## ЛИТЕРАТУРА

1. **Kulik P. P., Melnikov V. M., Riabii V. A., Titov M. A.** The electrical conductivity of dense, highly non-ideal cesium plasma.— In: Proc. XI Intern. Conf. on Phenom. in Ionized Gases. Prague, 1973.
2. **Куликов И. С.** Термодинамическая диссоциация соединений. М.: Металлургия, 1969.
3. **Белов С. П., Демидов М. И. и др.** Обратимая непрозрачность оптического кварца, возникающая при контакте с плотной плазмой.— ЖПС, 1969, т. 10, № 3.
4. **Кузнецова Н. И., Лаппо Г. Б.** Оптические свойства плазмы щелочных металлов лития, натрия и калия.— ТВТ, 1979, т. 17, № 1.
5. **Физика** и техника низкотемпературной плазмы/Под ред. С. В. Дресвина. М.: Атомиздат, 1972.
6. **Заруди М. Е.** Методы расчета характеристик дуги в канале.— ТВТ, 1968, т. 6, № 1.
7. **Сон Э. Е., Павлов Г. А.** К исследованию электропроводности слабонеидеальной плазмы на ударной трубе.— ТВТ, 1971, т. 9, № 5.


---

УДК 532.592 + 532.62

# НЕЙТРАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ, ВТЕКАЮЩЕЙ ПО ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКЕ В ДРУГУЮ ЖИДКОСТЬ

*С. М. Беседин, О. Ю. Цвелодуб*

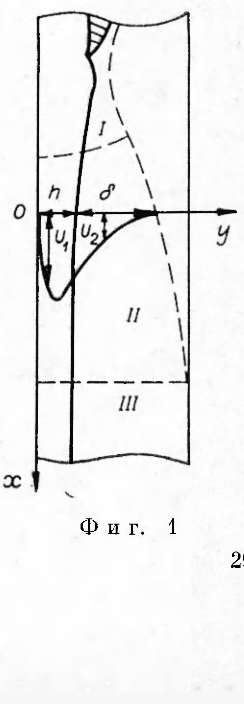
(*Новосибирск*)

Пленка жидкости, стекающая по вертикальной или наклонной поверхности в окружении другой жидкости, встречается в некоторых видах экстракционного оборудования и при электрошлаковой плавке металлов. Поэтому рассматриваемое течение интересно с практической точки зрения. С другой стороны, пленка жидкости, граничащая с другой жидкостью, интересна с теоретической точки зрения как пример течения, при котором на поверхностные волны в тонком слое жидкости оказывает влияние течение во внешней среде.

При втекании пленки жидкости вдоль наклонной или вертикальной стенки в другую жидкость можно выделить три области течения (фиг. 1). В области входного участка *I* течение определяется в основном условиями на входе и представляет собой пристенную струю. В области начального участка *II* условия на входе уже не влияют на течение, а пограничный слой, развивающийся во внешней жидкости, еще не достиг стенки канала. В области *III* течение является установившимся, не зависящим от $x$.

Линейная устойчивость рассматриваемого течения в области *III* исследовалась в ряде работ [1—4], где показано, что в области *III*, как и в случае свободной пленки жидкости [5], неустойчивость течения связана с развитием волн на поверхности раздела. Критическое число Рейнольдса $\mathrm{Re}_*$ равно нулю при течении в вертикальном канале и отлично от нуля в наклонном. Устойчивость течения в области начального участка *II* в этих работах не исследовалась. Однако, как показано в [6, 7], пограничный слой между двумя потоками влияет на устойчивость течения.

Данная работа посвящена исследованию линейной устойчивости течения в области начального участка *II*. Рассматривается случай, когда жидкости несмешивающиеся, течение изотермическое, а внешняя жидкость неподвижна на бесконечности.




