

3. Салтанов Г. А. Неравновесные и нестационарные процессы в газодинамике. М.: Наука, 1979.
4. Чирихин А. В. Энтропийная корреляция скачков конденсации в гиперзвуковых соплах.— ПМТФ, 1976, № 2.
5. Чирихин А. В. Метод расчета переохлаждения потока водяного пара в сверхзвуковом сопле.— ТВТ, 1980, № 1.
6. Чирихин А. В. К расчету переохлаждения и спонтанной конденсации азота в гиперзвуковых соплах.— ТВТ, 1976, № 5.
7. Уилмерз У., Нагамацу Х. Конденсация азота в гиперзвуковых соплах.— Сб. пер. Механика, 1953, № 5.
8. Faro I., Small T. R., Hill F. K. The supersaturation of nitrogen in a hypersonic wind tunnel.— J. Appl. Phys., 1952, vol. 23, N 1.
9. Королев А. С. Получение и исследование в импульсной аэродинамической трубе гиперзвуковых течений углекислого газа.— Труды ЦАГИ, 1975, вып. 1943.
10. Vas I. E., Koppenwallner G. The Princeton University high pressure hypersonic nitrogen tunnel N 3. Princeton University, 1964, Rep. 690.
11. Pierce T., Sherman P. M., McBride D. D. Condensation of argon in a supersonic stream.— Astronautica Acta, 1971, vol. 76, p. 1.
12. Williams W. D., Lewis J. W. L. Experimental study of condensation scaling laws for reservoir and nozzle parameters and gas species. AIAA Paper, N 76—53, 1976.
13. Салтанов Г. А. Сверхзвуковые двухфазные течения: Минск: Высшая школа, 1972.
14. Binnie A. M., Green J. R., Phill B. E. D. An electrical detector of condensation in high-velocity steam.— Proceedings of the Royal Society, 1943, Ser. A, vol. 181, p. 134.
15. Barschdorff D. Verlauf der Zustandsgrößen und gasdynamische Zusammenhänge bei der spontanen Kondensation reinen Wasserdampfer in Lavaldüsen.— Forschung Ing.— Wes., 1971, Bd 37, N 5.
16. Gyarmathy G., Meyer H. Spontane Kondensation. VDI-Forschungsheft 508, 1965.
17. Вегенер П. П., Мак А. М. Конденсация в сверхзвуковых и гиперзвуковых аэродинамических трубах.— В сб.: Проблемы механики. Ч. III. М.: ИЛ, 1961.
18. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972.
19. Агафонов В. П., Вертушкин В. К., Гладков А. А., Полянский О. Ю. Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике. М.: Машиностроение, 1972.

УДК 532.529

## УСТОЙЧИВОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ФАЗ В ТЕЧЕНИЯХ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД

О. В. Воинов, А. Г. Петров

(Москва)

Рассматривается устойчивость однородных состояний двухфазной среды по отношению к малым возмущениям (проблема корректности задачи Коши для уравнений двухфазных сред). Показано, что учет влияния диффузии частиц (пузырьков), вызванной относительным движением фаз, имеет принципиальное значение. Давление в дисперсной фазе оказывается второстепенным фактором. Найдена критическая кривая потери устойчивости.

Проблема устойчивости двухфазных сред рассматривалась во многих работах [1—5]. Существующие теории дают коротковолновую неустойчивость оседающих суспензий, взвешенных слоев и слоев жидкости с пузырьками. Эта неустойчивость должна приводить к быстрому появлению неоднородностей внутри среды и к практической невозможности реализации однородного состояния. Однако в противоречие с теорией в опытах бывают явно устойчивые состояния [4]. Устойчивость жидкости с пузырьками получена только в работах [6, 7]. В [6] устойчивость обеспечивалась за счет действия электрических сил. В задаче термокапиллярного движения в газожидкостной смеси устойчивость в коротковолновой области получена за счет диффузии пузырьков [7].

1. Уравнения и метод решения. Уравнения изменения импульса и сохранения массы двухфазной среды имеют вид [1]

$$(1.1) \quad \varepsilon \rho d\mathbf{v}/dt = \varepsilon \rho \mathbf{g} - \Delta p - \operatorname{div} \mathbf{P}_1 - c\mathbf{F}, \quad \rho_s du/dt = \rho_s \mathbf{g} - (1/c)\operatorname{div} \mathbf{P}_s + \mathbf{F};$$

$$(1.2) \quad \partial c/\partial t + \operatorname{div} c\mathbf{u} = 0, \quad \partial \varepsilon/\partial t + \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{v} = 0, \quad c + \varepsilon = 1,$$

где  $\rho$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\rho_c$ ,  $c$ ,  $\mathbf{u}$  — плотности, объемные концентрации и скорости соответственно несущей и дисперсной фаз;  $\mathbf{g}$  — ускорение силы тяжести. Сила взаимодействия фаз  $\mathbf{F}$  зависит, в частности, от относительной скорости фаз  $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ . Дисперсные частицы считаются сферическими одного радиуса  $R$ .

