

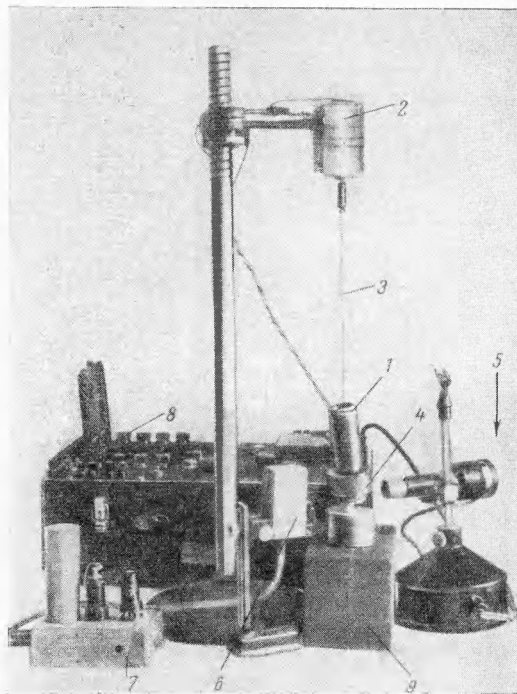
**ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ  
УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ВОЛЧКА, ВНУТРИ КОТОРОГО  
ИМЕЕТСЯ ПОЛОСТЬ, НАПОЛНЕННАЯ ЖИДКОСТЬЮ**

*С. В. Малащенко, М. Е. Темченко*

(Киев)

В течение ряда лет совместными усилиями институтов математики и строительной механики АН УССР разрабатывались вопросы, связанные с изучением устойчивости движения тел, в частности с жидким наполнением. Для экспериментальных исследований и проверки критериев устойчивости движения, полученных теоретическим путем, был использован разработанный ранее в физико-технической лаборатории Института строительной механики АН УССР струнный привод. Он позволил осуществить вращение исследуемой модели вокруг главной оси инерции с большой угловой скоростью (порядка 10000—15000 об./мин. и выше).

1°. Изучение устойчивости движения волчков осуществлялось на установке, приведенной на фиг. 1; схематическое изображение ее показано на фиг. 2.



Фиг. 1

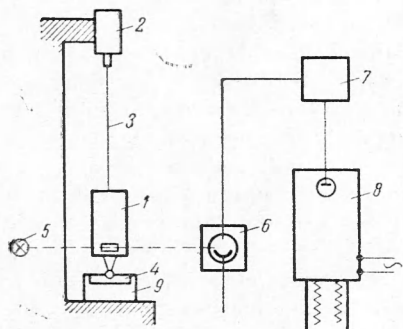
К оси вертикально поставленного мотора 2 при помощи стальной струны 3 (диаметром 0,25 мм, длиной 200—250 мм) крепится модель 1, которая располагается так, чтобы максимальное расстояние ее от опоры не превышало одного-двух миллиметров. В проведенных исследованиях модель, схематически изображенная на фиг. 3, представляет собой закрытый сверху цилиндр 1 с навинченным на него массивным кольцом 2. Снизу к цилиндру 1 прикреплена строго центрированная «ножка» 3, оканчивающаяся стальным шариком 4 (от шарикоподшипника). В нижней части цилиндра 1 вблизи «ножки» имеются два симметрично расположенных отверстия 5. При помощи этих отверстий осуществляется точное измерение числа оборотов вращения модели на опоре,

что производится бесконтактным методом при помощи осветителя 5, фотоэлемента 6, усилителя 7 и осциллографа 8 (фиг. 1 и 2).

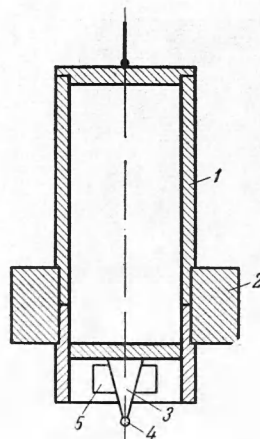
В поисках опоры, на которой возможно было осуществить вращение описанной выше модели, проводились многочисленные экспериментальные исследования. При этом были испробованы опоры, изготовленные из различных материалов, и имеющие различную форму (схематическое

изображение некоторых из них показано на фиг. 4). В результате анализа проведенных экспериментов опора была выбрана плоской (см. 5 на фиг. 4) и изготовленной из бука. При изготовлении опоры необходимо, чтобы волокна древесины, из которой изготавливается опора, были перпендикулярными к ее рабочей плоскости.

