

О ВОЛНАХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПРОЧНЫХ ГОРНЫХ ПОРОДАХ

Е. И. Шемякин

(Новосибирск)

1°. При динамических нагружениях твердых сред взрывом или ударом волны напряжений, возникающие в этих средах, имеют, как правило, небольшую пространственную протяженность области нагрузки. Если наибольший размер этой области  $s_1$  значительно меньше расстояния  $r_0$  от источника (в центре заряда или в точке приложения ударной нагрузки), например,  $s_1 \sim 0.1 r_0$ , или еще меньше, то такую волну напряжений можно считать короткой [1, 2].

В значительном диапазоне расстояний от источника волны напряжений в твердых средах можно считать слабыми. Это связано с тем, что сжимаемость твердых тел мала: модуль объемного сжатия большинства прочных горных пород составляет величину  $\sim 10^6 \text{ кг/см}^2$ , так что отношение амплитуды напряжений в волне к величине этого модуля является малой величиной порядка 0.1 уже для волн с амплитудой  $10^5 \text{ кг/см}^2$ .

Примером коротких волн напряжений могут служить волны на участке нагрузки в прочных горных породах, возникающие при подземном взрыве заряда ВВ. Практически во всем диапазоне расстояний, начиная от 2—5 радиусов заряда и далее эти волны напряжений являются слабыми. Эти факты позволяют применить к изучению волн напряжений методы теории коротких волн [1, 2].

2°. На основании данных измерений напряжений и скоростей частиц в прочных горных породах (диабаз, известняк, гранит, мрамор [3]) можно отметить следующие особенности волн напряжений, возникающих при подземных взрывах:

1) во всем диапазоне измерений, начиная с  $10-15 R_*$  ( $R_*$  — радиус заряда), на эпюрах напряжений не наблюдается скачков уплотнения.

2) начиная с расстояний  $10-15 R_*$  до 100 отношение длины участка нарастания напряжений  $s_1$  к расстоянию от места взрыва имеет величину порядка 0.1 и затем примерно пропорционально уменьшается с расстоянием от места взрыва;

3) нарастание напряжений происходит резко, а спад напряжений имеет плавный характер; отношение градиентов напряжений в областях нагрузки и разгрузки можно оценить по отношению величин  $s_1 / s_2$ , где  $s_2$  — протяженность зоны сжатия в области разгрузки. Это отношение в зоне вблизи заряда имеет величину  $\sim 0.05-0.1$ , а на больших расстояниях, где напряжения уже малы, равно 0.25—0.3;

4) длина зоны сжатия  $s_1 + s_2$  слабо возрастает с расстоянием от места взрыва (с увеличением расстояния от 30 до  $150 R_*$  величина  $s_1 + s_2$  увеличивается примерно на 10—20%).

Область нарастания напряжения  $s_1$  примерно до  $100 R_*$  растет значительно быстрее, чем  $s_1 + s_2$ , так что положение максимума на эпюре напряжений резко сдвигается от начала эпюры в стороны к месту взрыва — максимум напряжений «отстает» от вступления волны;

5) начиная с расстояний порядка  $20-30 R_*$ , вся эпюра напряжений в целом перемещается примерно со скоростью звука  $a_0$  в покоящейся среде. Разность скорости распространения максимума напряжений и фронта волны примерно равна 5—10% на расстояниях  $\sim 30 R_*$  и  $\sim 1-2\%$  на расстояниях  $100 R_*$ ; разность этих скоростей уменьшается с расстоянием от места взрыва;

6) максимальные напряжения и напряжения на участке нарастания напряжений уменьшаются с расстоянием примерно пропорционально  $r^{-n}$ , где  $n = 1.6-1.8$ ;

7) на расстояниях  $\sim 50 R_*$  отношение максимальных скоростей перемещения  $u$  к скорости звука в покоящейся среде  $u / a_0 \sim 10^{-4}$ : этот же порядок имеет и продольная деформация.

Максимальные напряжения  $\sigma$  на расстояниях  $\sim 50 R_*$  имеют величину порядка  $100 \text{ кг/см}^2$ ; для данной частицы эти напряжения нарастают за время  $\sim 10^{-3} \text{ сек}$  (для заряда тротила весом в 1 т).

3°. В статье рассматриваются короткие волны напряжений в среде, которая при быстрых динамических нагружениях переходит в предельное состояние на участке нагрузки; принимается, что в этом состоянии главные нормальные напряжения в волне связаны некоторым условием типа условия Кулона — Мора — Прандтля. Зависимость всестороннего сжатия от объемной деформации принимается слабонелинейной.

Решение задач для сферической и цилиндрической симметрии, а также для плоской волны строится методом теории коротких волн; все основные результаты о волнах нагрузки в точности совпадают с результатами статьи [4]. Новые данные относятся к обобщению условия предельного состояния на случай слабой нелинейности и к оценке влияния нагрузки на закон затухания максимальных амплитуд.

§ 1. п. 1. Рассмотрим одномерные задачи о распространении волн напряжений в сплошной среде и выберем в качестве независимых переменных переменные Лагранжа:  $r_0$  — начальная координата частицы,  $r$  — координата в момент времени  $t$ .

Уравнения движения и неразрывности в переменных Лагранжа имеют следующий вид<sup>1</sup>

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\partial r / \partial r_0} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r_0} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta) r_0}{r_0 r} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial r_0} = \frac{\rho_0}{\rho} \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \quad (1.1)$$

Здесь  $\sigma_r, \sigma_\theta = \sigma_\phi$  — главные нормальные напряжения;  $\rho$  — плотность,  $\rho_0$  — ее начальное значение;  $u$  — скорость перемещения в направлении  $r$ .

