомогательной задачи принадлежит $\mathbf{C}^{m+\alpha}\,(\bar{\Omega})$, $\nabla p \in \mathbf{C}^{m-2+\alpha}\,(\bar{\Omega})$.

Доказательство базируется на двух леммах о решении линейной задачи (2.2) для системы Стокса (2.1).

Лемма 4. 1. Если $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{L}_r(\Omega)$, $r > 1$ и $f \in C^3[0, l]$, то соответствующее им решение $\mathbf{u}$ задачи (2.1), (2.2) принадлежит $\mathbf{W}_r^{(2)}(\Omega)$, $\nabla p \in \mathbf{L}_r(\Omega)$ и

$$\|\mathbf{u}\|_r^{(2)} + \|\nabla p\|_r \leqslant C_8 \|\boldsymbol{\zeta}\|_r \tag{4.1}$$

Лемма 4. 2. Если $\boldsymbol{\zeta} \in C^{m-2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $f \in C^{m+1+\alpha}[0, l]$, $m \geqslant 2$, то решение $\mathbf{u}$ задачи (2.1) , (2.2) принадлежит $\mathbf{C}^{m+\alpha}(\overline{\Omega})$, $\nabla p \in C^{m-2+\alpha}(\overline{\Omega})$ и

$$|\mathbf{u}|_{m+\alpha} + |\nabla p|_{m-2+\alpha} \leqslant C_9 |\boldsymbol{\zeta}|_{m-2+\alpha} \tag{4.2}$$

Доказательство лемм 4.1, 4.2 отложим до конца пункта, а сейчас покажем, как из этих лемм следует утверждение теоремы 4.1.

Пусть $\mathbf{v}$ — обобщенное решение вспомогательной задачи. Тогда $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{a}$ и соответствующее ему p удовлетворяют системе (2.1) с $\boldsymbol{\zeta} = \Delta\mathbf{a} - \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}$ и однородным краевым условиям (2.2). Согласно лемме 3.1 $\Delta\mathbf{a} \in \mathrm{C}^{m-2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Вследствие леммы 3.2 $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^1(\Omega)$. По теореме вложения [4], если Ω — плоская ограниченная область с кусочно-гладкой границей, то пространство $W_r^m(\Omega)$ вложено в $L_q(\Omega)$ с $q = 2r/(2 - rm)$ при $rm < 2$ и в $L_q(\Omega)$ с любым конечным q при $rm = 2$. Применяя эту теорему с $r = 2$, $m = 1$ и пользуясь неравенством Гельдера, получаем, что $\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} \in \mathbf{L}_r(\Omega)$ и, следовательно, $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{L}_r(\Omega)$ с любым конечным r. Из леммы 4.1 следует включение $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{a} \in \mathrm{W}_r^2(\Omega)$. Тогда $\partial\mathbf{v}/\partial x_i \in \mathbf{W}_r^1(\Omega)$, $i = 1,2$. Пользуясь теоремой о вложении $W_r^m(\Omega)$ в $C^h(\overline{\Omega})$, $0 < h < 1$, при $rm > n$, где n — размерность Ω [1], и выбирая $r = 2/(1 - \alpha)$, находим, что $\partial\mathbf{v}/\partial x_i \in \mathrm{C}^\alpha(\overline{\Omega})$, а значит, и $\boldsymbol{\zeta} \in \mathrm{C}^\alpha(\Omega)$. В соответствии с леммой 4.2 можем заключить, что $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{a} \in \mathrm{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Это доказывает теорему 4.1 в случае $m = 2$. Если $m > 2$, то подобные рассуждения следует повторить несколько раз.

При доказательстве лемм 4.1, 4.2 пользуемся априорными оценками решений систем, эллиптических в смысле Даглиса — Ниренберга [11]. В [12, 13] сформулировано важное алгебраическое условие — условие дополнительности, обеспечивающее наличие предельно точных оценок в нормах $C^{m+\alpha}$ и W_r^m для указанных систем. Известно [13], что система Стокса (2.1) эллиптична по Даглису — Ниренбергу. Несложные, но громоздкие вычисления показывают, что совокупность краевых условий (2.2) для системы (2.1) удовлетворяет условию дополнительности.