Опора крепилась к массивной стальной плите 9 (фиг. 1), которая играла роль основания. Рабочая поверхность опоры была строго горизонтальной, что перед началом каждого опыта проверялось при помощи уровня.



Фиг. 2



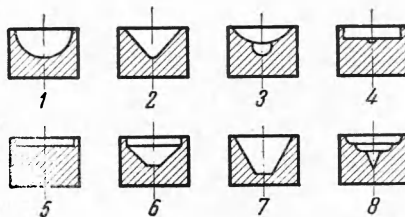
Фиг. 3

2°. Опыт производится следующим образом<sup>1</sup>: модель 1 (фиг. 1 и фиг. 2) при помощи мотора раскручивалась на струне; при этом ей сообщалось число оборотов, заведомо выше критического. При достижении необходимого числа оборотов приводная струна 3 обрывается на ходу вблизи модели, в результате чего последняя свободно падала на опору. Достигнув опоры, модель некоторое время по ней перемещалась, далее перемещение ее прекращалось, и дальнейшее движение ее было аналогично движению «спящего» волчка.

С течением времени число оборотов модели постепенно уменьшалось. При определенном числе оборотов ось собственного вращения волчка начинала отклоняться от вертикали, что можно было заметить визуально. При этом угол между осью собственного вращения и вертикалью увеличивался, «ножка» модели начинала перемещаться по опоре и в конце модель, быстро теряя устойчивость, опрокидывалась.

В процессе проведения опытов число оборотов вращения модели  $\omega$  в момент начала образования острого угла между осью собственного вращения модели и вертикалью считалось равным критическому  $\omega_c$  и сравнивалось с результатами теоретических исследований. Как показали проведенные эксперименты, момент появления упомянутого острого угла определялся при помощи непосредственных визуальных наблюдений с достаточной для практики точностью (см. табл. 1 и 2).

Значение критических чисел оборотов определялось путем обработки осциллографической записи, где одновременно записывались координаты времени в виде синусоиды переменного тока от сети 50 гц и импульсы тока от усилителя, обусловленные изменением освещенности фотоэлемен-

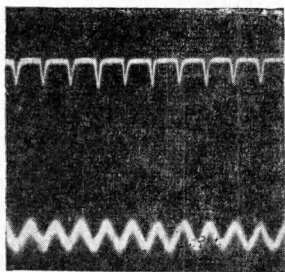


Фиг. 4

<sup>1</sup> В изготовлении установки и проведении экспериментов принимали участие сотрудники физико-технической лаборатории Института строительной механики АН УССР Э. В. Вирт и А. П. Польвиная.

та при вращении модели. Запись, образец которой представлен на фиг. 5, обрабатывалась при помощи проекционного устройства, при этом точность определения числа оборотов вращения модели в проведенных опытах соответствовала точности поддержания частоты в сети промышленного тока, то есть была порядка 0.1—0.2%.

3°. Первая серия опытов была посвящена определению критического числа оборотов для двух моделей без наполнения, схематическое изображение которых приведено на фиг. 3. Заметим при этом, что одна модель от другой в рассматриваемом случае отличалась только размерами и весом дополнительного кольца 2 (рис. 3).



Фиг. 5

Вес первой модели  $M_1g = 600$  г, осевой момент инерции  $C = 3.08$  г см сек<sup>2</sup>, момент инерции относительно оси, перпендикулярной оси симметрии модели и проходящей через неподвижную ее точку,  $A = 22$  г см сек<sup>2</sup>, расстояние от центра тяжести до неподвижной точки модели  $a = 4.9$  см. Вес второй модели  $M_2g = 702.2$  г;  $A = 28.07$  г см сек<sup>2</sup>,  $C = 3.5$  г см сек<sup>2</sup>,  $a = 5.25$  см.

Результаты экспериментального определения критического числа оборотов  $\omega_*^{(1)}$  и  $\omega_*^{(2)}$  для первой и второй моделей приведены в табл. 1.

Таблица 1

№ опыта	$\omega_*^{(1)}$ об./мин.	$\omega_*^{(2)}$ об./мин.	№ опыта	$\omega_*^{(1)}$ об./мин.	$\omega_*^{(2)}$ об./мин.	№ опыта	$\omega_*^{(1)}$ об./мин.	$\omega_*^{(2)}$ об./мин.
1	1575	1745	6	1575	1745	11	1575	1740
2	1575	1800	7	1575	1740	12	1550	1745
3	1575	1720	8	1725	1725	13	1575	1720
4	1575	1745	9	1530	1760	14	1600	1700
5	1620	1750	10	1575	1750	15	1575	1745

4°. На описанной выше установке было проведено также экспериментальное определение критического числа оборотов для модели, внутри которой имеется полость, наполненная жидкостью. Если во внутреннюю часть модели, изображенной на фиг. 3, вставлять вкладыши — дополнительные цилиндры, внутри которых имеются полости, вообще говоря, различной формы, то получится один из образцов модели, устойчивость движения которой и определялась в проведенной серии опытов. Ниже приводятся результаты определения критического числа оборотов модели, внутри которой имеется полость в форме эллипсоида вращения. На фиг. 6 приведено схематическое изображение такой модели, а на фиг. 7 представлены составные ее части<sup>1</sup>.