Если ввести вместо  $\rho$  объемную деформацию частицы  $\varepsilon = \rho_0 / \rho - 1$  и продифференцировать второе уравнение (1.1) по  $t$ , это уравнение неразрывности можно представить в виде

$$\frac{\partial u}{\partial r_0} = \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{r_0}{r} \frac{\partial r}{\partial r_0} \frac{2u}{r_0} \quad \left( u = \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (r - r_0), \quad \varepsilon = \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) \quad (1.2)$$

В уравнениях движения и неразрывности перейдем от напряжений к деформациям; пусть  $u(r_0, t)$  — скорость частицы;  $\varepsilon(r_0, t)$  — объемная деформация;  $r(r_0, t)$  — положение частицы,  $w(t)$  — перемещение частицы; тогда

$$r(r_0, t) = \int_0^t u dt' + r_0 \quad \text{или} \quad w = \int_0^t u dt' \quad (1.3)$$

Введем новые независимые переменные  $\delta, \tau$  и новые неизвестные функции  $m$  и  $e$  при помощи соотношений

$$r = a_0 t (1 + \Delta_0 \delta), \quad \tau = \ln t, \quad u = a_0 M_0 m(\delta, \tau), \quad \varepsilon = \varepsilon_0 e(\delta, \tau) \quad (1.4)$$

Здесь  $a_0$  — скорость звука в покоящейся среде;  $M_0$  и  $\varepsilon_0$  — малые величины, имеющие порядок максимального числа Маха и максимальной деформации, предположение о малости  $M_0$  и  $\varepsilon_0$  есть предположение о слабости амплитуд в волне. Как было указано выше,  $M_0$  имеет порядок величины  $10^{-3} \div 10^{-4}$ ; величина  $\varepsilon_0$  также является малой; как будет показано ниже (при выводе уравнений коротких волн),  $\varepsilon_0 = M_0$ ; величины  $\delta, \tau$  — порядка единицы.

В (1.5) считается  $\Delta_0 \delta \ll 1$  в силу малости  $\Delta_0$ .

Предположение о малости  $\Delta_0$  есть предположение о короткости волны. Это означает, как следует из (1.4) и из определения  $s_1$  (см. выше), что длина области нарастания напряжений  $s_1 = a_0 t \delta \Delta_0$  значительно меньше расстояния, пройденного волной от места взрыва  $r_0 \approx a_0 t$

$$s_1 \ll r_0 \quad (1.5)$$

В короткой ( $\Delta_0 \ll 1$ ) и слабой ( $M_0 \ll 1$ ;  $\varepsilon_0 \ll 1$ ) волнах справедливы следующие оценки поперечной и продольной деформаций в сферически-

<sup>1</sup> В уравнении движения сжимающие напряжения считаются положительными величинами. Уравнения (1.1) записаны для случая сферической симметрии, но все последующие выкладки с элементарными изменениями могут быть проведены и для цилиндрического, и для плоского случаев.

симметричной волне:

$$\varepsilon_\theta = \frac{w}{r_0} \sim \frac{a_0 M_0 m \Delta_0 t}{a_0 t (1 + \Delta_0 \delta)} \sim \Delta_0 M_0, \quad \varepsilon_r = \frac{\partial v}{\partial r_0} \sim M_0 \quad (1.6)$$

Из сравнения оценок (1.6) следует, что  $\varepsilon_r$  есть малая величина порядка  $M_0$ , а  $\varepsilon_\theta$  — малая более высокого порядка, так как  $\varepsilon_\theta \sim \Delta_0 M_0$ .

п. 2. Будем считать, что при динамическом нагружении поведение среды описывается следующими двумя функциями:

$$-\sigma = \Psi(\varepsilon), \quad \sigma = 1/3 (\sigma_r + 2\sigma_\theta), \quad \sigma_r - \sigma_\theta = f(\sigma) \quad (1.7)$$

Связь среднего напряжения  $\sigma$  с объемной деформацией будет принята далее в виде

$$-\sigma = K\varepsilon (1 + l'\varepsilon), \quad |l'\varepsilon| \ll 1 \quad (K = \lambda + 2/3\mu, \quad l' = \text{const}) \quad (1.8)$$

Здесь  $K$  — модуль объемного сжатия,  $\lambda, \mu$  — константы Ляме.

В (1.7) функция  $f(\sigma)$  описывает предельное состояние среды и связывает второй и первый инварианты тензора напряжений; примем

$$f(\sigma) = 3m\sigma (1 - \chi'\sigma) \quad (\chi'\sigma \ll 1; \quad m, \chi' = \text{const} > 0)$$

Это соответствует убыванию касательного напряжения на площадке скольжения с увеличением нормального напряжения на этой площадке (или с ростом среднего напряжения  $\sigma$ ). В этом случае, пользуясь малостью  $\chi'\sigma$ , имеем

$$\sigma_\theta = \alpha\sigma_r (1 + \chi\sigma) \quad \left( \alpha = \frac{1-m}{1+2m}, \quad \chi = \frac{(1-\alpha)(1+2\alpha)}{3\alpha} \chi', \quad \chi\sigma \ll 1 \right) \quad (1.9)$$

Неизвестные параметры  $\alpha, \chi$  будем считать постоянными в диапазоне высоких скоростей нагружения, близких к ударным нагружениям. При помощи (1.8) и (1.9) получим

$$\begin{aligned} -\sigma_r &= \frac{3K\varepsilon}{1+2\alpha} (1 + l\varepsilon) & l &= l' + \frac{2\alpha}{1+2\alpha} \chi K \\ \sigma_r - \sigma_\theta &= \frac{3K(1-\alpha)}{1+2\alpha} \varepsilon (1 + l''\varepsilon), & l'' &= l' + \chi' K \end{aligned} \quad (1.10)$$

Подставим эти выражения в уравнения движения (1.1), заменим в нем  $\rho, r, r_0$  выражениями через деформации

$$\frac{1}{(1+\varepsilon_\theta)^2} \frac{\partial u}{\partial t} - a_{10}^2 (1 + 2l\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r_0} - \frac{2a_{10}^2 (1-\alpha) \varepsilon (1 + l''\varepsilon) (1 + \varepsilon_r)}{r_0 (1 + \varepsilon_\theta)} = 0 \quad (1.11)$$