При малых числах Рейнольдса ( $Re = wR/v$ ) сила взаимодействия фаз с учетом эффекта диффузии частиц [8] имеет вид

$$(1.3) \quad \mathbf{F} = -\rho\mathbf{g}' + \mathbf{F}^*, \quad \mathbf{F}^* = \mathbf{F}_0^* + \mathbf{F}_1^*, \\ \bar{\mathbf{F}}_0^* = -\frac{\mu G}{R^2} \mathbf{w}, \quad \bar{\mathbf{F}}_1^* = -\frac{\mu}{R^2} \frac{\partial G w}{\partial w} c^{-1} \mathbf{D} \nabla c,$$

где  $\rho\mathbf{g}'$  — эффективная выталкивающая сила,  $\mathbf{g}' = \mathbf{g} - d\mathbf{v}/dt$ ;  $\mathbf{F}_0^*$  — сила вязкого сопротивления;  $\mathbf{F}_1^*$  — малый вклад за счет диффузии;  $G$  — безразмерное число;  $\mathbf{D}$  — тензор диффузии:

$$(1.4) \quad D_{ij} = R|w|(f_{\perp} \delta_{ij} + (f - f_{\perp})w_i w_j / w^2).$$

Давление в среде частиц определяется тензором

$$(1.5) \quad (P_s)_{ij} = \rho_s w^2 S_{\perp} \delta_{ij} + \rho_s (S - S_{\perp}) w_i w_j.$$

При конечном числе Рейнольдса коэффициент  $G$  в (1.3) зависит от  $Re$  и связан с коэффициентом сопротивления  $C_w = G/Re$ . В этом случае необходимо учесть эффект присоединенных масс, который, следуя [1], запишем в модельной форме

$$(1.6) \quad \mathbf{F}_m = (1/2)\rho(d\mathbf{v}/dt - d\mathbf{u}/dt).$$

Следует учесть также эффект пульсаций ускорения жидкости

$$(1.7) \quad \Sigma_{ij} = \rho w^2 \sigma_{\perp} \delta_{ij} + \rho w_i w_j (\sigma - \sigma_{\perp}),$$

тогда сила  $\mathbf{F}$  примет вид

$$(1.8) \quad \mathbf{F} = -\rho\mathbf{g}' + \mathbf{F}_0^* + \mathbf{F}_1^* + \mathbf{F}_m + \text{div} \Sigma, \\ \mathbf{F}_1^* = \partial \mathbf{F}_0^* / \partial w_k c^{-1} (\mathbf{D} \nabla c)_k.$$

По повторяющимся индексам в (1.8) подразумевается суммирование. Входящие в уравнения (1.3)—(1.8) безразмерные величины  $G$ ,  $f$ ,  $S$ ,  $\sigma$  в общем случае зависят от  $\varepsilon$ ,  $Re$ ,  $Fr$ . Число Фруда  $Fr = w/\sqrt{Rg}$ .

В пределе малых чисел Фруда тензор  $\mathbf{D}$  отличен от нуля, а вклады в уравнения давления  $\mathbf{P}_s$  (1.5) и  $\Sigma$  (1.7) пренебрежимо малы:

$$(1.9) \quad \mathbf{D} \neq 0, \quad \mathbf{P}_s = 0, \quad \Sigma = 0 \quad \text{при } Fr = 0.$$

В пределе больших чисел Фруда, что возможно при  $\rho_s \gg \rho$ , вклады в уравнения давления  $\mathbf{P}_s$ ,  $\Sigma$ , а также тензора диффузии обращаются в нуль [8]:

$$(1.10) \quad S, \Sigma \sim 1/Fr^2, \quad f \sim 1/Fr \quad \text{при } Fr \rightarrow \infty.$$

Это объясняется ослаблением хаотических движений при  $Fr \gg 1$ .

Отметим, что при малых числах Рейнольдса ( $Re \ll 1$ ) в разреженной системе ( $c \ll 1$ ) по порядку величины  $S \sim c^{5/3}$ ,  $f \sim 1$ . При  $Re \ll 1$  всегда можно пренебречь  $\Sigma$  и  $\mathbf{F}_m$  в выражении для силы (1.8) и будет справедливо (1.3).