Предположим, что в условиях леммы 4.1 существует решение $\mathbf{u} \in \mathbf{W}_r^{(2)}(\Omega)$ задачи (2.1), (2.2). Тогда оценка (4.1) следует из общих результатов Агмона, Даглиса, Ниренберга [12] и В. А. Солонникова [14]. Отсутствие справа в (4.1) члена вида $C\,||\mathbf{u}||_r$ объясняется теоремой единственности для задачи (2.1), (2.2): если $\boldsymbol{\zeta} = 0$, то $\mathbf{u} = 0$, $p = \mathrm{const}$. Существование решения задачи (2.1), (2.2) достаточно установить для $\boldsymbol{\zeta} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $f \in C^\infty[0, l]$. Вследствие оценки (4.1) с помощью подходящих аппроксимаций можно потом перейти к случаю $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{L}_r(\Omega)$, $f \in C^3[0, l]$.

Вводя функцию тока ψ при помощи соотношений $u_1 = \partial\psi/\partial x_2$, $u_2 = -\partial\psi/\partial x_1$, можно убедиться, что задача (2.1), (2.2) эквивалентна следующей:

$$\begin{gathered}\Delta\Delta\psi = \chi(x), \quad x \in \Omega \\ \psi(x_1 + l, x_2) \equiv \psi(x_1, x_2), \quad \psi|_\Sigma = 0, \ (\partial\psi/\partial n)|_\Sigma = 0 \\ \psi|_\Gamma = 0, \quad \Delta\psi - 2K(x)(\partial\psi/\partial n)|_\Gamma = 0\end{gathered} \tag{4.3}$$

где $\chi = \partial\zeta_1/\partial x_2 - \partial\zeta_2/\partial x_1$, $\partial\psi/\partial n$ означает производную в направлении внешней нормали к границе Ω, K — кривизна Γ.

Задача (4.3) самосопряженная. Ее решение единственно, что доказывается умножением уравнения $\Delta\Delta\psi = 0$ на ψ и интегрированием по частям по области Ω с использованием краевых условий. Система граничных операторов в (4.3) нормальна и накрывает оператор $\Delta\Delta$ (определения см. в [15]). Существование решения $\psi \in C^\infty$ задачи (4.3) теперь непосредственно вытекает из результатов Шехтера [15]. Это завершает доказательство леммы 4.1. Лемма 4.2 доказывается аналогично.

5. **Подготовительные леммы**. Из результатов п. 3,4 следует, что если $f \in C^{3+\alpha}[0,l]$, $\mathbf{w} \in C^{2+\alpha}[0,l]$, $|f|_{1+\alpha} \leqslant \delta < 1$ и $|\mathbf{w}|_{2+\alpha} \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то однозначно определена скорость $\mathbf{v}$ в решении вспомогательной задачи, а соответствующее давление восстанавливается криволинейным интегралом

$$p(x) = \int_0^x (\Delta\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v})\cdot d\mathbf{s} + p_0$$

где $p_0 = p(0)$ — произвольная постоянная. Это позволяет ввести в рассмотрение оператор $\mathcal{B}$, ставящий в соответствие каждой l-периодической функции $f \in C^{3+\alpha}$ — функцию $\mathcal{B}[f(x_1)]$ по формуле

$$\mathcal{B}(f) = \mathbf{n}\cdot T|_\Gamma\cdot\mathbf{n} + p_0 \tag{5.1}$$

(Здесь $\mathbf{n}$, $T|_\Gamma$ рассматриваются как функции x_1; заметим, что правая часть (5.1) не зависит от p_0.) По теореме 4.1 функция $\mathcal{B}[f(x_1)]$, будучи линейной комбинацией p, $\partial v_i/\partial x_j$ с коэффициентами из $C^{2+\alpha}$, принадлежит классу $C^{1+\alpha}[0, l]$. Кроме того, эта функция l — периодична по x_1. Необходимо показать, что $\mathcal{B}(f)$ непрерывен как оператор из $C^{3+\alpha}$ в $C^{1+\alpha}[0, l]$. Предварительно сформулируем следующую лемму.

Лемма 5.1. В условиях теоремы 4.1 имеет место неравенство

$$|\mathbf{v}|_{2+\alpha,\bar\Omega} + |\nabla p|_{\alpha,\bar\Omega} \leqslant C_{10}|\mathbf{w}|_{2+\alpha,[0,l]} \tag{5.2}$$

где C_{10} не зависит от $f, \mathbf{w}$, если $|f|_{3+\alpha} \leqslant \delta$, $|\mathbf{w}|_{2+\alpha} \leqslant \varepsilon$.

Доказательство леммы 5.1 не приводится. Оно основано на шаудеровских оценках решений эллиптических систем [12, 14] и использовании рассуждений п. 4.