Здесь  $a_{10}$  — местная скорость звука в области предельного состояния, она определяется множителем при  $\partial \varepsilon / \partial r_0$ ; имеем

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma_r}{d\varepsilon} = a_1^2 = a_{10}^2 (1 + 2l\varepsilon), \quad a_{10}^2 = \frac{3K}{\rho_0 (1 + 2\alpha)} \quad (1.12)$$

В упругой среде вместо (1.10) имеем закон Гука

$$-\sigma_r = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_\theta - 4\mu \varepsilon_\theta, \quad \sigma_r - \sigma_\theta = 2\mu (\varepsilon - 3\varepsilon_\theta) \quad (1.13)$$

Уравнения движения упругой среды имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+\varepsilon_\theta)^2} \frac{\partial u}{\partial t} - a_0^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial r_0} + \left[ \frac{4\mu}{\rho_0 r_0} (\varepsilon - 3\varepsilon_\theta) \right] - \frac{4\mu}{\rho_0 r_0} (\varepsilon - 3\varepsilon_\theta) \frac{1 + \varepsilon_r}{1 + \varepsilon_\theta} = 0 \\ \left( a_0 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}} \right) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь слагаемое в скобках получено при дифференцировании  $\varepsilon_\theta$  по  $r_0$ .

п. 3. Выведем уравнения коротких волн для среды в предельном состоянии и для упругой среды. В уравнениях (1.11) и (1.14) перейдем к переменным (1.4); при этом будем учитывать оценки (1.6) для  $\varepsilon_0$  и  $\varepsilon_r$  и пользоваться следующими формулами перехода

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r_0} &= \frac{M_0}{t\Delta_0} \frac{\partial m}{\partial \delta}, & \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{a_0 M_0}{t} \left( \frac{\partial m}{\partial \tau} - \frac{1 + \Delta_0 \delta}{\Delta_0} \frac{\partial m}{\partial \delta} \right) \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial r_0} &= \frac{\varepsilon_0}{a_0 t \Delta_0} \frac{\partial e}{\partial \delta}, & \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \frac{\varepsilon_0}{t} \left( \frac{\partial e}{\partial \tau} - \frac{1 + \Delta_0 \delta}{\Delta_0} \frac{\partial e}{\partial \delta} \right) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Преобразуя уравнение неразрывности (1.2), имеем

$$\frac{M_0}{t\Delta_0} \frac{\partial m}{\partial \delta} = \frac{1}{(1 + \varepsilon_0)^2} \frac{\varepsilon_0}{t} \left[ \frac{\partial e}{\partial \tau} - \frac{1 + \Delta_0 \delta}{\Delta_0} \frac{\partial e}{\partial \delta} \right] - \frac{1 + \varepsilon_0 e - 2\varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0} \frac{2a_0 M_0 m}{a_0 t (1 + \Delta_0 \delta)}$$

Отсюда с точностью до малых высшего порядка относительно  $M_0, \Delta_0$

$$\frac{\partial m}{\partial \delta} + \frac{\varepsilon_0}{M_0} \frac{\partial e}{\partial \delta} = \Delta_0 \frac{\varepsilon_0}{M_0} \left[ \frac{\partial e}{\partial \tau} - \delta \frac{\partial e}{\partial \delta} - 2 \frac{M_0}{\varepsilon_0} m \right] \quad (1.16)$$

Преобразование для уравнения движения дает:

$$\text{для предельного состояния среды} \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial m}{\partial \delta} + N \frac{\varepsilon_0}{M_0} \frac{\partial e}{\partial \delta} = \Delta_0 \left[ \frac{\partial m}{\partial \tau} - \delta \frac{\partial m}{\partial \delta} - 2lN \frac{\varepsilon_0}{\Delta_0} \frac{\partial e}{\partial \delta} - 2N(1 - \alpha)e \right] \left( N = \frac{a_{10}^2}{a_0^2} \right)$$

для упругой среды

$$\frac{\partial m}{\partial \delta} + \frac{\varepsilon_0}{M_0} \frac{\partial e}{\partial \delta} - \Delta_0 \left[ \frac{\partial m}{\partial \tau} - \delta \frac{\partial m}{\partial \delta} \right] \quad (1.18)$$

Из сопоставления (1.16) и (1.17), а также (1.16) и (1.18), учитывая, что правые части уравнений — малые величины, находим

$$\varepsilon_0 = M_0, \quad N = 1 - 2h\Delta_0 \quad (h = \text{const} > 0, h \sim 1) \quad (1.19)$$

Из (1.16), (1.18) и из (1.16), (1.17) уравнения коротких волн получим: для упругой среды

$$\frac{\partial m}{\partial \delta} + \frac{\partial e}{\partial \delta} = 0, \quad \frac{\partial m}{\partial \tau} - \delta \frac{\partial m}{\partial \delta} + m = 0 \quad (1.20)$$

для среды в предельном состоянии

$$(1.21)$$

$$\frac{\partial m}{\partial \delta} + \frac{\partial e}{\partial \delta} = 0, \quad \frac{\partial m}{\partial \tau} - (\delta + \chi m + h) \frac{\partial m}{\partial \delta} + (2 - \alpha) m = 0 \quad \left( \chi = l \frac{\varepsilon_0}{\Delta_0} \sim 1 \right)$$

Если  $\chi \ll 1$ , можно показать, что скорость распространения деформаций в области предельного состояния будет постоянной и величиной  $\chi m$  в уравнении (1.21) следует пренебречь.

Из первых уравнений (1.20) и (1.21) следует

$$m = -e \quad (1.22)$$

(произвольная функция от  $\tau$  равна нулю из-за непрерывности  $m$  и  $e$  на границе упругой зоны и состояния покоя и на границе зон упругого и предельного состояний).

При выводе уравнения коротких волн с принятой точностью (до малых первого порядка включительно) в окончательные уравнения не вошла величина  $\varepsilon_0$ , так как она будет малой порядка  $\Delta_0 M_0$ . Так как лагранжева координата  $r_0$  отличается от  $r$  на  $\varepsilon_0$ , то с принятой точностью  $r = r_0$ .