Задача состоит в определении устойчивости однородного решения уравнений (1.1) со значениями давления в среде частиц (1.5) и межфазной силы (1.3) или (1.8):

$$(1.11) \quad c = 1 - \varepsilon = \text{const}, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{w} = \text{const } \mathbf{e}, \quad \mathbf{u} = 0, \quad p = -(\varepsilon\rho + c\rho_s)gz.$$

Здесь  $z$  — координата вдоль направления ускорения силы тяжести  $\mathbf{e}$ . Скорость  $\mathbf{w}$  в однородном состоянии определяется формулами

$$(1.12) \quad G\mathbf{w} = -(\rho_s - \rho)gR^2/\mu, \quad C_w |\mathbf{w}| \mathbf{w} = (\rho_s/\rho - 1) gR.$$

В силу этого число Фруда равно

$$(1.13) \quad Fr^2 = |(\rho_s/\rho - 1)(Re/G)| = |\rho_s/\rho - 1| C_w^{-1}.$$

При  $Re \gg 1$  коэффициент сопротивления  $C_w$  слабо зависит от  $Re$ , поэтому, как видно из (1.13), вместо  $Fr$  удобно ввести другой безразмерный параметр  $\chi = \rho_s/\rho$ .

Метод решения задачи устойчивости однородного состояния (1.11) следует строить, учитывая асимптотический смысл уравнений (1.1), (1.5), (1.3) или (1.8), основанных на существовании двух малых параметров:

$$(1.14) \quad \alpha = (R/wT)Fr^2 \ll 1, \quad \beta = (R/L)Fr^2 \ll 1.$$

Эти неравенства не являются сильными ограничениями, так как подход сплошной среды пригоден только для достаточно больших масштабов длины  $L \gg R$  и времени  $T \gg R/w$ . Поэтому задачу устойчивости естественно решать методом итераций. Уравнения однородного состояния (1.12) будут главным приближением, из которого, в частности, получится главное приближение по малым  $\alpha$  и  $\beta$  для уравнений малых возмущений. Градиентные члены войдут в это уравнение как малые поправки в следующем приближении.

**2. Волны концентрации при малых числах Рейнольдса и Фруда.** Если число  $Fr \ll 1$ , то в силу (1.14) разность ускорений фаз пренебрежимо мала,  $dv/dt \approx du/dt$  и можно пренебречь в уравнениях малых возмущений вкладом возмущений ускорений фаз. Принимая во внимание (1.9), а также, что при  $Re \ll 1$ ,  $Fr \ll 1$   $G(\epsilon, Re, Fr) \approx G(\epsilon, 0, 0)$ , из (1.3), (1.1) получим  $(\rho_s - \rho)g - G(w + c^{-1}D\nabla c) = 0$ , откуда для малых возмущений

$$(2.1) \quad w\epsilon' \partial \ln G/\partial \epsilon + w' + c^{-1}D\nabla c' = 0.$$

Здесь и далее штрихом обозначены малые возмущения соответствующих параметров. Умножая уравнения неразрывности (1.2) соответственно на  $-\epsilon$  и  $c$ , а затем складывая их, получим для малых возмущений

$$(2.2) \quad \partial \epsilon'/\partial t - cw\nabla \epsilon' - \epsilon c \operatorname{div} w' = 0.$$

Определяя  $\operatorname{div} w'$  из (2.1) и подставляя в (2.2), имеем уравнение для малых возмущений

$$(2.3) \quad \partial \epsilon'/\partial t - c\theta(w\nabla)\epsilon' = \kappa_{\perp} \Delta_{\perp} \epsilon' + \kappa \partial^2 \epsilon'/\partial z^2, \quad \theta = 1 - (\epsilon/G)dG/d\epsilon, \\ \kappa = \epsilon R|w|f, \quad \kappa_{\perp} = \epsilon R|w|f_{\perp},$$

где  $\Delta_{\perp}$  — оператор Лапласа в плоскости, ортогональной невозмущенному значению относительной скорости  $w$ ; коэффициенты  $f$  и  $f_{\perp}$  зависят от  $c$ ;  $\kappa = \epsilon D$  ( $D$  — коэффициент диффузии);  $\theta \approx 5$  в силу известной эмпирической зависимости [8, 9].

Уравнение (2.3) есть уравнение конвективной диффузии возмущений концентрации частиц с учетом анизотропии коэффициента диффузии. Главной является левая часть уравнения, описывающая движение возмущений со скоростью  $-c\theta w$ .

Возмущения длиной порядка  $\lambda$  за время прохождения расстояния  $\sim \lambda$  расплываются на малую величину  $\Delta z \sim \sqrt{R\lambda}$ . Возмущение концентрации заметно расплывается на характерных расстояниях  $L \sim \lambda^2/R$ . Очевидно, на большом масштабе  $L$  успевают отрелаксировать только коротковолновые возмущения длиной  $\lambda < \sqrt{LR}$ .