Далее исследуем непрерывную зависимость решения вспомогательной задачи от f, т. е. от границы Γ области Ω. Для этого перейдем к новым независимым переменным ξ, η по формулам

$$\xi = x_1, \quad \eta = \frac{x_2 - f(x_1)}{1 + f(x_1)}$$

Область Ω при этом переходит в прямоугольник $\Pi = \{\xi, \eta : 0 < \xi < l,\ -1 < \eta < 0\}$. Система (1.1) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} - \frac{2(1+\eta)f'}{1+f}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1+(1+\eta)^2 f'^2}{(1+f)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \\
+ \left\{\frac{(1+\eta)[2f'^2 - (1+f)f'']}{(1+f)^2} + \frac{(1+\eta)f'u}{1+f} - \frac{v}{1+f}\right\}\frac{\partial u}{\partial\eta} - \\
- u\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{\partial q}{\partial\xi} + \frac{(1+\eta)f'}{1+f}\frac{\partial q}{\partial\eta} = 0 \\
\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2} - \frac{2(1+\eta)f'}{1+f}\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1+(1+\eta)^2 f'^2}{(1+f)^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2} + \\
+ \left\{\frac{(1+\eta)[2f'^2 - (1+f)f'']}{(1+f)^2} + \frac{(1+\eta)f'u}{1+f} - \frac{v}{1+f}\right\}\frac{\partial v}{\partial\eta} - u\frac{\partial v}{\partial\xi} - \frac{1}{1+f}\frac{\partial q}{\partial\eta} = 0 \\
\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{(1+\eta)f'}{1+f}\frac{\partial u}{\partial\eta} + \frac{1}{1+f}\frac{\partial v}{\partial\eta} = 0
\end{gathered} \tag{5.3}$$

где

$$u(\xi, \eta) = v_1(x_1, x_2),\ v(\xi, \eta) = v_2(x_1, x_2),\ q(\xi, \eta) = p(x_1, x_2),$$

$$f(x_1) = f(\xi),\ f' = df / d\xi$$

Краевые условия (1.2), (1.3) и (1.6) порождают следующие краевые условия для системы (5.3):

$$u(\xi + l, \eta) \equiv u(\xi, \eta), \quad v(\xi + l, \eta) \equiv v(\xi, \eta), \quad q(\xi + l, \eta) \equiv q(\xi, \eta)$$

$$u = w_1(\xi), \quad v = w_2(\xi) \text{ при } \eta = -1 \tag{5.4}$$

$$-2f'\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1+f'^2}{1+f}\frac{\partial u}{\partial \eta} + (1 - f'^2)\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{f'(1+f'^2)}{1+f}\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0,$$

$$f'u - v = 0 \text{ при } \eta = 0$$

Теперь дело сводится к изучению непрерывной зависимости решения краевой задачи (5.3), (5.4) в фиксированной области от коэффициентов уравнений и краевых условий. Обозначим через $u^{(i)}$, $v^{(i)}$, $q^{(i)}$ $(i = 1,2)$ решение задачи (5.3), (5.4) с $f = f_i(\xi) \in C^{3+\alpha}[0, l]$.

Лемма 5.2. Если $|f_i|_{3+\alpha} \leqslant \delta < 1$, $i = 1,2$, и $|w|_{2+\alpha} \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то справедлива оценка

$$|u^{(1)} - u^{(2)}|_{2+\alpha, \bar{\pi}} + |v^{(1)} - v^{(2)}|_{2+\alpha, \bar{\pi}} + |\nabla(q^{(1)} - q^{(2)})|_{\alpha, \bar{\pi}} \leqslant$$
$$\leqslant C_{11} |\mathbf{w}|_{2+\alpha, [0,l]} |f_1 - f_2|_{3+\alpha, [0,l]} \tag{5.5}$$

Поясним лишь ход доказательства, а само доказательство приводить не будем ввиду его громоздкости. Обозначим

$$u^* = u^{(1)} - u^{(2)},\ v^* = v^{(1)} - v^{(2)},\ q^* = q^{(1)} - q^{(2)}$$

Исходя из (5.3), (5.4), получаем для u^*, v^*, q^* систему линейных уравнений с линейными краевыми условиями. Правые части этих уравнений и краевых условий представляют собой суммы произведений функций $u^{(1)}$, $v^{(1)}$, $q^{(1)}$ или их производных на коэффициенты, содержащие множители вида $d^k(f_1 - f_2)/d\xi^k$, $k = 0,1,2$. Например, последнее из условий (5.4) приводит к условию $f_2' u^* - v^* = -(f_1 - f_2)' u^{(1)}$.