Поэтому уравнения коротких волн (1.20) и (1.21) имеют один и тот же вид в лагранжевых и эйлеровых координатах.

Если в выражении для  $N$  из (1.19) заменить  $a_{10}$ ,  $a_0$  их выражениями через параметры Ляме и величину  $\alpha$  из условия предельного состояния, можно установить следующую связь

$$\alpha = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} - h\Delta_0 \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\right), \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{v}{1-v} \left(1 - \frac{h\Delta_0}{v}\right) \quad (h\Delta_0 \ll 1) \quad (1.23)$$

Здесь  $v$  — коэффициент Пуассона. Величина  $h\Delta_0$ , как следует из формулы для  $N$ , определяет скачок местной скорости звука при переходе из упругой области в область предельного состояния

$$a_{10} = a_0 (1 - h\Delta_0) \quad (1.24)$$

т. е. в случае слабой короткой волны  $(a_{10} - a_0) / a_0$  — малая величина порядка  $\Delta_0$ . Из (1.23) следует, что для такой волны  $\alpha = v / (1 - v)$  с точностью до малой порядка  $\Delta_0$ .

Если скорость звука изменяется непрерывно, то  $h = 0$  и величина  $\alpha$  в точности равна  $v / (1 - v)$ , как это было отмечено в [4].

Вернемся к соотношениям (1.10) и рассмотрим простейший случай, считая  $\alpha = v / (1 - v)$  и пренебрегая нелинейностью  $l = l'' = 0$ ; имеем

$$-\sigma_r = (\lambda + 2\mu) \varepsilon, \quad -\sigma_\theta = \lambda \varepsilon$$

Сравним эти зависимости с упругими

$$-\sigma_r = (\lambda + 2\mu) \varepsilon - 4\mu\varepsilon_\theta, \quad -\sigma_\theta = \lambda \varepsilon + 2\mu\varepsilon_\theta$$

Казалось бы, что вследствие малости  $\varepsilon_\theta$  по сравнению с  $\varepsilon_r$  не должно быть разницы и в законах распространения и затухания волн в упругой и предельной зонах. Однако это не так. В уравнение динамики упругих сред (1.14) входит производная  $\partial\varepsilon_\theta/\partial r_0$ , имеющая тот же порядок  $M_0$ , что и продольная деформация  $\varepsilon_r$  (см. (1.6)), и величиной этой производной пренебрегать уже нельзя. Это как раз и определяет более быстрое затухание напряжений в области предельного состояния по сравнению с затуханием напряжений в короткой упругой волне (ср. вторые уравнения в (1.20) и (1.24)). Покажем, наконец, что если в условии предельного состояния (1.7) или (1.19) ввести постоянное слагаемое  $\beta$  (рассмотрим для примера линейное условие (1.9) и связь  $\alpha$  и  $v$  в виде (1.23))

$$\sigma_\theta = \alpha\sigma_r - \beta, \quad \frac{\sigma_r}{\lambda + 2\mu} \sim \varepsilon_0 \quad (1.25)$$

то для короткой волны  $\beta / (\lambda + 2\mu)$  будет малой порядка  $\Delta_0\varepsilon_0$ , и величиной  $\beta$  в уравнении движения следует пренебречь.

Произведем следующую оценку. Из условия (1.25) имеем

$$\sigma_\theta = \frac{v}{1-v} \sigma_r - \beta - \frac{h\Delta_0}{1-v} \sigma_r$$

и из упругой связи

$$\sigma_\theta = \frac{v}{1-v} \sigma_r - 3 \frac{1-2v}{1+v} (\lambda + 2\mu) \varepsilon_\theta$$

Так как при переходе от упругой области к области предельного состояния напряжения непрерывны, то

$$\frac{\beta}{\lambda + 2\mu} = \Delta_0 M_0 \left(3 \frac{1-2v}{1+v} - \frac{h}{1-v}\right) \sim \Delta_0 M_0 \quad (1.26)$$

В этом случае при выводе уравнений коротких волн (1.21) при условии (1.25) в правую часть (1.17) вошла бы величина порядка  $\Delta_0 M_0$ , которую следует отбросить. Таким образом, при изучении непрерывных волн напряжений следует пользоваться условием (1.9) и считать  $\alpha$  и  $v$  связанными соотношением (1.23).

п. 4. Найдем общие интегралы уравнений (1.20) и (1.24). Интегрируя обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{d\delta}{-(\delta + \kappa m + h)} = \frac{dm}{-(2-\alpha)m}$$

определяем

$$C_1 = m t^{2-\alpha}, \quad \delta = C_2 m^{2-\alpha} + \frac{\kappa m}{1-\alpha} - h$$

Отсюда общий интеграл

$$\delta = m^{2-\alpha} \Phi(mt^{2-\alpha}) + \frac{\kappa m}{1-\alpha} - h \quad (1.27)$$

где  $\Phi$  — произвольная функция.

Общий интеграл можно переписать в виде

$$m = T^{-(2-\alpha)\Psi} \left[ \left( \delta - \frac{\kappa m}{1-\alpha} + h \right) T \right], \quad T = \frac{t}{t_0} \quad (1.28)$$

где (по смыслу задачи)  $\Psi$  — произвольная положительная, монотонно возрастающая функция; запись с переменной  $T$  выбрана для удобства определения  $\Psi$  из начальных данных при  $t = t_0$ .

Запишем (1.28) в переменных  $(r, t)$

$$\frac{u}{a_0} = \frac{1}{r^{2-\alpha}} \Psi(\xi), \quad \xi = r \left( 1 - \frac{\kappa m \Delta_0}{1-\alpha} \right) - a_0 (1 - h \Delta_0) t \quad (1.29)$$

совпадающий при  $h = 0$  с интегралом, указанным в [4].