Как видно, при малых числах Фруда двухфазная среда устойчива. Этот вывод находится в согласии с опытами по оседанию суспензий мелких частиц в жидкостях [9], данные которых соответствуют малым значениям  $Fr^2 \sim 10^{-2} - 10^{-4}$ . В этих опытах действительно наблюдались только устойчивые состояния среды.

**3. Устойчивость двухфазной среды при конечных числах Фруда и Рейнольдса.** Рассмотрим одномерную задачу динамики малых возмуще-

ний однородного состояния (1.11). Линеаризация уравнений (1.1), (1.8) дает

$$(3.1) \quad \frac{\mu}{R^2} \delta(Gw) = \frac{\mu}{R} \frac{\partial Gw}{\partial w} \frac{|w|}{c} f \frac{\partial \varepsilon'}{\partial z} - \left( \rho_s + \frac{\rho}{2} \right) \frac{\partial u'}{\partial t} + \\ + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial z} \delta[(\rho\sigma - \rho_s S) w^2] + \frac{3}{2} \rho \left( \frac{\partial v'}{\partial t} - w \frac{\partial v'}{\partial z} \right), \\ \delta = \varepsilon' \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \bar{w}' \frac{\partial}{\partial w}, \quad \delta(G\bar{w}') = \frac{\partial Gw}{\partial w} \left( \bar{w}' - \frac{\theta - 1}{\varepsilon} w \varepsilon' \right).$$

Левая часть (3.1) является главным приближением по малым параметрам  $\alpha$  и  $\beta$  (1.14). В этом приближении  $\delta(Gw) = 0$ , откуда следует

$$(3.2) \quad w' = \frac{\theta - 1}{\varepsilon} w \varepsilon', \quad \theta = 1 - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} \left( \frac{\partial Gw}{\partial w} \right)^{-1}.$$

Из (3.2) находим  $\partial w'/\partial z$  и подставляем ее в (2.2). Тогда в главном приближении получим уравнение

$$(3.3) \quad \partial \varepsilon' / \partial t - c \theta w \partial \varepsilon' / \partial z = 0.$$

Чтобы получить уравнение (3.3) в следующем по малым  $\alpha$  и  $\beta$  приближении, необходимо в этом приближении выразить  $\partial w'/\partial z$  через  $\varepsilon'$ . Для этого выражаем  $u'$  и  $v'$  в (3.1) через  $\varepsilon'$  и  $w'$  при помощи интеграла для одномерных уравнений неразрывности:  $u' = \varepsilon' w$ ,  $v' = -w' + \varepsilon' w$ . Возмущение  $w'$  из правой части (3.1) можно исключить, выразив при помощи (3.2)  $w'$  через  $\varepsilon'$  и ее производные. Производную по времени от  $\varepsilon'$  можно выразить через производную по  $z$  при помощи (3.3). Таким образом, из (3.1) находим с точностью до членов второго порядка малости по  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\theta - 1}{\varepsilon} w \frac{\partial \varepsilon'}{\partial z} + \frac{\kappa}{\varepsilon c} \frac{\partial^2 \varepsilon'}{\partial z^2}.$$

Подставляя это выражение в (2.2), получим с той же точностью уравнение для  $\varepsilon'$

$$(3.4) \quad \frac{\partial \varepsilon'}{\partial t} - c \theta w \frac{\partial \varepsilon'}{\partial z} = \kappa \frac{\partial^2 \varepsilon'}{\partial z^2};$$

$$(3.5) \quad \kappa = \varepsilon R |w| \left[ f - \frac{F \Gamma^2}{|1 - \rho/\rho_s|} a (c^2 \theta^2 + S^* + H + H_m) \right], \\ a = G (\partial Gw / \partial w)^{-1}, \quad S^* = \left( \frac{1}{w^2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \frac{\theta - 1}{\varepsilon w} \frac{\partial}{\partial w} \right) \left[ w^2 \left( S - \frac{\hat{c}}{\rho_s} \sigma \right) \right], \\ H = \frac{\rho}{\rho_s} \frac{c}{\varepsilon} (1 - c\theta)^2, \quad H_m = \frac{\hat{c}}{\rho_s} \frac{\hat{c}}{2c} [(1 - c\theta)^2 + c\varepsilon \theta^2].$$

Слагаемое  $f$  в (3.5) обусловлено диффузией частиц с тензором диффузии  $D \sim R|w|f$ ; слагаемое, содержащее  $c^2 \theta^2$ , — инерционной силой  $\rho_s du/dt$ ;  $S^*$  — давлением частиц  $P_s$  и тензором  $\Sigma$  в силе  $\mathbf{F}$ . Наконец, слагаемые в (3.5), пропорциональные  $H$  и  $H_m$ , вызваны соответственно эффективной выталкивающей силой  $-\rho g'$  и силой  $\mathbf{F}_m$ , описывающей эффект присоединенных масс.