Полученная линейная система для u^*, v^*, q^* будет эллиптической по Даглису — Ниренбергу, поскольку ее главная часть — это преобразованная к новым независимым переменным система Стокса, а при таком преобразовании свойство эллиптичности сохраняется [13]. Краевая задача для нее удовлетворяет условию дополнительности, так как этому условию удовлетворяла исходная задача. Важно отметить, что при малых ε полученная задача имеет единственное решение. (По существу, это следует из теоремы 3.2 о единственности решения вспомогательной задачи при малых $|\mathbf{w}|_{2+\alpha}$.) Это дает возможность получить шаудеровские априорные оценки u^*, v^*, q^* непосредственно в терминах правых частей уравнений и краевых условий.

Пользуясь результатами [12, 14], нетрудно установить следующие неравенства:

$$|u^*|_{2+\alpha, \bar{\Pi}} + |v^*|_{2+\alpha, \bar{\Pi}} + |\nabla q^*|_{\alpha, \bar{\Pi}} \leqslant C_{12} |f_1 - f_2|_{3+\alpha, [0,l]} \times$$
$$\times (|u^{(1)}|_{2+\alpha, \bar{\Pi}} + |u^{(1)}|^2_{2+\alpha, \bar{\Pi}} + |v^{(1)}|_{2+\alpha, \bar{\Pi}} + |v^{(1)}|^2_{2+\alpha, \bar{\Pi}} + |\nabla q^{(1)}|_{\alpha, \bar{\Pi}})$$

Поскольку отображение $(x_1, x_2) \to (\xi, \eta)$ принадлежит классу $C^{3+\alpha}$, то $u^{(i)}, v^{(i)} \in C^{2+\alpha}(\overline{\Pi})$ $(i = 1,2)$, $\nabla q \in C^{\alpha}(\overline{\Pi})$ и

$$|u^{(i)}|_{2+\alpha,\overline{\Pi}} + |v^{(i)}|_{2+\alpha,\overline{\Pi}} + |\nabla q^{(i)}|_{\alpha,\overline{\Pi}} \leqslant C_{13}(|\mathbf{v}^{(i)}|_{2+\alpha,\overline{\Omega}} + |\nabla p^{(i)}|_{\alpha,\overline{\Omega}})$$

Из последних двух неравенств и неравенства (5.2) получается требуемая оценка (5.5).

Лемма 5.3. Пусть выполнены условия леммы 5.2. Тогда $\mathscr{B}(f) \in C^{1+\alpha}[0, l]$ и имеет место оценка

$$|\mathscr{B}(f_1) - \mathscr{B}(f_2)|_{1+\alpha,[0,l]} \leqslant C_{14}|\mathbf{w}|_{2+\alpha,[0,l]}|f_1 - f_2|_{3+\alpha,[0,l]} \tag{5.6}$$

Доказательство основано на переходе к переменным ξ, η и последующем применении леммы 5.2. Вычисляя в этих переменных выражение $\mathbf{n}\cdot T/_\Gamma\cdot\mathbf{n}$, получаем

$$\mathscr{B}[f(\xi)] = \Big[-(1+f'^2)q + 2f'^2\frac{\partial u}{\partial \xi} - \tag{5.7}$$

$$-\frac{2f'(1+f'^2)}{1+f}\frac{\partial u}{\partial \eta} - 2f'\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{2(1+f'^2)}{1+f}\frac{\partial v}{\partial \eta}\Big] \quad \text{при } \eta = 0$$

Как уже отмечалось, $u, v \in C^{2+\alpha}(\overline{\pi})$, $q \in C^{1+\alpha}(\overline{\pi})$. Поэтому $\mathscr{B}(f) \in C^{1+\alpha}[0, l]$. Находя в силу (5.7) разность $\mathscr{B}(f_1) - \mathscr{B}(f_2)$ и пользуясь оценкой (5.5), получаем желаемое неравенство (5.6).