Общий интеграл уравнения коротких упругих волн имеет вид

$$m = \delta \Phi(\delta T), \quad \text{или} \quad m = \frac{\Phi_0(\delta T)}{T} \quad (1.30)$$

где  $\Phi_0$  — произвольная функция. Или

$$\frac{u}{a_0} = \frac{\Phi_1(r - a_0 t)}{r} \quad (1.31)$$

Из сравнения (1.29) и (1.31) следует, что в области предельного состояния уменьшение амплитуд с расстоянием происходит обратно пропорционально  $r^{2-\alpha}$ , независимо от величины  $\kappa$ , которая определяет изменение скорости звука в зависимости от величины нагрузки, а в упругой среде — обратно пропорционально  $r$ .

Сравнение формул (1.10) и (1.13) показывает, что при  $\alpha = \nu / (1 - \nu)$  связи  $\sigma_r(\epsilon)$  в упругом и предельном состояниях почти не отличаются. Этот факт хорошо иллюстрируется опытами с быстрым нагружением, например, фиг. 1 из [8] (с увеличением скорости нагружения зависимость  $\sigma_r(\epsilon)$  изменяется от (5) к (1)). Но, как следует из изложенного, закон затухания амплитуд определяет не эта связь, а производная от  $\sigma_r$  по  $r$ , которая различна для упругого и предельного состояний.

В заключение этого параграфа приводим интегралы уравнений коротких волн в упругой среде и в среде в предельном состоянии.

*В цилиндрическом случае*

$$\frac{\partial m}{\partial \delta} + \frac{\partial e}{\partial \delta} = 0, \quad \frac{\partial m}{\partial \tau} - (\delta + \kappa m) \frac{\partial m}{\partial \delta} + \frac{2-\alpha}{2} m = 0 \quad (1.32)$$

Эти уравнения допускают общий интеграл ( $h = 0$ ,  $\psi(\tau) = 0$ , т. е.  $m = -e$ )

$$\delta = m^{2-\alpha} \Phi \left( m t^{\frac{2-\alpha}{2}} \right) + \frac{\alpha}{2} \kappa m \quad \text{или} \quad m = T^{\frac{\alpha-2}{2}} \Phi_0 \left[ \left( \delta - \frac{\alpha}{2} \kappa m \right) T \right] \quad (1.33)$$

Здесь  $\Phi_0$  — произвольная положительная, монотонно возрастающая функция. В цилиндрическом случае общий интеграл уравнения коротких упругих волн имеет вид

$$m = T^{-1/2} \Phi(\delta T)$$

что совпадает с главным членом асимптотического разложения известного решения для упругих волн.

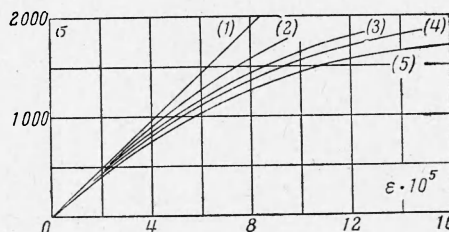
В случае плоской волны (или для волны в стержне, заключенном в жесткую оболочку) связи напряжений и деформаций в упругом и предельном состояниях не отличить, так как по-прежнему из непрерывности скоростей следует связь  $\alpha = v/(1 - v)$ , а поперечные деформации отсутствуют.

Уравнения коротких волн для среды в предельном состоянии будут отличаться от уравнений коротких упругих волн только слагаемым, учитывающим нелинейность объемного деформирования ( $l \neq 0$ ), которая влияет только на перестройку профиля напряжений и не влияет на затухание, если не учитывать разгрузку

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial \delta} + \frac{\partial e}{\partial \delta} &= 0 \\ \frac{\partial m}{\partial \tau} - (\delta + lm) \frac{\partial m}{\partial \delta} &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$m = \Phi[(\delta + lm)t] \quad (1.34)$$



Фиг. 1

Здесь  $\Phi$  — произвольная функция. Случай плоской упругой волны следует из (1.34) при  $l = 0$ .

Как в упругой среде, так и в среде, находящейся в предельном состоянии (без учета разгрузки), убывания амплитуд непрерывной плоской волны нагрузки с расстоянием не происходит. Это совпадает с известными фактами.

§ 2. п. 1. Исследуем влияние упругой разгрузки на затухание амплитуд в сферически-симметричной волне напряжений, область нагрузки которой описывается решением § 1.

Влияние необратимых потерь на снижение максимальных напряжений в сферическом (и цилиндрическом) случае может проявляться двояким образом:

1) в области нагрузки скорость распространения возмущений (скорость звука)  $a_1$  меньше, чем скорость звука  $a_0$  в покоящейся среде (или в зоне упругой разгрузки), из-за этого волна разгрузки все время снижает максимальные напряжения в волне;

2) наличие необратимых потерь при нагружении (предельное состояние среды) приводит к более быстрому снижению всех напряжений в зоне нагрузки по сравнению со случаем упругих (обратимых) деформаций. Как было показано выше, в области нагрузки происходит более быстрое снижение амплитуд всех напряжений по сравнению со снижением в упругой волне ( $r^{-(2-\alpha)}$ ,  $\alpha < 1$  вместо  $r^{-1}$ ).

Влияние волны разгрузки на уменьшение максимальных напряжений в волне напряжений определяется условиями отражения и преломления волн на границе области упругой разгрузки и области нагрузки. Влияние разгрузки зависит от разности в скоростях распространения возмущений и от относительной величины градиентов эпюры напряжений в области нагрузки и разгрузки [5, 6].

Зная решение задачи о распространении волны в области с предельным состоянием, для определения волны разгрузки надо решить краевую задачу для уравнений теории упругости (данные на одной из характеристик и данные на неизвестной кривой, близкой к характеристике второго семейства), что может быть выполнено численными методами (например, методом характеристик).

Если же иметь в виду только оценку влияния разгрузки на затухание максимальных амплитуд, можно воспользоваться следующим способом: вывести формулу для начальной скорости фронта разгрузки (по аналогии с выводом для плоской упруго-пластической волны [3, 6]), а затем по отклонению скорости фронта разгрузки от скорости звука оценить вклад разгрузки в убывание амплитуд.