Фиг. 1

Как часто делается при анализе устойчивости течений погранслойного типа [6—8], будем считать, что невозмущенное течение не зависит от продольной координаты $x$, а пограничный слой во внешней жидкости имеет конечную толщину $\delta_p$. Экспериментальные исследования [9] показывают, что в области *II*, когда величина $\delta_p$ превышает толщину пленки жидкости $h_p$, величина $h_p$ слабо зависит от $x$. Поэтому в случае $\delta_p > h_p$ невозмущенный профиль скорости в пленке жидкости можно аппроксимировать нуссельтовским [10], а в пограничном слое — профилем Польгаузена [8], соответствующим безградиентному обтеканию пластины. В безразмерном виде, где за масштабы длины и скорости выбраны средняя толщина пленки жидкости $h_0$ и среднерасходная скорость течения в ней $U_0$, невозмущенный профиль скорости, удовлетворяющий условиям непрерывности скорости и касательных напряжений на поверхности раздела, имеет вид

$$U_1(y) = 3\left[\left(1 + \frac{\tau}{6+\tau}\right)y - \left(1 + \frac{3\tau}{6+\tau}\right)\frac{y^2}{2}\right], \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{1}$$

$$U_2(y) = \frac{9}{6+\tau}\left(1 + \frac{y-1}{\delta}\right)\left(\frac{1+\delta-y}{\delta}\right)^3, \quad 1 \leqslant y \leqslant 1+\delta,$$

$$U_3(y) = 0, \quad 1+\delta \leqslant y < \infty, \quad \tau = 3\mu/\delta.$$

В этом случае для средней толщины пленки жидкости имеем

$$h_0 = \sqrt[3]{\frac{3\,\mathrm{Re}\,\nu_1^2}{g(1-\rho)}\left(1 + \frac{3\tau}{6+\tau}\right)}. \tag{2}$$

Здесь $\rho = \rho_2/\rho_1$, $\mu = \mu_2/\mu_1$ — относительные плотность и динамическая вязкость соответственно (при обозначении физических свойств индекс 1 относится к жидкости, образующей пленку, 2 — к внешней жидкости); $\mathrm{Re} = h_0 U_0/\nu_1$ — расходное число Рейнольдса.

При исследовании устойчивости рассматриваемого течения относительно бесконечно малых возмущений все возмущенные величины будем искать в виде

$$A(x, y, t) = A_0(y) \exp\left[i\alpha(x - c_* t)\right], \tag{3}$$

где $\alpha$, $c_* = c + i\eta$ — волновое число и комплексная фазовая скорость соответственно.

Пренебрегая нелинейными членами в уравнениях движения жидкости и используя (3), получаем для амплитуд функций тока $\varphi_i(y)$ возмущающего течения уравнения Орра—Зоммерфельда:

$$\varphi_1^{\mathrm{IV}} - [i\alpha\,\mathrm{Re}\,(U_1 - c_*) + 2\alpha^2]\,\varphi_1'' + [i\alpha\,\mathrm{Re}\,(\alpha^2(U_1 - c_*) + U_1'') + \alpha^4]\,\varphi_1 = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1; \tag{4}$$

$$\varphi_2^{\mathrm{IV}} - \left[i\alpha\frac{\mathrm{Re}}{\nu}(U_2 - c_*) + 2\alpha^2\right]\varphi_2'' + \left[i\alpha\frac{\mathrm{Re}}{\nu}(\alpha^2(U_2 - c_*) + U_2'') + \alpha^4\right]\varphi_2 = 0, \quad 1 \leqslant y \leqslant 1+\delta; \tag{5}$$

$$\varphi_3^{\mathrm{IV}} - \left[-i\alpha\frac{\mathrm{Re}}{\nu}c_* + 2\alpha^2\right]\varphi_3'' + \left[-i\alpha\frac{\mathrm{Re}}{\nu}\alpha^2 c_* + \alpha^4\right]\varphi_3 = 0, \quad 1+\delta \leqslant y < \infty. \tag{6}$$

Граничные условия прилипания на стенке, непрерывности скорости и напряжений на поверхности пленки жидкости и внешней границы пограничного слоя, а также затухания возмущений на бесконечности можно, используя кинематическое условие на поверхности раздела, записать в виде

$$y = 0:\ \varphi_1 = 0,\ \varphi_1' = 0; \tag{7}$$

$$y = 1:\ U_1'\varphi_1 + (c_* - U_1)\varphi_1' = U_2'\varphi_2 + (c_* - U_2)\varphi_2', \quad \varphi_1 = \varphi_2, \tag{8}$$

$$U_1''\varphi_1 + (c_* - U_1)(\varphi_1'' + \alpha^2\varphi_1) = \mu\left[U_2'\varphi_2 + (c_* - U_2)(\varphi_2'' + \alpha^2\varphi_2)\right],$$