В рассматриваемом случае вкладыш состоит из двух частей (см. фиг. 7), которые герметически закрываются, образуя эллипсоидальную полость. В верхней части вкладыша имеется отверстие, через которое внутрь полости вводится жидкость перед началом опыта. В проведенных опытах в качестве наполнения была использована маловязкая жидкость (спирт-ректификат).

Определение критического числа оборотов проводилось аналогично тому, как это было сделано для модели без наполнения.

<sup>1</sup> На фигуре 8 представлен другой образец модели, исследование устойчивости движения которой изучалось в проведенной серии опытов. Эта модель представляет собой цилиндр из плексигласа, внутри которого имеется полость в форме эллипсоида вращения, наполненная жидкостью. К верхней и нижней частям цилиндра прикреплены массивные кольца. В нижней части цилиндра имеется «ножка», оканчивающаяся шариком. Заметим только, что опора, на которой осуществлялось вращение этой модели, несколько отличалась по размерам от описанной в п. 2°.

Параметры, характеризующие модель, следующие: вес модели без наполнения  $M_1g = 940$  г; вес жидкости в полости модели  $M_2g = 30$  г;

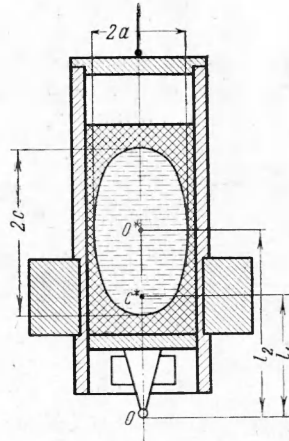
$$A^* = A_1 + M_1l_1^2 + M_2l_2^2 = 34.8 \text{ г см сек}^2$$

причем  $A_1$  — момент инерции оболочки (модели без жидкости в ее полости) относительно оси, проходящей через ее центр тяжести — точку  $C^*$  (фиг. 6);  $C$  — осевой момент инерции оболочки, равный по величине  $5.26 \text{ г см сек}^2$ ;  $l_1$  — расстояние от центра тяжести оболочки модели до неподвижной точки  $O$  (фиг. 6), равное по величине  $4.9 \text{ см}$ ;  $l_2 = 6.65 \text{ см}$  — расстояние от центра эллипсоидальной полости до точки  $O$ . Полуоси эллипсоидальной полости модели равны соответственно  $a = 1.6 \text{ см}$ ,  $c = 2.75 \text{ см}$ . Удельный вес жидкости в данном случае  $\gamma = 0.8 \text{ г/см}^3$ .

Результаты экспериментального определения критического числа оборотов  $\omega_*$  представлены в табл. 2.

В двух последних колонках этой таблицы приведены критические значения угловой скорости для этой же модели, но без наполнения.

Для описанной модели при наличии в ее полости жидкости и без нее была проведена также серия опытов с регистрацией числа оборотов вращения модели с течением времени вплоть до критического. Результаты этих опытов приведены на фиг. 9; здесь кривая 1 характеризует изменение числа оборотов вращающейся модели без наполнения; кривая 2 — изменение числа оборотов вращающейся модели с жидким наполнением эллипсоидальной формы. При этом каждая точка кривых 1 и 2 представляет собой среднее значение нескольких опытов.



Фиг. 6

Таблица 2

№ опыта	$\omega_*$ об./мин	№ опыта	$\omega_*$ об./мин.	№ опыта	$\omega_*$ об./мин.	№ опыта	$\omega_*$ об./мин.
1	1740	6	1500	11	1425	1 и 2	1350
2	1440	7	1440	12	1440	3 и 4	1380
3	1440	8	1500	13	1425	5	1260
4	1650	9	1425	14	1350	6	1425
5	1875	10	1425	15	1350	сред. 1358	

