ПМТФ, № 1, 1970

УРАВНЕНИЯ РАДИАЦИОННОГО ПЕРЕНОСА В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Ю. И. Морозов

(Москва)

Выведены уравнения, описывающие взаимодействие излучения с веществом в условиях произвольно большой неравновесности как в локально сопутствующей системе в рамках специальной теории относительности, так и в сопутствующей системе на основе общековариантного формализма. При этом были корректно учтены эффекты взаимодействия возникающего излучения с движущимся веществом. Вычисления проведены для случая одной пространственной координаты; обобщение на трехмерный случай производится довольно легко.

В работах [1-3] движение учитывалось в классе инерциальных систем, в результате чего из рассмотрения выпадали важные эффекты, связанные с ускорением и пространственным изменением скорости, наиболее характерные для ударных волн. В работах [1,4] было показано, как можно произвести учет локальной неинерциальности в условиях, близких к равновесным. Приближенный вывод аналогичных уравнений для случая локальной неинерциальности приведен в работе [5].

1. Локально сопутствующая система. Имея в виду переход в дальнейшем к случаю сопутствующей системы, выберем метрику двухмерного пространства и времени в виде, наиболее часто употребляемом в общей теории относительности

$$ds^2 = -(dx^1)^2 + (d\tau)^2 \tag{1.1}$$

Здесь ds — интервал между событиями, dx^1 — элемент длины в лабораторной системе L_0, $d\tau = dx^4 = cdt$ — умноженный на скорость света c временной промежуток в той же системе. Тогда контравариантные компоненты 4-скорости частицы в системе L_0 примут вид

$$u^1 = \frac{\partial x^1}{\partial s} = \beta\theta, \qquad u^4 = \frac{\partial \tau}{\partial s} = \theta, \qquad \theta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{1.2}$$

где β — отношение скорости частицы к скорости света. Из (1.1) следует, что метрический тензор g_{ik} в системе L_0 имеет вид

$$g_{ik} = g^{ik} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Таким образом, пространственные ковариантные компоненты всех 4-векторов будут отличаться по знаку от контравариантных, а временные будут совпадать. Например, $u_1 = -u^1$, $u_4 = u^4$. Из (1.1) и (1.2) следует также соотношение

$$(u^4)^2 - (u^1)^2 = 1 \tag{1.4}$$

Локально сопутствующая система S_0 с пространственной координатой $\xi_0{}^1$ и временной координатой $\tau_0 = \xi_0{}^4 = ct_0$ связана с лабораторной системой L_0 преобразованиями Лоренца для дифференциалов координат

$$d\xi_0{}^1 = u^4 dx^1 - u^1 d\tau, \qquad d\tau_0 = -u^1 dx^1 + u^4 d\tau \tag{1.5}$$

Легко видеть, что метрический тензор в S_0 сохраняет вид (1.3). Из (1.5) находятся следующие производные:

$$\frac{\partial \xi_0^1}{\partial x^1} = u^4, \quad \frac{\partial \xi_0^1}{\partial \tau} = -u^1, \quad \frac{\partial \tau_0}{\partial x^1} = -u^1, \quad \frac{\partial \tau_0}{\partial \tau} = u^4 \tag{1.6}$$

Из обратных формул

$$dx^1 = u^4 d\xi_0^1 + u^1 d\tau_0, \qquad d\tau = u^1 d\xi_0^1 + u^4 d\tau_0 \tag{1.7}$$

найдем

$$\frac{\partial x^1}{\partial \xi_0^1} = u^4, \quad \frac{\partial x^1}{\partial \tau_0} = u^1, \quad \frac{\partial \tau}{\partial \xi_0^1} = u^1, \quad \frac{\partial \tau}{\partial \tau_0} = u^4 \tag{1.8}$$

Формулы (1.6), (1.8) определяют элементы матриц преобразования компонент тензоров. Если q^i есть 4-вектор, $q_\alpha{}^i$, q^{ij} — тензоры второго ранга, то формулы перехода будут иметь вид (индекс 0 означает компоненту тензора, определенного в системе S_0)

$$q_0{}^i = q^\alpha \frac{\partial \xi_0{}^i}{\partial x^\alpha}, \qquad q^i = q_0{}^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial \xi_0{}^\alpha}, \qquad q_{0i} = q_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi_0{}^i}, \qquad q_i = q_{0\alpha} \frac{\partial \xi_0{}^\alpha}{\partial x^i},$$

$$q_{0\alpha}^{i} = q_s{}^r \frac{\partial \xi_0{}^i}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \xi_0{}^\alpha}$$

$$q_\alpha{}^i = q_{0s}{}^r \frac{\partial x^i}{\partial \xi_0{}^r} \frac{\partial \xi_0{}^s}{\partial x^\alpha}, \qquad q_0{}^{ij} = q^{rs} \frac{\partial \xi_0{}^i}{\partial x^r} \frac{\partial \xi_0{}^j}{\partial x^s}, \qquad q^{ij} = q_0{}^{rs} \frac{\partial x^i}{\partial \xi_0{}^r} \frac{\partial x^j}{\partial \xi_0{}^s} \tag{1.9}$$