6. Определение формы свободной поверхности. Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 6.1. Пусть функция $\mathbf{w}(x_1)$ удовлетворяет условиям п. 1 и $|\mathbf{w}|_{2+\alpha}$, $[0, l] \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Тогда существует решение задачи со свободной границей (1.1)—(1.6), такое что $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $p \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$, $f \in C^{3+\alpha}[0,l]$. Это решение единственно в некоторой окрестности нуля произведения пространств

$$\mathbf{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{3+\alpha}[0, l].$$

Доказательство. В условиях теоремы существует решение вспомогательной задачи $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $p \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$. При этом $\mathbf{v}$ определено однозначно для малых ε, а p определяется с точностью до постоянного слагаемого p_0. Определим из решения вспомогательной задачи $\mathbf{n}\cdot T|_\Gamma\cdot\mathbf{n}$ как функцию $x_1 = \xi$ и подставим результат в условие (1.4). Пользуясь обозначением (5.1), где $\mathscr{B}(f)$ уже определено однозначно, запишем (1.4) в виде

$$\left(\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\right)' = \mu\mathscr{B}(f) - \mu p_0 \tag{6.1}$$

Для существования l-периодического решения $f(\xi)$ уравнения (6.1) необходимо, чтобы среднее значение правой части (6.1) на интервале $[0, l]$ равнялось нулю. Отсюда находим $p_0 = \overline{\mathscr{B}(f)}$, где $\overline{\mathscr{B}(f)}$ есть среднее значение функции $\mathscr{B}[f(\xi)]$. Теперь уже и давление в решении вспомогательной задачи определено однозначно. Теорема 6.1 будет доказана, если удастся найти l-периодическое решение $f \in C^{3+\alpha}[0,l]$ с $\bar{f} = 0$ и показать, что это решение единственно, если $|f|_{3+\alpha}$ достаточно мало.

Пусть $\varepsilon_1 > 0$ настолько мало, что при $|\mathbf{w}|_{2+\alpha} \leqslant \varepsilon_1$ выполнено неравенство (5.6) и, кроме того,

$$\mu \max_{\xi \in [0, l]} \left| \int_0^\xi \{\mathcal{B}[f(\tau)] - \overline{\mathcal{B}(f)}\} d\tau \right| \leqslant \beta < 1$$

для любой $f \in C^{3+\alpha}$ $[0, l]$, такой что $|f|_{3+\alpha} \leqslant \delta$ и $\delta < 1$ фиксировано. Такой выбор ε_1 возможен (при фиксированном μ) в силу леммы 5. 1 и определения $\mathcal{B}(f)$. Тогда уравнение (6.1) после двукратного интегрирования преобразуется к виду $f = \mathcal{F}(f)$, где

$$\mathcal{F}(f) = \int_0^\xi \mu \int_0^\sigma \{\mathcal{B}[f(\tau)] - \overline{\mathcal{B}(f)}\} d\tau \times$$

$$\times \left[1 - \left(\mu \int_0^\sigma \{\mathcal{B}[f(\tau)] - \overline{\mathcal{B}(f)}\} d\tau\right)^2\right]^{-1/2} d\sigma - f_0 \qquad (6.2)$$

а f_0 — постоянная, равная среднему значению на $[0, l]$ первого слагаемого в правой части (6.2). Обозначим через N подпространство пространства $C^{3+\alpha}(-\infty, \infty)$, образованное l-периодическими функциями с нулевыми средними значениями за период. Из определения $\mathcal{F}$ и леммы 5.3 следует, что $\mathcal{F}(f) \in N$, если $f \in K_\delta$, где K_δ — шар $|f|_{3+\alpha} \leqslant \delta < 1$ пространства N, и

$$|\mathcal{F}(f)|_{3+\alpha} \leqslant C_{15} |\mathbf{w}|_{2+\alpha}$$

где C_{15} не зависит от $\mathbf{w}$, если $|\mathbf{w}|_{2+\alpha} \leqslant \varepsilon_1$. Пусть $\varepsilon_2 = \min(\varepsilon_1, C_{15}^{-1}\delta)$, тогда при $|\mathbf{w}|_{2+\alpha} \leqslant \varepsilon_2$ операция $\mathcal{F}(f)$ будет отображать шар K_δ в себя. Из определения (6.2) оператора $\mathcal{F}$ и неравенства (5.6) вытекает оценка

$$|\mathcal{F}(f_1) - \mathcal{F}(f_2)|_{3+\alpha} \leqslant C_{16} |\mathbf{w}|_{2+\alpha} |f_1 - f_2|_{3+\alpha} \qquad (6.3)$$

для любых $f_1, f_2 \in K_\delta$. Положим теперь $\varepsilon = \min(\varepsilon_2, C_{16}^{-1}\beta)$, где $\beta > 0$ — любое число, меньшее единицы. На основании (6.3) можно заключить, что при $|w|_{2+\alpha} \leqslant \varepsilon$ непрерывная операция $\mathcal{F}(f)$ будет сжимающей в шаре K_δ и, следовательно, уравнение $f = \mathcal{F}(f)$ имеет в этом шаре единственное решение. Теорема доказана.