п. 2. Выведем уравнения упругой разгрузки. Уравнения движения и неразрывности малых упругих деформаций имеют вид

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{u}{r} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

При разгрузке разности напряжений и деформаций подчиняются закону Гука

$$\begin{aligned} -(\sigma_r - \sigma_{r-}) &= (\lambda + 2\mu) \varepsilon - 4\mu\varepsilon_0 - (\lambda + 2\mu) \varepsilon_- + 4\mu\varepsilon_{0-} \\ -(\sigma_\theta + \sigma_{\theta-}) &= \lambda\varepsilon + 2\mu\varepsilon_0 - \lambda\varepsilon_- - 2\mu\varepsilon_{0-} \end{aligned} \quad (2.2)$$

где величины с индексом минус вычислены на фронте разгрузки  $t = f(r)$  со стороны области нагрузки ( $f(r)$  — неизвестная функция).

Используя связи напряжений и деформаций в области предельного состояния (не ограничивая общности вывода, полагаем ниже  $h = 0$ , так что  $\alpha = \nu / (1 - \nu)$ )

$$-\sigma_{r-} = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_- (1 + \lambda\varepsilon_-), \quad -\sigma_{\theta-} = \lambda\varepsilon_- (1 + \lambda\varepsilon_-) \quad (2.3)$$

Из (2.2) найдем

$$\begin{aligned} -\sigma_r &= (\lambda + 2\mu) \varepsilon - 4\mu\varepsilon_0 + (\lambda + 2\mu) \lambda\varepsilon_-^2 + 4\mu\varepsilon_{0-} \\ \sigma_r - \sigma_\theta &= -2\mu(\varepsilon - 3\varepsilon_0) - 2\mu\lambda\varepsilon_-^2 - 6\mu\varepsilon_{0-} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в уравнение движения (2.1), находим

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \rho_0 a_0^2 G(r) \quad (2.5)$$

где

$$G(r) = \left( \frac{a_1^2}{a_0^2} - 1 \right) \left[ \frac{\partial \varepsilon_-}{\partial r} + 2(1 - \alpha) \frac{\varepsilon_-}{r} \right] + 2(1 - \alpha) \frac{\varepsilon_-}{r} \quad (2.6)$$

Если ввести характеристические переменные

$$\xi = r - a_0 t, \quad \eta = r + a_0 t \quad (2.7)$$

в области упругой разгрузки, уравнения (2.1) можно записать в следующем виде

$$\frac{\partial F_1}{\partial \eta} = -\frac{u}{r} + a_0 \frac{G(r)}{2}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial \xi} = -\frac{u}{r} - a_0 \frac{G(r)}{2} \quad \begin{matrix} (F_1 = u - a_0 \varepsilon) \\ (F_2 = u + a_0 \varepsilon) \end{matrix} \quad (2.8)$$

Соотношения (2.8) представим в следующем виде, удобном для дальнейших выкладок:

вдоль характеристики  $\xi = \text{const}$

$$u = a_0 \varepsilon - \int_{\eta_1}^{\eta} \left[ \frac{u}{r} - a_0 \frac{G(r)}{2} \right] d\eta + D(\xi) \quad \left( r = \frac{\xi + \eta}{2} \right) \quad (2.9)$$

вдоль характеристики  $\eta = \text{const}$

$$u = -a_0 \varepsilon - \int_{\xi_1}^{\xi} \left[ \frac{u}{r} + a_0 \frac{G(r)}{2} \right] d\xi + E(\eta) \quad (2.10)$$

п. 3. Выведем формулу для начальной скорости разгрузки  $c$ , следуя способу, указанному в [6] для плоской волны разгрузки.

Пусть при  $r = r_0$  задана эпюра деформаций  $\varepsilon_0(t)$ , имеющая угловую точку при  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\max}$ ,  $t = t_0$ . В окрестности этой точки эпюру можно приближенно описать формулами (фиг. 2)

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \varepsilon_{\max} - k_1(t - t_0) & (t \leq t_0) \\ \varepsilon_0 &= \varepsilon_{\max} + k_2(t - t_0) & (t \geq t_0) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Нагрузка отвечает  $t \leq t_0$ , разгрузка —  $t \geq t_0$ ,  $k_1, k_2$  — положительные значения градиентов деформаций.



Решение задачи о разгрузке основано на совместном решении уравнений коротких волн для области предельного состояния и уравнений (2.9), (2.10) для упругой разгрузки с учетом краевых условий (2.11) при  $r = r_0$  и условий непрерывности скоростей частиц и деформаций на фронте разгрузки  $t = f(r)$ , положение которого не известно.

Пользуясь аппроксимациями (2.11), определим значения деформаций в точках  $A, B, C$  на характеристиках в области нагрузки и разгрузки соответственно, считая величины скоростей  $c$  и  $a_1$  постоянными на участке  $(r_0, r_0 + dr^*)$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_A &= \varepsilon_{\max} - k_1 \left( dt^* - \frac{dr^*}{a_1} \right) \\ \varepsilon_B &= \varepsilon_{\max} + k_2 \left( dt^* - \frac{dr^*}{a_0} \right) \\ \varepsilon_C &= \varepsilon_{\max} + k_2 \left( dt^* + \frac{dr^*}{a_0} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

В точке  $M(r_0 + dr^*, t_0 + dt^*)$  на фронте разгрузки вычислим деформацию и скорость частиц по формулам для области предельного состояния

$$\varepsilon = r^{-(2-\alpha)} \Psi [r - r_0 - a_1(t - t_0)], \quad u = -a_0 \varepsilon \quad (2.13)$$

Отсюда при помощи (2.11) для участка нагрузки следует

$$\varepsilon_- = \left( \frac{r_0}{r} \right)^{2-\alpha} \left\{ \varepsilon_{\max} - \frac{k_1}{a_1} [a_1(t - t_0) - (r - r_0)] \right\} \quad (2.14)$$

Так что на фронте разгрузки

$$r - r_0 = c(t - t_0) \quad \text{или} \quad dr^* = c dt^* \quad (c = dr/dt = 1/f')$$

будет

$$\varepsilon_M \approx \varepsilon_{\max} - (2 - \alpha) \varepsilon_{\max} \frac{dr^*}{r_0} - k_1 dt^* (1 - c/a_1) \quad (2.15)$$

$$u_M \approx u_{\max} - (2 - \alpha) u_{\max} \frac{dr^*}{r_0} + a_0 k_1 dt^* (1 - c/a_1) \quad (2.16)$$

с точностью до первых степеней  $dr^*$ ,  $dt^*$  включительно.