При  $\kappa \geq 0$  задача Коши для уравнения (3.5) корректна, система устойчива. Динамика возмущений аналогична разобранный в п. 2. Если  $\kappa < 0$ , то система неустойчива. Задача Коши некорректна. Быстрее всего нарастают возмущения с наименьшей длиной волны. Причем для любого макроскопического масштаба  $L$  можно указать такую длину  $\lambda \ll L$  (но  $\lambda \gg \bar{R}$ ), что возмущения масштаба  $\lambda$  успевают сильно вырасти по амплитуде до того, как будут вынесены из системы со скоростью  $-c\theta w$ .

Существенно, что эффект неустойчивости при  $\rho_s \gg \rho$ , как видно из (3.5), может быть замечен только в достаточно концентрированных системах, так как инкремент пропорционален  $c^2$ .

Вид коэффициента  $\kappa$  (3.5) позволяет сделать важные выводы.

1. Устойчивость может обеспечиваться только за счет диффузии частиц и наличия давления дисперсной фазы  $P_s$  и эффекта пульсаций эффективной выталкивающей силы  $\Sigma$ . Причем диффузионный эффект всегда способствует устойчивости ( $f > 0$ ), а давление и пульсации нестационарной силы взаимодействия могут приводить и к неустойчивости, так как знак  $S^*$  в (3.5) может быть различным. Возможна ситуация, когда в одной области концентраций указанные эффекты стабилизируют систему ( $S^* < 0$ ), а в другой области, наоборот, способствуют неустойчивости ( $S^* > 0$ ).

2. Роль давления дисперсной фазы незначительна при  $Re \ll 1$  и сравнимых плотностях фаз  $\rho_s \sim \rho$ . Устойчивость системы ( $\kappa > 0$ ) при этом объясняется только механизмом диффузии частиц.

3. Система всегда неустойчива при больших числах Фруда  $Fr \gg 1$ , так как в соответствии с (1.10) коэффициенты  $f$ ,  $S^* \rightarrow 0$ ,  $Fr \rightarrow \infty$ . При  $Fr \rightarrow \infty$  всегда отношение плотностей  $\rho_s/\rho \rightarrow \infty$ .

4. Существует критическая кривая потери устойчивости  $Fr = Fr^0(Re, \epsilon)$  или  $\rho_s/\rho = \chi^0(Re, \epsilon)$ , так как коэффициент  $\kappa$  (3.5) есть функция от  $Fr$ ,  $Re$ ,  $\epsilon$  или эквивалентных переменных  $\rho_s/\rho$ ,  $Re$ ,  $\epsilon$ . При  $Fr > Fr^0$  или  $\rho_s/\rho > \chi^0$  система неустойчива.

5. Потеря устойчивости происходит при конечных значениях числа Фруда  $Fr^0 \sim 1$ . При этом точность метода описания двухфазных сред, предложенного в [8], не отличается от точности подхода сплошной среды, как видно из условий (1.14). В области  $Fr \rightarrow \infty$ , где метод работы [8] теряет точность, устойчивых однородных состояний двухфазных сред не существует. Разрушение однородных состояний при  $Fr \gg 1$  происходит в коротковолновой области за малое время  $\tau \sim (R/w)(\epsilon c \theta Fr)^{-2}$ , если  $\epsilon c \theta Fr < 1$ , и за время  $\tau \sim R/w$ , если выполнено обратное.

4. Пределы малых и больших чисел Рейнольдса. При  $Re \ll 1$  коэффициент  $\kappa$  в (3.4) равен

$$(4.1) \quad \kappa = (f - Fr^2(c^2\theta^2 + S^*))\epsilon R|w|, \quad Fr^2 = (Re/G)\rho_s/\rho,$$

причем  $S^*$  зависит только от давления дисперсной фазы. Слагаемое с  $Fr^2$  в (4.1) существенно только при  $\rho_s \gg \rho$ . Величины  $f$ ,  $S^*$  зависят только от  $Fr$  и  $\epsilon$ , поэтому условие  $\kappa = 0$  определяет кривую устойчивости

$$(4.2) \quad Fr = Fr^0(\epsilon).$$

В силу (1.9), (1.10) при  $Fr \ll 1$  среда устойчива, а при  $Fr \gg 1$  — неустойчива. Необходимо подчеркнуть, что в рассматриваемом предельном случае граница устойчивости не зависит от отношения плотностей  $\rho_s/\rho$ .

При больших значениях числа Рейнольдса  $Re \gg 1$  в формуле (3.5) коэффициент  $a = 2$  и коэффициенты  $S$ ,  $\sigma$ ,  $\theta$  очень слабо зависят от числа Рейнольдса. Поэтому должна существовать предельная кривая устойчивости

$$(4.3) \quad Fr = Fr^0(\epsilon) \text{ или } \rho_s/\rho = \chi^0(\epsilon) \text{ при } Re \gg 1.$$

Первая формула (4.3) по виду совпадает с (4.2), а вторая форма записи пригодна только при больших числах Рейнольдса.