Пользуясь этими формулами, легко получить связь между дифференциальными операторами в различных системах координат

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = u^4 \frac{\partial}{\partial \tau_0} - u^1 \frac{\partial}{\partial \xi_0^1}, \quad \frac{\partial}{\partial x^1} = -u^1 \frac{\partial}{\partial \tau_0} + u^4 \frac{\partial}{\partial \xi_0^1}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau_0} = u^4 \frac{\partial}{\partial \tau} + u^1 \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_0^1} = u^1 \frac{\partial}{\partial \tau} + u^4 \frac{\partial}{\partial x^1} \tag{1.10}$$

Применяя формулы (1.10), легко получить связь между пространственными и временными производными компонент 4-скорости в различных системах

$$\frac{\partial u_0^1}{\partial \xi_0^1} = \frac{\partial u^4}{\partial \tau} + \frac{\partial u^1}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial u_0^1}{\partial \tau_0} = \frac{\partial u^1}{\partial \tau} + \frac{\partial u^4}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial u_0^4}{\partial \xi_0^1} = 0, \quad \frac{\partial u_0^4}{\partial \tau_0} = 0 \tag{1.11}$$

Из этих формул видно, что локально сопутствующая система S_0 характеризуется, кроме того что $u_0{}^1 = 0$, $u_0{}^4 = 1$, еще и тем, что в ней касательный вектор к мировой линии частицы постоянен.

Аналогично

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^1} = (u^4)^2 \frac{\partial u_0^1}{\partial \xi_0^1} - u^1 u^4 \frac{\partial u_0^1}{\partial \tau_0}, \qquad \frac{\partial u^1}{\partial \tau} = -u^1 u^4 \frac{\partial u_0^1}{\partial \xi_0^1} + (u^4)^2 \frac{\partial u_0^1}{\partial \tau_0}$$

$$\frac{\partial u^4}{\partial x^1} = u^1 u^4 \frac{\partial u_0^1}{\partial \xi_0^1} - (u^1)^2 \frac{\partial u_0^1}{\partial \tau_0}, \qquad \frac{\partial u^4}{\partial \tau} = -(u^1)^2 \frac{\partial u_0^1}{\partial \xi_0^1} + u^1 u^4 \frac{\partial u_0^1}{\partial \tau_0} \tag{1.12}$$

Теперь легко получить уравнения радиационной гидродинамики в системе S_0. Тензор энергии-импульса идеальной жидкости, как известно, дается формулой

$$T^{ik} = (p + \varepsilon) u^i u^k - g^{ik} p \tag{1.13}$$

где внутренняя энергия ε и давление p представляют собой скаляры.

Уравнения сохранения импульса и энергии есть

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = q^i \tag{1.14}$$

Здесь q^i есть 4-вектор энергии-импульса, переданных излучению от вещества.

Тензорная связь между компонентами имеет вид

$$\begin{aligned} &T^{11} = T_0^{11}(u^4)^2 + T_0^{44}(u^1)^2, && T^{14} = (T_0^{11} + T_0^{44})u^1u^4 \\ &T^{44} = T_0^{11}(u^1)^2 + T_0^{44}(u^4)^2, && T_0^{11} = p,\ T_0^{44} = \varepsilon \\ &q^4 = q_0^1u^1 + q_0^4u^4, && q^1 = q_0^1u^4 + q_0^4u^1 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Поэтому уравнение импульса в системе S_0 можно получить, применив в уравнении (1.14) формулы (1.15), (1.10), (1.12), в результате найдем, что уравнение

$$\frac{\partial T^{14}}{\partial \tau} + \frac{\partial T^{11}}{\partial x^1} = q^1$$

перейдет в уравнение

$$u^4 \frac{\partial p}{\partial \xi_0^1} + u^1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau_0} + (p+\varepsilon)\left[u^4 \frac{\partial u_0^1}{\partial \tau_0} + u^1 \frac{\partial u_0^1}{\partial \xi_0^1}\right] = u^4q_0^1 + u^1q_0^4 \tag{1.16}$$