$$(c_* - U_1)\left[(c_* - U_1)\varphi_1' + U_1'\varphi_1\right] - \frac{i}{\alpha\,\mathrm{Re}}\left[(\varphi_1''' - 3\alpha^2\varphi_1')(c_* - U_1) - 2\alpha^2\varphi_1 U_1'\right] - \alpha^2\varphi_1\mathrm{We} = \rho(c_* - U_2)\left[(c_* - U_2)\varphi_2' + U_2'\varphi_2\right] - \frac{i\mu}{\alpha\,\mathrm{Re}}\left[(\varphi_2''' - 3\alpha^2\varphi_2')(c_* - U_2) - 2\alpha^2\varphi_2 U_2'\right];$$

$$y = 1+\delta:\ \varphi_2 = \varphi_3,\quad \varphi_2' = \varphi_3',\quad \varphi_2'' = \varphi_3'',\quad \varphi_2''' = \varphi_3'''; \tag{9}$$

$$y \to \infty:\ \varphi_3,\ \varphi_3' \to 0, \tag{10}$$

где $\nu = \nu_2/\nu_1$ — относительная кинематическая вязкость; $\mathrm{We} = \sigma/h_0 U_0 \rho_1$ — число Вебера. Согласно (2), имеем

$$\mathrm{We} = \sqrt[3]{\frac{3\mathrm{Fi}}{\mathrm{Re}^5}\left(1 + \frac{3\tau}{6+\tau}\right)}, \tag{11}$$

где $\mathrm{Fi} = \sigma^3/\left(\rho_1^3 \nu_1^4 g(1-\rho)\right)$.

Таким образом, линейный анализ устойчивости рассматриваемого течения сводится к задаче на собственные значения уравнений Орра — Зоммерфельда (4)—(6) с граничными условиями (7)—(10).

В данной работе эта задача решалась численно с помощью детерминантного метода [11]. Применительно к исследуемому течению этот метод заключается в следующем.

Пусть $\varphi_{ij}(i = 1, \ldots, 3,\ j = 1, 2)$ — линейно-независимые решения уравнений (4)—(6), причем $\varphi_{11}$, $\varphi_{12}$ и $\varphi_{31}$, $\varphi_{32}$ удовлетворяют условиям (7), (10) соответственно, а $\varphi_{21}$, $\varphi_{22}$ являются продолжением функции $\varphi_{31}$, $\varphi_{32}$ из области $y \geqslant 1 + \delta$ в область $1 \leqslant y \leqslant 1 + \delta$ с помощью условий (9). Тогда решение задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_{11}\varphi_{11} + A_{12}\varphi_{12}, && 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ \varphi_2 &= A_{21}\varphi_{21} + A_{22}\varphi_{22}, && 1 \leqslant y \leqslant 1 + \delta, \\ \varphi_3 &= A_{31}\varphi_{31} + A_{32}\varphi_{32}, && 1 + \delta \leqslant y \leqslant \infty. \end{aligned} \tag{12}$$

Подставив (12) в (8), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений на коэффициенты $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{21}$, $A_{22}$, для которой условие существования ненулевого решения можно записать в виде

$$F(\alpha, c_*, \mathrm{Re}, \mathrm{We}, \delta, \rho, \mu, D_{ij}) = 0, \tag{13}$$

где

$$D_{i1} = \begin{vmatrix} \varphi_{i1} & \varphi_{i2} \\ \varphi'_{i1} & \varphi'_{i2} \end{vmatrix}, \quad D_{i2} = \begin{vmatrix} \varphi'_{i1} & \varphi'_{i2} \\ \varphi''_{i1} & \varphi''_{i2} \end{vmatrix}, \quad D_{i3} = \begin{vmatrix} \varphi''_{i1} & \varphi''_{i2} \\ \varphi'''_{i1} & \varphi'''_{i2} \end{vmatrix},$$
$$D_{i4} = \begin{vmatrix} \varphi'_{i1} & \varphi'_{i2} \\ \varphi'''_{i1} & \varphi'''_{i2} \end{vmatrix}, \quad D_{i5} = \begin{vmatrix} \varphi_{i1} & \varphi_{i2} \\ \varphi'''_{i1} & \varphi'''_{i2} \end{vmatrix}, \quad D_{i6} = \begin{vmatrix} \varphi_{i1} & \varphi_{i2} \\ \varphi''_{i1} & \varphi''_{i2} \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Выражение для функции $F$ в (13) не приводится вследствие его громоздкости. Можно показать, что функции $D_{ij}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{gathered} D'_{i1} = D_{i6}, \quad D'_{i2} = D_{i4}, \quad D'_{i3} = B_i D_{i6}, \quad D'_{i4} = D_{i3} + A_i D_{i2} + B_i D_{i1}, \\ D'_{i5} = D_{i4} + A_i D_{i6}, \quad D'_{i6} = D_{i2} + D_{i5}, \end{gathered} \tag{15}$$