Определим «коэффициент отражения» волн в области упругой разгрузки от фронта разгрузки.

Из близости точек  $B$  и  $C$  к точке  $O$  следует

$$\begin{aligned} u_B - u_{\max} &= \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_0+0} (t_B - t_0) = I \left( 1 - \frac{c}{a_0} \right) dt^* \\ u_C - u_{\max} &= \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_0+0} (t_C - t_0) = I \left( 1 + \frac{c}{a_0} \right) dt^* \end{aligned} \quad (2.17)$$

где  $I$  — ускорение в начале разгрузки.

Отсюда

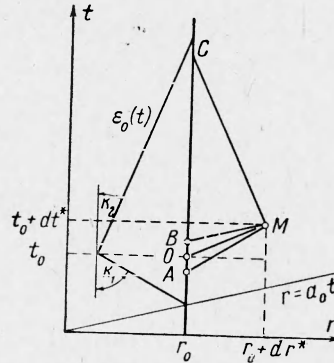
$$\frac{u_B - u_{\max}}{u_C - u_{\max}} = \frac{1 - c/a_0}{1 + c/a_0} \quad (2.18)$$

Для вычисления  $u_B - u_{\max}$  и  $u_C - u_{\max}$  воспользуемся соотношениями на характеристиках в области упругой разгрузки, вычислим  $u_B - u_M$  и  $u_C - u_M$  при помощи (2.9) и (2.10), а затем с помощью формулы (2.16) для  $u_M$  перейдем к требуемым величинам. Поскольку соотношение вдоль характеристик (2.9) и (2.10) применяется в малой окрестности точки  $(r_0, t_0)$ , интегралы в (2.9) и (2.10) вычисляются приближенно: подынтегральная функция вычисляется в точке  $M$  (или точке  $O$ ) и умножается на длину промежутка интегрирования  $2dr^*$ .

Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательные выражения

$$u_B - u_{\max} = a_0 k_2 (1 - c/a_0) dt^* + 2a_0 k_1 (1 - c/a_1) dt^* + G_1 a_0 k_1 dt^*$$

$$u_C - u_{\max} = -a_0 k_2 (1 + c/a_0) dt^* - 2a_0 \alpha \varepsilon_{\max} \frac{dr^*}{r_0} - G_1 a_0 k_1 dt^*$$



Фиг. 2

где

$$G_1 = \left( \frac{a_1^2}{a_0^2} - 1 \right) \left[ \frac{\varepsilon_{\max} c}{k_1 r_0} + \left( 1 - \frac{c}{a_1} \right) \right]$$

Подставляя эти выражения в (2.18), получим уравнение для неизвестной величины  $c$

$$\frac{1 - c/a_0}{1 + c/a_0} = \frac{(k_2/k_1)(1 + c/a_0) + 2(1 - c/a_1) + G_1}{-(k_2/k_1)(1 + c/a_0) + 2\alpha U - G_1} \quad \left( U = -\frac{\varepsilon_{\max} c}{k_1 r_0} \right) \quad (2.19)$$

Величина  $U$ , как легко показать, будет малой вследствие короткости волны. Действительно для эпоры с линейным нарастанием величины деформации  $U = s_1 / r_0$ , так что  $U$  имеет порядок малости  $\Delta_0$ .

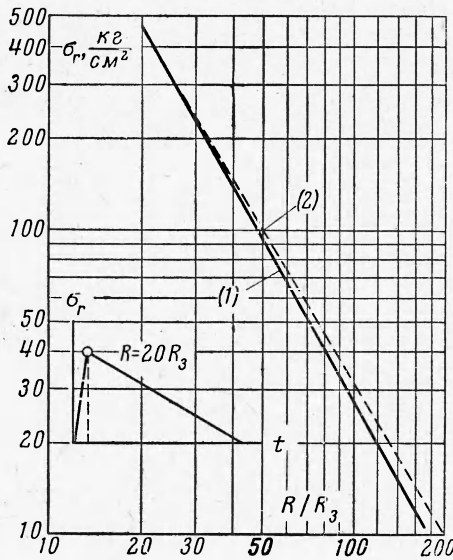
Используя опытные данные о близости величины  $c$  и  $a_0$  ( $1 - c/a_0 = \omega_1$ ,  $\omega_1 \ll 1$ ) и предполагая, что  $1 - a_1/a_0 = \omega_2$ ,  $\omega_2 \ll 1$ , из (2.19) получаем с точностью до малых порядка произведений  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\Delta_0$

$$\frac{c}{a_1} - 1 = \frac{k_2}{k_1} \left( 1 - \frac{c}{a_0} \right) \quad (2.20)$$

т. е. скорость фронта разгрузки тем ближе к скорости распространения деформаций в предельной области  $a_1$ , чем меньше  $k_2/k_1$  — отношение градиентов в области разгрузки и нагрузки — и чем меньше  $\omega_1$  — отклонение скорости распространения максимума  $c$  от  $a_0$ .

Формула (2.20) совпадает с аналогичной формулой для плоской волны разгрузки [5, 6], если в последней считать  $\omega_2 \ll 1$ . Совпадение (2.20) с результатами для плоской волны является следствием короткости волны нагрузки.