Аналогично этому уравнение энергии

$$\frac{\partial T^{44}}{\partial \tau} + \frac{\partial T^{14}}{\partial x^1} = q^4$$

перейдет в

$$u^1 \frac{\partial p}{\partial \xi_0^1} + u^4 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau_0} + (p+\varepsilon)\left[u^1 \frac{\partial u_0^1}{\partial \tau_0} + u^4 \frac{\partial u_0^1}{\partial \xi_0^1}\right] = u^1q_0^1 + u^4q_0^4 \tag{1.17}$$

Совместное решение (1.16), (1.17) даст

$$\frac{\partial p}{\partial \xi_0^1} + (p+\varepsilon)\frac{\partial u_0^1}{\partial \tau_0} = q_0^1, \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau_0} + (p+\varepsilon)\frac{\partial u_0^1}{\partial \xi_0^1} = q_0^4 \tag{1.18}$$

Эти уравнения отличаются от уравнений, приведенных в [6], только ненулевой правой частью.

Уравнение непрерывности в системе S_0 примет известный вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau_0} + \rho \frac{\partial u_0^1}{\partial \xi_0^1} = 0 \tag{1.19}$$

Уравнения переноса излучения в системе L_0 имеют вид

$$\frac{\partial W^{ik}}{\partial x^k} = -q^i \tag{1.20}$$

где W^{ik} — тензор энергии-импульса излучения, а вектор q^i определен выше. На основе формул (1.9) можно получить связи

$$\begin{aligned} W^{44} &= W_0^{44}(u^4)^2 + 2u^1u^4W_0^{14} + (u^1)^2W_0^{11} \\ W^{14} &= W_0^{44}u^1u^4 + W_0^{14}(u^4u^4 + u^1u^1) + u^1u^4W_0^{11} \\ W^{11} &= W_0^{44}(u^1)^2 + 2u^1u^4W_0^{14} + (u^4)^2W_0^{11} \end{aligned} \tag{1.21}$$

Используя (1.21) и предыдущую процедуру получения формул в системе S_0, найдем, что уравнения энергии и импульса излучения примут вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial W_0^{44}}{\partial \tau_0} + \frac{\partial W_0^{14}}{\partial \xi_0^1} + (W_0^{44} + W_0^{11})\frac{\partial u_0^1}{\partial \xi_0^1} + 2W_0^{14}\frac{\partial u_0^1}{\partial \tau_0} = -q_0^4 \\ &\frac{\partial W_0^{14}}{\partial \tau_0} + \frac{\partial W_0^{11}}{\partial \xi_0^1} + (W_0^{44} + W_0^{11})\frac{\partial u_0^1}{\partial \tau_0} + 2W_0^{14}\frac{\partial u_0^1}{\partial \xi_0^1} = -q_0^1 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Эти уравнения можно привести к тензорному виду, допускающему обобщение на многомерный случай

$$\frac{\partial W_0^{ik}}{\partial \xi_0^k} + \left(W_0^{kj} u_{0k} \frac{\partial u_0^i}{\partial \xi_0^j} - W_0^{kj} u_0^i \frac{\partial u_{0k}}{\partial \xi_0^j}\right) + \left(W_0^{ik} u_{0k} \frac{\partial u_0^j}{\partial \xi_0^j} - W_0^{ik} u_0^j \frac{\partial u_{0k}}{\partial \xi_0^j}\right) = -q_0^i \tag{1.23}$$

4-вектор передачи энергии-импульса вещества в излучение с учетом эффектов рассеяния был получен ранее в работе [7]

$$-q_0^i = \alpha_0 u_0^i \frac{4\pi}{c} B_0 + \sigma_0 u_0^i u_{0k} u_{0j} W_0^{kj} - (\alpha_0 + \sigma_0) u_{0k} W_0^{ik} \tag{1.24}$$

Здесь B_0 — проинтегрированная по частоте функция Планка; α_0, σ_0 — линейные коэффициенты поглощения и рассеяния излучения покоящимся веществом соответственно. Используя (1.18) и (1.22), можно записать законы сохранения полного тензора энергии-импульса вещества и излучения

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(T^{ik} + W^{ik}) = 0$$

в системе S_0 в виде

$$\frac{\partial}{\partial \tau_0}(\varepsilon + W_0^{44}) + \frac{\partial W_0^{14}}{\partial \xi_0^1} + (p + \varepsilon + W_0^{11} + W_0^{44}) \frac{\partial u_0^1}{\partial \xi_0^1} + 2W_0^{14} \frac{\partial u_0^1}{\partial \tau_0} = 0 \tag{1.25}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_0^1}(p + W_0^{11}) + \frac{\partial W_0^{14}}{\partial \tau_0} + (p + \varepsilon + W_0^{11} + W_0^{44}) \frac{\partial u_0^1}{\partial \tau_0} + 2W_0^{14} \frac{\partial u_0^1}{\partial \xi_0^1} = 0$$