где $A_1 = i\alpha \mathrm{Re}(U_1 - c_*) + 2\alpha^2$; $B_1 = i\alpha \mathrm{Re}\left[(U_1 - c_*)\alpha^2 + U''_1\right] + \alpha^4$;

$$A_2 = i\alpha \frac{\mathrm{Re}}{\nu}(U_2 - c_*) + 2\alpha^2; \quad B_2 = i\alpha \frac{\mathrm{Re}}{\nu}\left[(U_2 - c_*)\alpha^2 + U''_2\right] + \alpha^4.$$

Граничные условия для функций $D_{ij}$ в силу однородности краевой задачи (4—10) имеют вид

$$y = 0:\ D_{11} = D_{12} = D_{14} = D_{15} = D_{16} = 0,\ D_{13} = 1; \tag{16}$$

$$y = 1 + \delta:\ D_{2j} = D_{3j},\ j = 1, \ldots, 6. \tag{17}$$

Функции $D_{3j}$ в (16) можно выписать явно, поскольку из уравнения (6) имеем

$$\varphi_{31} = e^{-\alpha y}, \varphi_{32} = e^{-\lambda y},\ \lambda = \sqrt{\alpha^2 - i\alpha \mathrm{Re}c/\nu}. \tag{18}$$

Окончательно, используя (14), (17), (18), для $D_{2j}$ имеем

$$y = 1 + \delta:\ D_{21} = (\alpha - \lambda)\exp\left[-(\alpha + \lambda)(1 + \delta)\right], \tag{19}$$

$D_{22} = \alpha\lambda(\alpha - \lambda)\exp[-(\alpha + \lambda)(1 + \delta)]$, $D_{23} = \alpha^2\lambda^2(\alpha - \lambda) \times$ $\times \exp[-(\alpha + \lambda)(1 + \delta)]$, $D_{24} = \alpha\lambda(\lambda^2 - \alpha^2)\exp[-(\alpha + \lambda) \times$

$$\times(1+\delta)],\ D_{25}=(\alpha^3-\lambda^3)\exp[-(\alpha+\lambda)(1+\delta)],\ D_{26}=$$
$$=(\lambda^2-\alpha^2)\exp[-(\alpha+\lambda)(1+\delta)].$$

С целью подавления быстрорастущих решений уравнений (15) вводятся новые функции $z_{ij}=D_{ij}/D_{i3}$, и уравнения (15) с граничными условиями (16), (19) с учетом того, что у системы (15) есть интеграл $D_{i6}D_{i4}=D_{i1}D_{i3}+D_{i2}D_{i5}$, сводятся к системе уравнений:

(20)
$$z'_{i2}=z_{i4}-B_i z_{i6}z_{i2},\qquad i=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 2, & 1\leqslant y\leqslant 1+\delta,\end{cases}$$
$$z'_{i4}=A_i z_{i2}-B_i z_{i2}z_{i5}+1,$$
$$z'_{i5}=z_{i4}+A_i z_{i6}-B_i z_{i6}z_{i5},\quad z'_{i6}=z_{i2}+z_{i5}-B_i z_{i6}$$

с граничными условиями

(21)
$$y=0:\ z_{12}=z_{14}=z_{15}=z_{16}=0,\ y=1+\delta:\ z_{22}=$$
$$=1/(\alpha\lambda),\ z_{24}=-(\alpha+\lambda)/(\alpha\lambda),\ z_{25}=(\alpha^3-\lambda^3)/(\alpha^2\lambda^2(\alpha-\lambda)),$$
$$z_{26}=-(\alpha+\lambda)/(\alpha^2+\lambda^2).$$