Эффект давления  $P_s$  в дисперсной фазе, видимо, играет малую роль по сравнению с диффузией не только при  $Re \ll 1$ , но и в случае  $Re \gg 1$ . На это указывают данные опытов [10] по однородному псевдооживлению жидкостью при числах  $Re \sim 100$ . Обработка этих данных показывает, что в диапазоне  $\epsilon = 0,53 - 0,7$  коэффициенты в формуле для давления  $P_s$  (1.5) весьма малы:  $S \approx 0,01$ ,  $S_{\perp} \approx 0,005$ . Коэффициенты  $\sigma$  и  $\sigma_{\perp}$  в тензоре  $\Sigma$ , входящем в  $F$ , при этом имеют значения, видимо, на порядок большие, чем  $S$  и  $S_{\perp}$ .

5. Сопоставление теории с экспериментами. Полученные результаты позволяют объяснить существенные черты осаждения суспензий, динамики взвешенных слоев и слоев жидкости с пузырьками. Взвешенный слой

образуется, если достаточно велика скорость восходящего потока газа или жидкости через неподвижный слой твердых частиц. При возрастании скорости жидкости происходит расширение взвешенного слоя.

В экспериментах и на практике [4] наблюдают как однородное состояние взвешенных слоев, так и существенно неоднородное состояние. Последнее характерно тем, что, несмотря на самый равномерный и однородный ввод газа в слой в его нижнем сечении (например, через тонкопористую металлическую плиту [4]), внутри слоя самопроизвольно генерируются крупномасштабные неоднородности. Естественно интерпретировать неоднородное состояние взвешенного слоя, в котором имеются большие неравномерности концентрации частиц, как результат развития неустойчивости однородного состояния.

Теория устойчивости относительного движения фаз впервые позволяет объяснить следующие экспериментальные закономерности существования однородных и неоднородных состояний взвешенных слоев.

1. При конечных числах Рейнольдса ( $Re \geq 1$ ) для твердых частиц, взвешенных в газе, реализуются только неоднородные состояния, а устойчивое однородное состояние не наблюдается [4]. Теоретически это объясняется тем, что выполнено условие неустойчивости, так как при большой плотности частиц число Фруда  $Fr \gg 1$ .

2. При конечных числах Рейнольдса ( $Re \geq 1$ ) однородное состояние взвешенного слоя наблюдается только для близких плотностей фаз  $\rho_s \lesssim \rho$  [4, 10].

3. Увеличение плотности частиц или уменьшение вязкости несущей среды ( $Re < 1$ ) всегда способствует неоднородности псевдооживления. В частности, при псевдооживлении жидкостями однородное состояние наблюдается гораздо чаще, чем в случае псевдооживления газами [4]. Теоретически это объясняется тем, что с ростом плотности  $\rho$  или уменьшением вязкости  $Fr$  возрастает и приближается к критическому значению  $Fr^0$ .

4. Увеличение размера частиц  $R$ , взвешенных в потоке, на опыте способствует появлению неоднородностей [4]. Это также объясняется увеличением числа Фруда.

5. Во многих экспериментах (см., например, [4, 11]), начиная с опытов [12], замечено, что при больших значениях параметра  $j^2/(gd) \gg 1$  ( $j$  — скорость газа через единичное сечение слоя,  $d$  — диаметр частиц) реализуется исключительно неоднородное состояние взвешенного слоя. До сих пор этот эмпирический факт был не ясен. Попытки его объяснения с привлечением некорректных соображений о всплывании пузырей радиусом порядка размера частиц [11] неудовлетворительны.

Правильное объяснение указанного эмпирического факта состоит в том, что при больших значениях числа Фруда  $Fr \gg 1$  ( $Fr^2 = 2(1 - c)^{-2} \times j^2/(gd)$ ) гетерогенная сплошная среда теряет устойчивость в коротковолновой области и перестает быть макроскопически однородной.

В экспериментальных работах [13—16] измерялись критические параметры перехода однородного состояния слоя взвешенных в потоке газа твердых частиц к неоднородному состоянию. Такой переход фиксировался при определенной скорости газового потока, когда относительно резко на поверхности слоя отмечались всплески и высота слоя начинала резко падать с ростом скорости.