Эти уравнения совместно с уравнениями переноса (1.23) и уравнением непрерывности (1.19) представляют собой полную систему, описывающую взаимодействие излучения с веществом в локально сопутствующей системе координат. Она не замкнута. Для ее замыкания необходимо вводить дополнительную связь между компонентами тензора энергии-импульса излучения. Очень полезно получить формулы (1.22) другим путем — непосредственно из уравнения переноса. Кроме доказательства справедливости формул, этот путь дает возможность детально проследить физическую природу возникающих дополнительных членов, а также в случае слабой неравновесности получить формулы вязкости излучения.

Как показано в работах [7, 8], уравнение переноса для интегральной интенсивности излучения I в лабораторной системе L_0 с учетом процессов рассеяния имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial}{\partial x^1}\right) I = -(\alpha_0 + \sigma_0) IL + \alpha_0 \frac{B_0}{L^3} + \frac{\sigma_0}{AL^3} \times$$

$$\times [(u^4)^2 W^{44} - 2u^1 u^4 W^{14} + (u^1)^2 W^{11}]$$

$$L = u^4 - \mu u^1, \qquad A = \frac{8\pi}{c \rho_0 v_0^2} \tag{1.26}$$

$$W^{11} = \frac{A}{2} \int_{-1}^{1} I \mu^2 d\mu, \qquad W^{14} = \frac{A}{2} \int_{-1}^{1} I \mu d\mu, \qquad W^{44} = \frac{A}{2} \int_{-1}^{1} I d\mu \tag{1.27}$$

Здесь μ — косинус угла между направлением движения вещества и направлением испускания кванта излучения, ρ_0, v_0 — некоторые характерные плотность вещества и скорость. При переходе к локально сопутствующей системе S_0, в которой элемент вещества покоится, компоненты тензора энергии-импульса излучения W^{ik} преобразуются по формулам, аналогичным (1.21), а остальные величины — по следующим формулам [2]:

$$I=\frac{I_0}{L^4},\quad \mu=\frac{\mu_0 u^4+u^1}{u^4+\mu_0 u^1},\quad \mu_0=\frac{\mu u^4-u^1}{u^4-\mu u^1};\quad d\mu=L^2 d\mu_0$$

$$L=u^4-\mu u^1=\frac{1}{u^4+\mu u^1},\quad \frac{\partial}{\partial\tau}+\mu\frac{\partial}{\partial x^1}=L\left(\frac{\partial}{\partial\tau_0}+\mu_0\frac{\partial}{\partial\xi_0^1}\right) \tag{1.28}$$

Используя эти формулы, можно найти, что в системе S_0 уравнение переноса примет вид

$$L^4\left(\frac{\partial}{\partial\tau_0}+\mu_0\frac{\partial}{\partial\xi_0^1}\right)\frac{I_0}{L^4}=-(\alpha_0+\sigma_0)I_0+\alpha_0 B_0+\frac{\sigma_0}{A}W_0^{44} \tag{1.29}$$

Используя формулы (1.12), легко получить производную от L

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau_0}+\mu_0\frac{\partial}{\partial\xi_0^1}\right)L=\frac{1}{L}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\mu\frac{\partial}{\partial x^1}\right)L=\frac{1}{L}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\mu\frac{\partial}{\partial x^1}\right)u^4-\mu\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\mu\frac{\partial}{\partial x^1}\right)u^1\right]=-L\mu_0\left(\frac{\partial u_0^1}{\partial\tau_0}+\mu_0\frac{\partial u_0^1}{\partial\xi_0^1}\right) \tag{1.30}$$

Поэтому уравнение (1.29) можно переписать в более детальном виде

$$\frac{\partial I_0}{\partial\tau_0}+\mu_0\frac{\partial I_0}{\partial\xi_0^1}+4I_0\mu_0\left(\frac{\partial u_0^1}{\partial\tau_0}+\mu_0\frac{\partial u_0^1}{\partial\xi_0^1}\right)=-(\alpha_0+\sigma_0)I_0+\alpha_0 B_0+\frac{\sigma_0}{A}W_0^{44} \tag{1.31}$$