7. О других стационарных задачах со свободной границей для уравнений Навье — Стокса. Аналогичным способом могут быть исследованы и другие плоские стационарные задачи для уравнений Навье — Стокса в предположении, что свободная граница не имеет точек контакта с граничными твердыми поверхностями. В качестве примера приведем задачу об установившихся периодических волнах в тяжелой жидкости над наклонным периодическим дном. Доказывается, что если дно достаточно гладкое, а угол его наклона к горизонтальной плоскости достаточно мал, то решение однозначно определяется заданием расхода или средней глубины жидкости.

Еще один пример дает задача о стационарном движении жидкости в кольцевом зазоре между вращающейся твердой цилиндрической поверхностью и свободной границей, на которой задано давление как функция полярного угла. Доказывается, что если эта функция близка к константе, то решение задачи определяется заданием площади криволинейного кольца, занятого жидкостью. В этом случае движение не обязательно медленное; однако оно должно быть близким к вращению жидкости как твердого тела.

Изложенный выше подход к исследованию плоских задач со свободной границей позволяет рассмотреть и некоторые трехмерные задачи. Типичным примером является задача о двоякопериодическом течении в слое, верхняя граница которого свободна, а нижняя есть твердая плоскость с периодически расположенными на ней участками втекания и вытекания. Здесь справедливы трехмерные аналоги теорем 3.1, 3.2 о существовании и единственности обобщенного решения вспомогательной задачи. Если предположить, что это решение имеет непрерывные по Гельдеру вторые производные вплоть до свободной границы, то удается получить результаты, аналогичные леммам и теореме п. 4,5. На заключительном этапе вместо уравнения 6.1 приходится решать уравнение типа уравнения минимальных поверхностей с нелокальным оператором в правой части. Считая заданную на дне скорость достаточно малой и принимая сделанное выше предположение о решении вспомогательной задачи, можно показать, что двоякопериодическая свободная поверхность однозначно определяется в малом заданием средней глубины жидкости.

В заключение автор благодарит Р. М. Гарипова и В. Х. Изаксона за предоставленную возможность ознакомиться с результатами их неопубликованных работ.

Поступила 22 II 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Л а д ы ж е н с к а я О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1970.
2. Г а р и п о в Р. М. О медленных установившихся движениях капиллярной жидкости. III Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике (Аннот. докл.). М., «Наука», 1966.
3. Щ е р б и н а Г. В. О форме свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости. Сб. научн. тр. физ.-техн. ин-та низких температур АН УССР, 1969, вып. 1.
4. С м и р н о в В. И. Курс высшей математики, т. 5. М., Физматгиз, 1959.
5. М и х л и н С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
6. F r i e d r i c h s K. O. On the boundary-value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality. Ann. Math., 1947, vol. 48, No. 2.
7. Э й д у с Д. М. О смешанной задаче теории упругости. Докл. АН СССР, 1951, т. 76, № 2.
8. Э й д у с Д. М. Контактная задача теории упругости. Матем. сб., 1954, т. 34, № 3.
9. H o p f E. Ein allgemeiner Endlichkeitssatz der Hydrodinamik. Math. Ann., 1941, Bd 117, H. 5.
10. F u j i t a H. On the existence and regularity of the steady—state solutions of the Navier — Stokes equations. J. Faculty Sci. Univ. Tokyo, 1961, vol. 9, No. 1.
11. D o u g l i s A., N i r e n b e r g L. Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations. Communs. Pure and Appl. Math., 1955, vol. 8, No. 4.
12. A g m o n S., D o u g l i s A., N i r e n b e r g L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, II. Communs. Pure and Appl. Math., 1964, vol. 17, No. 1.
13. С о л о н н и к о в В. А. Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса — Л. Ниренберга, I. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1964, т. 28, № 3.
14. С о л о н н и к о в В. А. Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса — Д. Ниренберга, II. Тр. Матем. ин-та АН СССР. им. В. А. Стеклова, 1966, т. 92.
15. S c h e c h t e r M. General boundary value problems for elliptic partial differential equations. Communs. Pure and Appl. Math., 1959, vol. 12, No. 3. (Рус. перев.: Общие граничные задачи для эллиптических уравнений в частных производных. Сб. «Математика», 1960, т. 4, № 5.)