Применение (2.20) к оценке влияния разгрузки на затухание максимальных амплитуд волн напряжений при взрывах в прочных горных породах показывает, что это влияние незначительно, так как на близких расстояниях, где  $\omega_1 \sim 0.1$ , мало отношение



Фиг. 3

к  $k_2/k_1$ , а на дальних расстояниях, где  $k_2/k_1 \sim 0.26 - 0.3$ , весьма мала разность  $1 - c/a_0$ . Для оценки влияния разгрузки был произведен следующий расчет, в котором были использованы экспериментальные эпоры напряжений [3]. Закон затухания максимальных напряжений по этим данным представлен зависимостью 1 (фиг. 3). В качестве начальной эпоры была взята эпора напряжений на расстоянии  $20 R_*$ , показанная на фиг. 3. Используя экспериментальные данные о величинах  $k_2$  и  $k_1$  и о скоростях  $a_0$  и  $c$ , при помощи формулы (2.20) было вычислено уменьшение максимальной амплитуды за счет разгрузки на всех расстояниях от места взрыва. Для промежуточных расстояний между опытными кривыми производилась интерполяция. Таким образом была определена зависимость 2 (фиг. 3), которая соответствует изменению максимального напряжения без влияния разгрузки.

На расстоянии  $150 R_*$ , как видно из фиг. 3, амплитуда напряжений, измеренная в опыте, равна  $13.8 \text{ кг/см}^2$ , без учета влияния разгрузки амплитуда  $\sigma_r = 16 \text{ кг/см}^2$ . Если рассчитать затухание амплитуд без учета перехода горной породы в предельное состояние в области нагрузки (т. е. для упругой среды), то амплитуда напряжений была бы равна  $62 \text{ кг/см}^2$ .

В литературе [7] были высказаны замечания по поводу нашей статьи с Н. С. Медведевой [4], в которой были изложены предварительные результаты исследований волн нагрузки в горных породах. Эти замечания относились к связи  $\alpha$  и  $\nu$  и возможному влиянию разгрузки (которое не оценивалось в [4]). Эта критика заставила вернуться к задаче о волнах напряжений и еще раз пересмотреть основные выводы работы [4]. Как может отметить читатель, все основные утверждения [4] верны.

Автор приносит искреннюю благодарность С. А. Христиановичу за ценные советы и указания, сделанные при выполнении настоящей работы.

Поступила 1 IV 1963

## ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С. А. Ударная волна на больших расстояниях от места взрыва. ПММ, 1956, № 6.
2. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
3. Ханукаев А. Н., Ванягин И. Ф., Гоголев В. М., Маркин В. Г. О распространении волн напряжений при взрыве в твердых породах. Зап. Ленингр. горн. ин-та им. Г. В. Плеханова, 1961, т. XIV, вып. 1.
4. Медведева Н. С., Шемякин Е. И. Волны нагрузки при подземном взрыве в горных породах. ПМТФ, 1961, № 6.
5. Рахматуллин Х. А., Ю. А. Демьянов. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. 1961.
6. Бидерман В. Л. Расчеты на ударную нагрузку. Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении. Сб. под ред. С. Д. Пономарева. Машгиз, 1952.
7. Григорьян С. С., Гриб А. А., Зволинский Н. В., Качанов Л. М., Петрашень Г. И. О работах Е. И. Шемякина «Расширение газовой полости в несжимаемой упруго-пластической среде (к изучению действия взрыва на грунт)» и Н. С. Медведевой и Е. И. Шемякина «Волны нагрузки при подземном взрыве в горных породах». Изв. АН СССР, сер. Механика и машиностроение, 1962, № 5.
8. Glanville W. The creep or flow of reinforced concrete, London, 1930.

## ПРИБЛИЖЕННОЕ УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В. М. Гоголев, В. Г. Мыркин, Г. И. Яблокова

(Ленинград)

В ряде задач, связанных с изучением сильных ударных волн в твердых телах, необходимы сведения об их термодинамических свойствах при высоких нагрузках. В настоящее время для изучения указанных свойств широкое распространение получил так называемый метод ударного сжатия [1-10]. Этот метод позволяет получить ударную адиабату для исследуемого материала. Используя ударную адиабату и теоретическую модель твердого тела в приближении Дебая или в более точном приближении, можно получить уравнение состояния и другие термодинамические соотношения.

Большое разнообразие твердых материалов и недостаточная изученность их свойств при ударном сжатии ставят вопрос о рассмотрении возможности обобщения экспериментальных данных и получения унифицированных соотношений, описывающих термодинамические свойства определенного класса твердых материалов, которые позволили бы произвести экстраполяцию этих свойств на другие материалы. Такое обобщение в точном смысле едва ли возможно. Однако для задач прикладного характера во многих случаях оказывается достаточным наличие приближенных сведений по этому вопросу.

Ниже приводятся результаты обобщения экспериментальных данных [1-10] по ударному сжатию металлов, горных пород и ряда других твердых материалов. Предлагается единая ударная адиабата для указанных материалов. На основе теоретической модели твердого тела в приближении Дебая и ударной адиабаты дается обобщенное уравнение состояния, выражение для внутренней энергии и ряд других термодинамических соотношений для твердых тел. Эти результаты носят приближенный характер.

§ 1. Обобщенная ударная адиабата. В настоящее время достаточно подробно изучена ударная сжимаемость металлов [1-5, 8-10]. Кроме того, в опубликованной литературе имеются экспериментальные данные по ударному сжатию ряда горных пород [6, 11] и некоторых других твердых материалов [6, 7]. Рассмотрим возможность их обобщения и получения единой ударной адиабаты. Для сопоставления указанных данных необходимо их привести к безразмерному виду. В качестве размерных параметров, которые характеризовали бы вид твердого материала, представляется рациональным выбрать скорость звука  $c_0$  в невозмущенной среде и плотность  $\rho_0$ .

На фиг. 1 приведены экспериментальные точки по ударному сжатию твердых пород и родственных им материалов в системе координат

$$\Delta P = \frac{P - P_0}{\rho_0 c_0^2}, \quad M = \frac{u}{c_0}$$