Поскольку в уравнения радиационной гидродинамики входят величины W_0^{ik}, необходимо (1.31) проинтегрировать по $d\mu_0$. Однако следует учесть, что дифференциал $d\mu_0$ нельзя вносить под знак дифференцирования, так как фиксированной величиной является дифференциал $d\mu$. Очевидно, необходимо применять более сложную процедуру, а именно

$$d\mu_0(\nabla_0\Phi_0)=\nabla_0(\Phi_0 d\mu_0)-\Phi_0\nabla_0(d\mu_0)=\nabla_0(\Phi_0 d\mu_0)-$$
$$-\Phi_0 d\mu\nabla_0(1/L^2)=\nabla_0(\Phi_0 d\mu_0)-2\Phi_0\mu_0 d\mu_0\nabla_0 u_0^1 \tag{1.32}$$

Здесь Φ_0 — произвольная функция от μ_0, ξ_0^1 и τ_0, ∇_0 — пространственный или временной линейный дифференциальный оператор. Аналогично этому, используя инвариантность μ и $d\mu$, получаем

$$\mu_0\nabla_0\Phi_0=\nabla_0(\mu_0\Phi_0)+\Phi_0(1-\mu_0^2)\nabla_0 u_0^1 \tag{1.33}$$

Пользуясь этими правилами, можно умножить уравнение (1.31) на $d\mu_0$ и $\mu_0 d\mu_0$, и привести к виду, удобному для перехода к интегральным величинам. В результате получим два уравнения

$$\frac{\partial}{\partial\tau_0}(I_0 d\mu_0)+\frac{\partial}{\partial\xi_0^1}(I_0\mu_0 d\mu_0)+2I_0\mu_0 d\mu_0\frac{\partial u_0^1}{\partial\tau_0}+I_0 d\mu_0\frac{\partial u_0^1}{\partial\xi_0^1}+ \tag{1.34}$$
$$+I_0\mu_0^2 d\mu_0\frac{\partial u_0^1}{\partial\xi_0^1}=-(\alpha_0+\sigma_0)I_0 d\mu_0+\alpha_0 B_0 d\mu_0+\frac{\sigma_0}{A}W_0^{44}d\mu_0$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau_0}(I_0\mu_0 d\mu_0)+\frac{\partial}{\partial\xi_0^1}(I_0\mu_0^2 d\mu_0)+I_0(1+\mu_0^2)d\mu_0\frac{\partial u_0^1}{\partial\tau_0}+$$
$$+2I_0\mu_0 d\mu_0\frac{\partial u_0^1}{\partial\xi_0^1}=-(\alpha_0+\sigma_0)I_0\mu_0 d\mu_0+\alpha_0 B_0\mu_0 d\mu_0+\frac{\sigma_0}{A}W_0^{44}\mu_0 d\mu_0$$

Переходя к компонентам W_0^{ik} по формулам, аналогичным (1.27), получаем уравнения (1.22)

$$\frac{\partial W_0^{44}}{\partial \tau_0} + \frac{\partial W_0^{14}}{\partial \xi_0^1} + 2W_0^{14}\frac{\partial u_0^1}{\partial \tau_0} + (W_0^{44} + W_0^{11})\frac{\partial u_0^1}{\partial \xi_0^1} = \\ = \alpha_0(AB_0 - W_0^{44}) = -q_0^4 \tag{1.35}$$

$$\frac{\partial W_0^{14}}{\partial \tau_0} + \frac{\partial W_0^{11}}{\partial \xi_0^1} + (W_0^{44} + W_0^{11})\frac{\partial u_0^1}{\partial \tau_0} + 2W_0^{14}\frac{\partial u_0^1}{\partial \xi_0^1} = \\ = -(\alpha_0 + \sigma_0)W_0^{14} = -q_0^1$$

Описанным методом можно получить уравнения и для более высоких моментов. Так, если ввести моменты третьего и четвертого порядка

$$M_0 = \frac{A}{2}\int_{-1}^{1} I_0\mu_0^3 d\mu_0, \qquad N_0 = \frac{A}{2}\int_{-1}^{1} I_0\mu_0^4 d\mu_0 \tag{1.36}$$

то, умножая (1.31) на $\mu_0^2 d\mu_0$, можно аналогично получить уравнение

$$\frac{\partial W_0^{11}}{\partial \tau_0} + \frac{\partial M_0}{\partial \xi_0^1} + 2W_0^{14}\frac{\partial u_0^1}{\partial \tau_0} + 3W_0^{11}\frac{\partial u_0^1}{\partial \xi_0^1} - N_0\frac{\partial u_0^1}{\partial \xi_0^1} = \\ = -(\alpha_0 + \sigma_0)W_0^{11} + \alpha_0\frac{AB_0}{3} + \frac{\sigma_0 W_0^{44}}{3} \tag{1.37}$$