5°. Для сопоставления полученных экспериментальных данных с результатами теоретических исследований для упомянутых выше моделей были использованы критерии устойчивости, полученные в работах [1,2]. Для волчка с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной идеальной жидкостью, условие устойчивости [1,2], имеет вид

$$4b_0v^3 - [b^* - 27b_0^2b_3^2] v^2 - [b_2(b_1^2 + b^*) - 4b_1^3b_3] v - b_2^2 [b_1^2 - 4b_0b_2] < 0 \quad (5.1)$$

где

$$b^* = b_1^2 + 18b_0b_1b_3 - 12b_0b_2, \quad v = (M_1l_1 + M_2l_2) \frac{g}{\omega^2}$$

$$b_0 = A^* + k^*\eta^*, \quad A^* = A_1 + M_1l_1^2 + M_2l_2^2, \quad k^* = \frac{4}{15} \pi \rho a^2 c (c^2 - a^2) \quad (5.2)$$

$$b_1 = C + [A^* + k^*] \eta^*, \quad b_2 = (C - k^*) \eta^* + k^*, \quad b_3 = \eta^*, \quad \eta^* = \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2}$$

Здесь  $\rho$  — удельная плотность жидкости в полости волчка,  $\omega$  — угловая скорость собственного его вращения.

Если жидкость внутри полости волчка отсутствует, то условие устойчивости (5.1) при учете равенств (5.2) сводится к известному условию

устойчивости твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, именно,

$$C^2\omega^2 > 4M_1g(A_1 + M_1l_1^2)l_1 \quad (5.3)$$

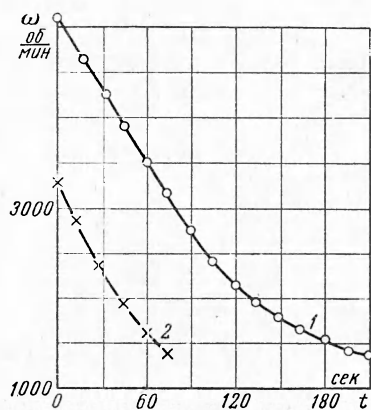
6°. Среднее значение критического числа оборотов  $\omega_*$  вращения для первой модели (согласно табл. 1) без наполнения равно 1585 об./мин., значение  $\omega_*$ , вычисленное согласно критерию



Фиг. 7

(5.3), равно 1580 об./мин. Для второй модели среднее значение критического числа оборотов  $\omega_*$ , согласно табл. 1, равно 1740 об./мин.; вычисленное согласно (5.3) значение  $\omega_*$  для этой модели равно 1755 об./мин.

Для волчка, эллипсоидальная полость которого целиком наполнена идеальной жидкостью, среднее критическое число оборотов  $\omega_*$  по данным



Фиг. 9

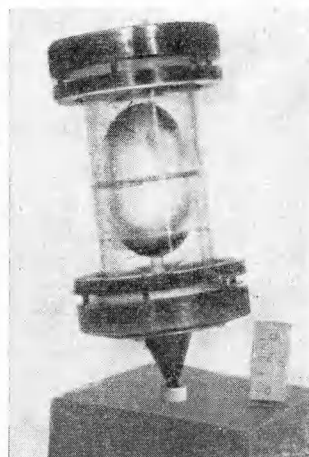
табл. 2 равно 1495 об./мин.; значение  $\omega_*$  для этой же модели, вычисленное согласно критерию (5.1), оказалось равным 1480 об./мин. Таким образом, на основании изложенных результатов экспериментальных исследований можем сделать вывод о том, что для моделей без наполнения данные теоретических и экспериментальных исследований достаточно удовлетворительно совпадают друг с другом. Расхождение в определении критических значений угловых скоростей экспериментальным путем от опыта к опыту не превышает 10%.

Наличие жидкости в эллипсоидальной полости модели оказывает существенное влияние на поведение ее при вращении. Визуальные наблюдения за поведением моделей с наполнением показали, что при вращении ось собственного вращения модели совершает быстрое прецессионное движение. В связи с этим не представляется возможным точно уловить момент потери устойчивости при помощи непосредственных наблюдений. Поэтому повторяемость результатов определения критического числа оборотов в этом случае значительно хуже, чем для моделей без наполнения. Тем не менее, среднее значение критического числа оборотов для модели с жидким наполнением вполне удовлетворительно согласуется с критическим числом оборотов, вычисленным теоретическим путем.

Поступила 12 V 1960

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С о б о л е в С. Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью. ПМТФ, 1960, № 3.
2. И ш л и н с к и й А. Ю., Т е м ч е н к о М. Е. О малых колебаниях вертикальной оси волчка, имеющего полость, целиком наполненную идеальной несжимаемой жидкостью. (Печатается в этом же журнале.)



Фиг. 8