Уравнение (13) запишется в виде

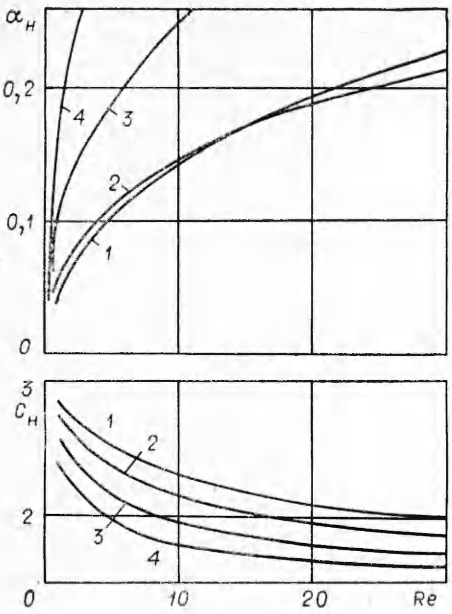
(22)
$$y=1:\ F_1(\alpha,\ c,\ \mathrm{Re},\ \mathrm{We},\ \delta,\ \rho,\ \mu,\ z_{ij})=0.$$

Таким образом, задача на собственные значения (4)—(10) сводится к решению алгебраического уравнения (22), в котором функции $z_{ij}$ являются решениями задачи Коши для уравнений (20) с граничными условиями (21).

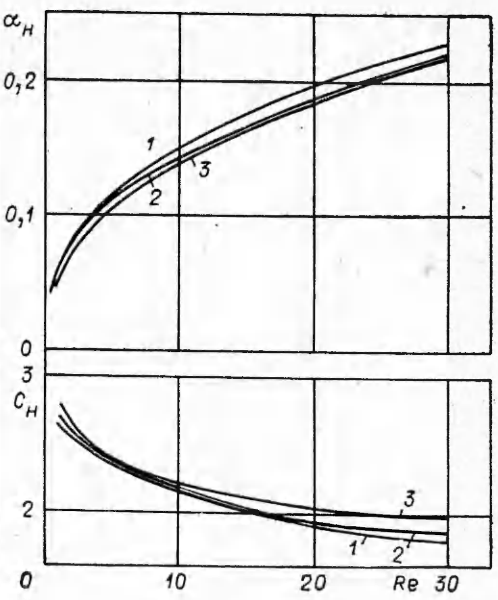
В данной работе рассчитывались волновые числа $\alpha_{\text{н}}=f(\mathrm{Re})$ и фазовые скорости $c_{\text{н}}=\varphi(\mathrm{Re})$, соответствующие нейтральным возмущениям ($\eta=0$). Как в случае свободной пленки жидкости [5], так и при совместном течении двух жидкостей в канале (в области установившегося течения *III*) [1] неустойчивость течения при малых Re обусловлена наличием поверхности раздела. Фазовая скорость волн на этой поверхности равна примерно 1,5—3 и уменьшается при увеличении Re и уменьшении величины Fi. В области начального участка *II* экспериментально наблюдаемые незатухающие волны на поверхности раздела имеют также скорость $c\approx 2$, которая уменьшается при увеличении Re [9]. Естественно предположить, что и в области *II* неустойчивость рассматриваемого течения связана с поверхностными волнами. Поэтому в данной работе исследовалась мода колебаний, соответствующая этим волнам. Область неустойчивости ($\eta>0$) для этой моды колебаний в плоскости $\alpha$ — Re ограничена кривой, выходящей из начала координат, и осью $\alpha=0$, на которой, как следует из решения системы (4)—(10), при $\alpha=0$ скорость волн равна $c=3(1+\tau/(6+\tau))$. Вторая граница области неустойчивости определялась численно. Вычисления проводились при Re = 1—30, Fi = $5\cdot10^6$—$5\cdot10^{10}$, $\mu=0{,}125$—8, $\rho=0{,}4$—0,9999, $\delta\geqslant 4$. Результаты счета приведены на фиг. 2—4. На основании этих результатов можно отметить следующее.