Уравнения (1.35), (1.37) для статических условий ($\nabla_0 = 0$) дают следующие значения моментов:

$$W_0^{44} = AB_0, \quad W_0^{14} = 0, \quad W_0^{11} = {}^1/_3 AB_0$$

Для M_0 и N_0 эти значения можно получить, интегрируя с соответствующими множителями правые части уравнений (1.34)

$$M_0 = 0, \qquad N_0 = {}^1/_5 AB_0$$

Если взять эти значения моментов в качестве нулевого приближения, то для первого приближения трех главных моментов получим из уравнений (1.35), (1.37) выражения, совпадающие с выражениями из работы [3] при $\sigma_0 = 0$

$$\frac{1}{A}\overline{W}_0^{44} = B_0 - \frac{1}{\alpha_0}\frac{\partial B_0}{\partial \tau_0} - \frac{4B_0}{3\alpha_0}\frac{\partial u_0^1}{\partial \xi_0^1}$$

$$\frac{1}{A}\overline{W}_0^{14} = -\frac{1}{3(\alpha_0+\sigma_0)}\frac{\partial B_0}{\partial \xi_0^1} - \frac{4B_0}{3(\alpha_0+\sigma_0)}\frac{\partial u_0^1}{\partial \tau_0} \tag{1.38}$$

$$\frac{1}{A}\overline{W}_0^{11} = \frac{1}{3}B_0 - \frac{1}{3(\alpha_0+\sigma_0)}\frac{\partial B_0}{\partial \tau_0} - \frac{4B_0}{5(\alpha_0+\sigma_0)}\frac{\partial u_0^1}{\partial \xi_0^1}\left(\frac{5\sigma_0}{9\alpha_0} + 1\right)$$

Последний член в выражении для $\overline{W}_0^{11}$ интерпретировался как вязкость излучения. Все приведенные выше уравнения сохраняют свой вид, если вывод их начинать не с уравнения (1.26), а с уравнения для спектральной интенсивности излучения I_ν.

2. Сопутствующая система. Для определения сопутствующей системы воспользуемся формализмом, развитым в работе Л. И. Седова [9]. Введем две системы координат — инерциальную систему $K(x^i, x^4 = \tau)$ с метрикой (1.1) и подвижную сопутствующую систему $L(\xi^{[i]}, \xi^{[4]})$ с метрикой

$$ds^2 = g_{[ik]}d\xi^{[i]}d\xi^{[k]} \tag{2.1}$$

Координаты x^i, $\xi^{[i]}$ взяты в одном и том же псевдоэвклидовом пространстве, т. е. существуют функциональные соотношения $x^i = x^i\,(\xi^{[i]}$,

$\xi^{[4]}$), определяющие закон движения рассматриваемого континуума. Этот закон можно определить в явном виде, если считать, что в некоторый момент времени $\xi^{[4]} = \xi^*$ во всем трехмерном пространстве пространственная координата $\xi^{[i]}$ системы L совпадает с декартовой координатой x^i системы K, а дифференциалы собственных времен связаны между собой соотношениями Лоренца для совпадающих точек, т. е. для связи координат этих систем получаем при $\xi^{[4]} = \xi^*$

$$dx^1 = d\xi^{[1]} + u^1 d\xi^{[4]}, \qquad d\tau = u^4 d\xi^{[4]} \tag{2.2}$$

где u^i есть 4-скорость точек системы L относительно системы K. Таким образом, система K — это некоторое фиксированное положение деформированного континуума, относительно которого движется система L, характеризуемая тем, что 4-скорость точек, определенных относительно нее, дается выражениями

$$u^{[1]} = \frac{d\xi^{[1]}}{ds} = 0, \qquad u^{[4]} = \frac{d\xi^{[4]}}{ds} = 1 \tag{2.3}$$

Подстановка соотношений (2.2) в определение (2.1) дает возможность получить метрический тензор $g_{[ik]}$

$$g_{[ik]} = \begin{pmatrix} -1 & -u^1 \\ -u^1 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{[ik]} = \begin{pmatrix} -1/u_4^2 & -u^1/u_4^2 \\ -u^1/u_4^2 & 1/u_4^2 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

В системе L все дифференциальные операции должны быть определены ковариантным образом, для чего необходимо вычислить символы Кристоффеля

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial\xi^{[\alpha]}\partial\xi^{[\beta]}} \frac{\partial\xi^{[\nu]}}{\partial x^i} \tag{2.5}$$