Анализ экспериментальных данных [13—16] с позиций развитой выше теории устойчивости представлен на фигуре. Результаты опытов даны в координатах  $Fr$ ,  $\epsilon = 1 - c$ . Точки 1, 2 соответствуют работе [13], точки 3—5 — работам [14—16]. Как видно, экспериментальные результаты хорошо соответствуют существованию единой кривой устойчивости (4.2). Все приведенные результаты, кроме [16], соответствуют частицам узкой фракции. Значительная часть точек относится к существенно несферическим частицам, что является источником некоторого разброса точек. Данные опытов [16] не выходят за пределы устойчивости, и поэтому точки 5 на фигуре лежат внутри области устойчивых состояний.

Следует отметить, что в опытах с широкими фракциями получаются отличающиеся кривые устойчивости  $Fr^0(c)$ , поскольку устойчивость, естественно, зависит от функции распределения частиц по размерам. Однако характерные значения числа  $Fr^0$ , при котором теряется устойчивость, во всех опытах имеют порядок 1.

На фигуре представлены также результаты обработки данных по осаждению суспензий [9]. Линия  $F$  соответствует осаждению стеклянных шариков диаметром 0,01 см в воде, линия  $E$  — осаждению частиц со средним диаметром 0,0096, плотностью  $\rho_s = 1,88 \text{ г/см}^3$  в жидкости плотности  $\rho \approx 1 \text{ г/см}^3$  и вязкости  $\mu \approx 0,01 \text{ г/см}\cdot\text{с}$ . Как видно, устойчивое оседание суспензий происходит в области  $Fr < Fr^0$  в полном согласии с теорией.

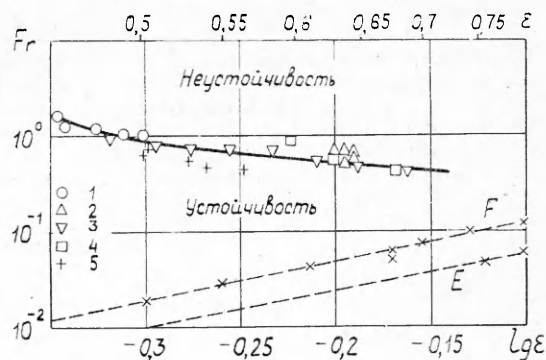
Для жидкости со всплывающими пузырьками построенная теория указывает на возможность устойчивых однородных состояний, так как всегда  $Fr \leq 1$ . При малых числах Рейнольдса слой жидкости с пузырьками всегда устойчив, как следует из п. 2, 3. При конечных числах Рейнольдса жидкость с пузырьками соответствует наиболее устойчивой ситуации  $\rho_s/\rho = 0$ . Известно, что даже при  $\rho_s > \rho$  существуют устойчивые однородные состояния [4, 10]. Однородные в среднем состояния концентрированных систем всплывающих пузырьков наблюдались в экспериментах [17, 18].

В заключение отметим, что существование двухфазной среды как однородной сплошной среды обеспечено хаотическими движениями, обусловленными гидродинамическим взаимодействием. Вся теория устойчивости целиком содержится в рамках применимости метода описания двухфазной среды с учетом хаотических движений, развитого в [8].

Поступила 19 VI 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
2. Murray J. D. On the mathematics of fluidization. Pt 1.— J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, p. 465.
3. Полянский В. А., Рождественская М. С. Исследование устойчивости взвешенных слоев.— В сб.: IV Всесоюз. съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Киев: Наукова думка, 1976.
4. Дэвидсон И. Ф., Харрисон Д. Псевдооживление. М.: Химия, 1974.
5. Ван Вейнгарден Л. Некоторые проблемы составления уравнений для газожидкостных течений.— В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Труды XIV Международного конгресса IUTAM. М.: Мир, 1979.
6. Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошникова Г. А. Диффузионная и многоскоростная модели двухфазных сред в электрическом поле.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 2.
7. Воинов О. В., Пухначев В. В. Термокапиллярное движение в газожидкостной смеси.— ПМТФ, 1980, № 5.
8. Воинов О. В., Петров А. Г. Физическая модель и уравнения движения двухфазной среды с учетом хаотических движений частиц (пузырьков).— ПМТФ, 1981, № 6.
9. Maude A. D., Whitmore R. L. A generalized theory of sedimentation.— Brit. J. Appl. Phys., 1958, vol. 9, N 12.
10. Carlos C. R., Richardson J. F. Solids movement in liquid fluidized beds — I. Particle velocity distribution. Chem. Eng. Sci., 1968, vol. 23, p. 813.
11. Уоллис Г. Одномерные двухфазные течения. М.: Мир, 1972.
12. Wilhelm V. H., Kwauk M. Fluidization of solid particle.— Chem. Eng. Progr., 1948, vol. 44, N 3.
13. Geldart D. Comment to «Application of mechanical stress theory to fluidization. Rietema K.» — In: Proc. of the Int. Symp. on Fluidization, 1967. Eindhoven Amsterdam: Netherl. Univ. Press, 1967.
14. De Jong J. A. H., Nomden J. F. Homogeneous gas-solid fluidization.— Powder Technology, 1974, vol. 9, pt 2/3.