Увеличение значения $\rho$ от 0,4 до 0,9999 при постоянном Fi приводит к некоторому уменьшению скорости нейтральных волн и не оказывает существенного влияния на нейтральные кривые $\alpha_{\text{н}}=f(\mathrm{Re})$ (фиг. 2, $\mu=1$, $\delta=8$, кривая *1* соответствует $\rho=0{,}4$, Fi = $5\cdot10^{10}$, *2* — $\rho=0{,}9999$, Fi = $5\cdot10^{10}$, *3* — $\rho=0{,}9999$, Fi = $5\cdot10^8$, *4* — $\rho=0{,}9999$, Fi = $5\cdot10^6$). Увеличение Fi приводит к увеличению скорости нейтральных волн и сужению области неустойчивости (поскольку $\mathrm{Fi}\sim\sigma^3/(\rho_1^3\nu_1^4(1-\rho))$, этот параметр может измениться на несколько порядков при изменении $\sigma$, $\rho_1$, $\nu_1$ в несколько раз и изменении $\rho$ в окрестности единицы.

Увеличение толщины пограничного слоя (фиг. 3, Fi = $5\cdot10^{10}$, $\rho=0{,}9999$, $\mu=1$, $\delta=4$; 8; $\infty$ — кривые *1*—*3*) приводит к сужению области неустойчивости при малых Re. При Re $\geqslant 30$ по мере увеличения $\delta$ область неустойчивости оказывается наименьшей при некотором конечном, зависящем от Fi, $\rho$, $\mu$, Re значении $\delta$. Скорость нейтральных волн



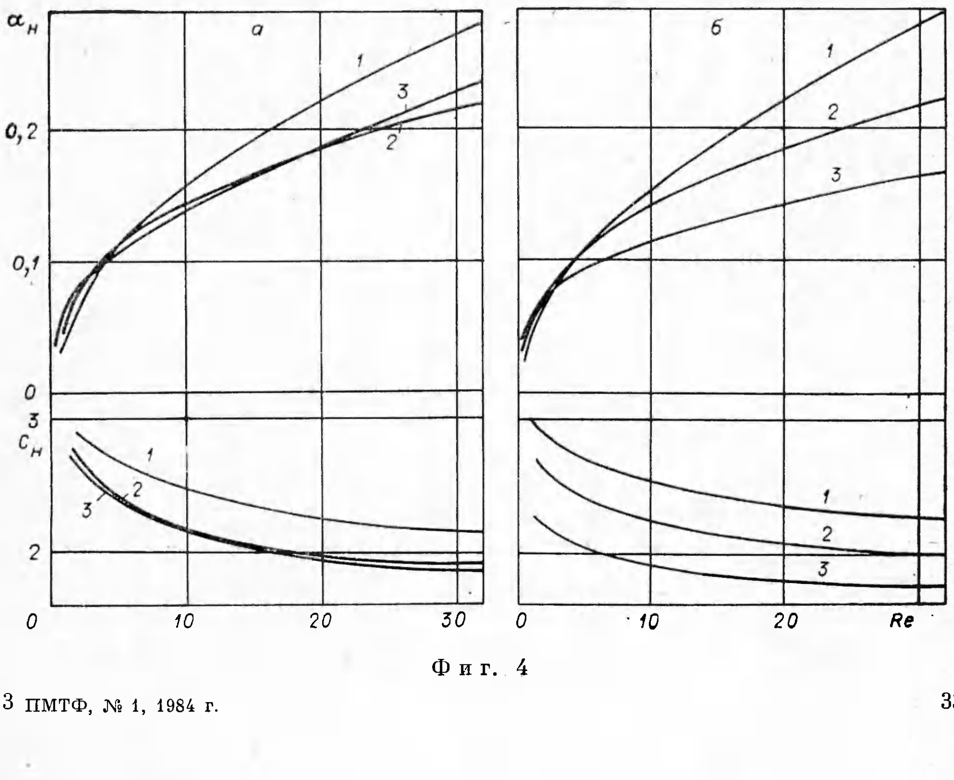

Ф и г. 2




Ф и г. 3

при увеличении значения $\delta$ уменьшается в области малых Re и увеличивается в области больших Re.