Первые производные определяются из соотношений (2.2) и обратных им

$$\frac{\partial x^1}{\partial\xi^{[1]}} = 1, \qquad \frac{\partial x^1}{\partial\xi^{[4]}} = u^1, \qquad \frac{\partial\tau}{\partial\xi^{[4]}} = u^4, \qquad \frac{\partial\tau}{\partial\xi^{[1]}} = 0$$

$$\frac{\partial\xi^{[1]}}{\partial x^1} = 1, \qquad \frac{\partial\xi^{[1]}}{\partial\tau} = -\frac{u^1}{u^4}, \qquad \frac{\partial\xi^{[4]}}{\partial x^1} = 0, \qquad \frac{\partial\xi^{[4]}}{\partial\tau} = \frac{1}{u^4} \tag{2.6}$$

Вторые производные, входящие в определение (2.5), вычисляются несколько сложнее, особенно смешанные, например

$$\left.\frac{\partial^2 x^1}{\partial\xi^{[4]}\partial\xi^{[1]}}\right|_{\xi^*} = \frac{1}{d\xi^*}\left[\left.\frac{\partial x^1}{\partial\xi^{[1]}}\right|_{\xi^*+d\xi^*} - \left.\frac{\partial x^1}{\partial\xi^{[1]}}\right|_{\xi^*}\right] =$$

$$= \frac{1}{d\xi^{[*]}}\left[\frac{\partial(x^1 + u^1 d\xi^*)}{\partial\xi^{[1]}} - \frac{\partial x^1}{\partial\xi^{[1]}}\right] = \frac{\partial u^1}{\partial\xi^{[1]}}$$

$$\left.\frac{\partial^2\tau}{\partial\xi^{[4]}\partial\xi^{[1]}}\right|_{\xi^*} = \frac{1}{d\xi^*}\left[\left.\frac{\partial\tau}{\partial\xi^{[1]}}\right|_{\xi^*+d\xi^*} - \left.\frac{\partial\tau}{\partial\xi^{[1]}}\right|_{\xi^*}\right] = \frac{1}{d\xi^*}\left[\frac{\partial(u^4 d\xi^*)}{\partial\xi^{[1]}}\right] = \frac{\partial u^4}{\partial\xi^{[1]}}$$

В результате имеем

$$\frac{\partial^2 x^1}{\partial\xi^{[4]2}} = \frac{\partial u^1}{\partial\xi^{[4]}}, \qquad \frac{\partial^2 x^1}{\partial\xi^{[4]}\partial\xi^{[1]}} = \frac{\partial u^1}{\partial\xi^{[1]}}, \qquad \frac{\partial^2 x^1}{\partial\xi^{[1]2}} = 0,$$

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial\xi^{[4]2}} = \frac{\partial u^4}{\partial\xi^{[4]}}, \qquad \frac{\partial^2\tau}{\partial\xi^{[1]}\partial\xi^{[4]}} = \frac{\partial u^4}{\partial\xi^{[1]}}, \qquad \frac{\partial^2\tau}{\partial\xi^{[1]2}} = 0 \tag{2.7}$$

Как в (2.6), так и в (2.7) все производные берутся при $\xi^{[4]} = \xi^*$. Используя эти формулы, легко получить

$$\Gamma^1_{11} = 0, \qquad \Gamma^1_{14} = \frac{1}{u_4^2}\frac{\partial u^1}{\partial \xi^{[1]}}, \qquad \Gamma^1_{44} = \frac{1}{u_4^2}\frac{\partial u^1}{\partial \xi^{[4]}}$$

$$\Gamma^4_{11} = 0, \qquad \Gamma^4_{14} = \frac{1}{u_4}\frac{\partial u^4}{\partial \xi^{[1]}}, \qquad \Gamma^4_{44} = \frac{1}{u_4}\frac{\partial u^4}{\partial \xi^{[4]}} \tag{2.8}$$

Чтобы получить связи, аналогичные (1.12), можно использовать соотношения $u^1 \nabla u^1 = u^4 \nabla u^4$, вытекающие из (1.4). Здесь ∇ — произвольный дифференциальный оператор. Тогда, вводя обозначения для факторов ускорения и деформации, получаем

$$\Gamma^1_{14} = D, \qquad \Gamma^1_{14} = u^1 D, \qquad \Gamma^1_{14} = F, \ \Gamma^4_{44} = u^1 F$$

$$D = \frac{1}{u_4^2}\frac{\partial u^1}{\partial \xi^{[1]}}, \qquad F = \frac{1}{u_4^2}\frac{\partial u^1}{\partial \xi^{[4]}} \tag{2.9}$$

Так как вследствие (2.3) $u^{[4]} \nabla u^{[4]} = u^{[1]} \nabla u^{[1]} = 0$, то из определения ковариантной производной

$$u^i_{;l} = \frac{\partial u^{[i]}}{\partial \xi^{[l]}} + \Gamma^i_{kl} u^{[k]} \frac{\partial u^{[l]}}{\partial \xi^{[l]}} + \Gamma^i_{4l}$$