15. Massimilla L., Donsi G., Zucchini C. The structure of bubble-free gas fluidized beds of fine fluid cracking catalyst particles.— Chem. Eng. Sci., 1972, vol. 27, p. 2005.
16. Полянский В. А. Экспериментальное исследование влияния свойств взвешивающей среды на поведение частиц в псевдооживленных слоях. Отчет № 2063. М.: изд. Ин-та механики МГУ, 1978.
17. Бурдуков А. П., Валукина Н. В., Накоряков В. Е. Особенности течения газожидкостной пузырьковой смеси при малых числах Рейнольдса.— ПМТФ, 1975, № 4.
18. Бурдуков А. П., Козьменко Б. К., Накоряков В. Е. Распределение профилей скорости жидкой фазы в газожидкостном потоке при малых газосодержаниях.— ПМТФ, 1975, № 6.

УДК 533.6

## К ВОПРОСУ О ЗАПУСКЕ ПЛОСКИХ СОПЕЛ УДАРНЫХ ТРУБ

А. Б. Британ, В. Л. Григоренко

(Москва)

В последнее время многочисленные исследования посвящены изучению распространения ударных волн в каналах переменного сечения. Строгое описание всех деталей такого течения отсутствует, поэтому каждое исследование проводится на основе выбранной упрощенной модели. В частности, для анализа процессов, связанных с запуском сопел ударных труб, широко используются модели течения, учитывающие прохождение по соплу первичной ударной волны, контактной поверхности, вторичной ударной волны и нестационарной волны разрежения [1]. Такие модели позволяют определить траектории движения ударных волн, которые в ряде случаев [1—4] совпадают с экспериментальными, хотя в расчетах не учитываются эффекты вязкости газа и двумерности течения. Наиболее сильно указанные эффекты проявляются в сверхзвуковой части сопла, вблизи его стенок, когда вторичная ударная волна взаимодействует с пограничным слоем, вызывая отрыв потока [1, 5, 6]. В настоящее время нет ясного представления о том, как влияет отрыв потока на параметры течения и продолжительность запуска, измеренную через боковые стенки плоского сопла. Возможности расчетных методов в данном случае ограничены из-за отсутствия критериев отрыва в нестационарном потоке и разброса данных по отрыву в стационарных потоках [1]. Не выяснена также связь между процессами отрыва потока от расходящихся и от параллельных стенок сопла. Отметим, что при оптической визуализации течения [1, 5] отчетливо проявляется отрыв потока от расходящихся стенок, но не регистрируются эффекты на параллельных стенках из-за малой оптической толщины неоднородностей. В то же время схемы измерения оптического усиления более чувствительны к эффектам на параллельных стенках сопла, поскольку через эти стенки поток зондируется лазерным излучением [7]. Ясно, что в данном случае одновременное измерение коэффициента усиления в нескольких точках вдоль оси в принципе позволяет определить продолжительность запуска в различных сечениях сопла и восстановить траектории движения по соплу ударных волн и точки отрыва потока от боковых, параллельных стенок сопла. Однако сложный характер течения за фронтом первичной ударной волны усложняет подробную интерпретацию полученных сигналов, и обычно удается надежно выделить только основные закономерности, отвечающие началу и окончанию процесса запуска. Согласно [7], постоянный уровень усиления (поглощения) зондирующего излучения устанавливается только после прохождения по соплу зоны отрыва потока, поэтому в результате измерений можно восстановить траекторию ее движения по соплу. Подобное исследование проведено в данной работе, причем экспериментальные результаты сравниваются с волновой картиной процесса запуска, полученной из расчета. Результаты такого сравнения позволяют судить о величине погрешности расчетного определения продолжительности запуска в том случае, когда в расчетах не учитываются эффекты, связанные с отрывом потока.

1. В экспериментах использовалось плоское клиновидное сопло с прямолинейными образующими, с углом раствора  $\alpha = 30^\circ$  и высотой критического сечения  $h^* = 2$  мм. Сопло имело длину  $l = 120$  мм и радиус скругления дозвуковой части  $r = 4$  мм.

Излучением  $\text{CO}_2$ -лазера поток зондировался одновременно в трех сечениях, расположенных на расстоянии 28; 49 и 70 мм от критического сечения сопла. В этих же сечениях в боковой, параллельной потоку стенке сопла устанавливались пленочные датчики — термометры сопротивления из платины, нанесенной методом вакуумного напыления на подложку из стекла. Сопротивление каждого датчика составляло около 40 Ом, они включались в мостовую схему, и через усилитель с полосой пропускания