Увеличение $\mu$ при конечных значениях $\delta$ (фиг. 4, *а*, $\delta = 8$, $\mathrm{Fi} = 5\cdot10^{10}$, $\rho = 0{,}9999$, $\mu = 0{,}125$; 1; 8 — кривые *1—3*) приводит к расширению области неустойчивости при малых Re. При больших значениях Re область неустойчивости оказывается наименьшей при некотором конечном, зависящем от Fi, $\delta$, $\rho$, Re значении $\mu$. Скорость нейтральных волн увеличивается при увеличении $\mu$ для малых Re и является наименьшей при некотором конечном, зависящем от Fi, $\delta$, $\rho$, Re значении $\mu$ для больших Re. Относительная динамическая вязкость $\mu$ влияет на устойчивость течения, с одной стороны, как параметр в уравнениях возмущенного те-




Ф и г. 4

чения, а с другой — через невозмущенный профиль скорости и, как показано в [3], через величину разрыва производной $dU/dy$ при $y = 1$. Когда $\delta \to \infty$, течение во внешней среде становится однородным, невозмущенный профиль скорости не зависит от $\mu$, а $dU/dy = 0$ при $\delta \to \infty$. Следовательно, в этом случае $\mu$ влияет на устойчивость течения только как параметр в уравнениях для возмущенного течения. При увеличении $\mu$ (фиг. 4, *б*, $\delta = \infty$) область неустойчивости расширяется в области малых и сужается в области больших Re, а скорость волн уменьшается.

Таким образом, при втекании пленки жидкости по вертикальной стенке в другую, неподвижную на бесконечности жидкость незатухающие волны на поверхности раздела существуют при любых Re. В области $\mathrm{Re} \leqslant 30$ характеристики этих волн при данном Re определяются в основном параметром Fi и, в меньшей степени, $\mu$ и $\delta$.

Авторы выражают благодарность В. Е. Накорякову за постановку задачи и внимание к работе.

*Поступила 17 XI 1982*

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Graebel W. P.** The stability of a stratified flow.— J. Fluid Mech., 1960, vol. 8, N 3.
2. **Осипов В. З.** Устойчивость движения двух несмешивающихся вязких жидкостей между параллельными стенками.— Тр. ВЦ АН ГССР, 1970, т. 9, № 3.
3. **Chia-Shun Yih.** Instability due to viscosity stratification.— J. Fluid Mech., 1967, vol. 27, pt 2.
4. **Hickox C. E.** Instability due to viscosity and density stratification in axisymmetric flows.— Phys. Fluids, 1971, vol. 14, N 2.
5. **Chia-Shun Yih.** Stability of liquid flow down on inclined plane.—Phys. Fluids, 1963, vol. 6, N 3.
6. **Бэтчов Р., Криминале В.** Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971.
7. **Бородин В. А., Ягодкин В. И.** Устойчивость движения плоской границы раздела двух жидкостей.— ПМТФ, 1967, № 1.
8. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
9. **Беседин С. М., Цвелодуб О. Ю.** Устойчивость течения пленка жидкости — другая жидкость.— В кн.: Неравновесные процессы в одно- и двухфазных системах. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1981.
10. **Кутателадзе С. С., Стырикович М. А.** Гидродинамика газожидкостных систем. М.: Энергия, 1976.
11. **Желтухин Н. А.** Детерминантный метод решения задач гидродинамической теории устойчивости.— В кн.: Аэрогазодинамика. Новосибирск: Наука, 1973.

---

УДК 531.391 + 532.526 + 532.592

# УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ВРАЩЕНИЯ ЦИЛИНДРА, ЗАПОЛНЕННОГО СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

*Н. В. Деренддяев, В. А. Сеняткин*

(*Горький*)

Вопрос об устойчивости стационарного вращения тела с полостью, частично заполненной однородной вязкой несжимаемой жидкостью, возникает при анализе моделей различных турбомашин (см., например, [1—3]). В [4] экспериментально исследовалось движение волчка с полостью, содержащей слоисто-неоднородную вязкую жидкость.

В данной работе способом [3] решена плоская задача об устойчивости в малом стационарного вращения кругового цилиндра, целиком заполненного двумя несмешивающимися вязкими несжимаемыми жидкостями, в случае осесимметричного вязкоупругого закрепления оси цилиндра при условии постоянства угловой скорости его вращения.

**1. Постановка задачи.** Пусть круговой цилиндр с внутренним радиусом $a$, целиком заполненный двумя несмешивающимися вязкими несжимаемыми жидкостями с плотностями $\rho_1$, $\rho_2$ и вязкостями $\mu_1$, $\mu_2$, совершает стационарное вращение с угловой скоростью $\Omega$ вокруг оси $O_1z$. В режиме стационарного вращения ось цилиндра, находящаяся в вязкоупругом закреплении, совпадает с $O_1z$, заполняющие жидкости вращаются