найдем соотношения

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^1} = \frac{\partial u^{[1]}}{\partial \xi^{[1]}} + D, \qquad \frac{\partial u^1}{\partial \tau} = \frac{\partial u^{[1]}}{\partial \xi^{[4]}} + F, \qquad \frac{\partial u^4}{\partial x^1} = u^1 D, \qquad \frac{\partial u^4}{\partial \tau} = u^1 F \tag{2.10}$$

Использование связи $u^1 \nabla u^1 = u^4 \nabla u^4$ дает

$$\frac{\partial u^{[1]}}{\partial \xi^{[1]}} = D(u^4 - 1), \qquad \frac{\partial u^{[1]}}{\partial \xi^{[4]}} = F(u^4 - 1) \tag{2.11}$$

и поэтому из (2.10) следует

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^1} = u^4 \frac{\partial u^{[1]}}{\partial \xi^{[1]}}, \qquad \frac{\partial u^1}{\partial \tau} = u^4 \frac{\partial u^{[1]}}{\partial \xi^{[4]}}, \qquad \frac{\partial u^4}{\partial x^1} = \frac{u^1}{u^4 - 1} \times$$

$$\times \frac{\partial u^{[1]}}{\partial \xi^{[1]}}, \qquad \frac{\partial u^4}{\partial \tau} = \frac{u^1}{u^4 - 1}\frac{\partial u^{[1]}}{\partial \xi^{[4]}} \tag{2.12}$$

Эти связи дают возможность представить коэффициенты D и F в любом желаемом виде

$$D = \frac{1}{u_4^2}\frac{\partial u^1}{\partial \xi^{[1]}} = \frac{1}{u^4 - 1}\frac{\partial u^{[1]}}{\partial \xi^{[1]}} = \frac{1}{u^4(u^4 - 1)}\frac{\partial u^1}{\partial x^1},$$

$$F = \frac{1}{u_4^2}\frac{\partial u^1}{\partial \xi^{[4]}} = \frac{1}{u^4 - 1}\frac{\partial u^{[1]}}{\partial \xi^{[4]}} = \frac{1}{u^4(u^4 - 1)}\frac{\partial u^1}{\partial \tau} \tag{2.13}$$

При переходе к системе L все тензорные и векторные величины должны преобразовываться в соответствии с правилами (1.9) с применением формул (2.6).

В результате легко получить

$$W^{11} = W^{[11]} + 2u^1 W^{[14]} + (u^1)^2 W^{[44]}, \quad W^{14} = u^4 W^{[14]} + u^1 u^4 W^{[44]}, \quad W^{44} = (u^4)^2 W^{[44]}, q^1 = q^{[1]} + u^1 q^{[4]}, \ q^4 = u^4 q^{[\ ]}$$

$$W^{[11]} = W^{11} - \frac{2u^1}{u^4} W^{14} + \left(\frac{u^1}{u^4}\right)^2 W^{44}, \qquad W^{[14]} = \frac{1}{u^4} W^{14} - \frac{u^1}{u^4} W^{44}$$

$$W^{[44]} = \frac{1}{u_4^2} W^{44}, \qquad q^{[1]} = q^1 - \frac{u^1}{u^4} q^4, \qquad q^{[4]} = \frac{1}{u^4} q^4 \tag{2.14}$$

Уравнения моментов в системе L имеют вид

$$\frac{\partial W^{[\alpha k]}}{\partial \xi^{[k]}} + \Gamma^{\alpha}_{mk} W^{[mk]} + \Gamma^{m}_{km} W^{[\alpha k]} = -q^{[\alpha]} \tag{2.15}$$

В развернутом виде эти уравнения примут следующую форму:

$$\frac{\partial W^{[44]}}{\partial \xi^{[4]}} + \frac{\partial W^{[14]}}{\partial \xi^{[1]}} + 3u^1 D W^{[14]} + (D + 2u^1 F) W^{[44]} = -q^{[4]} \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial W^{[14]}}{\partial \xi^{[4]}} + \frac{\partial W^{[11]}}{\partial \xi^{[1]}} + u^1 D W^{[11]} + (3D + u^1 F) W^{[14]} + F W^{[44]} = -q^{[1]}$$

Гидродинамические уравнения будут аналогичны уравнениям (2.15), (2.16), если только заменить $W^{[ik]}$ на $T^{[ik]}$, а $q^{[i]}$ на $(-q^{[i]})$. Если воспользоваться при этом формулами (2.14), или определением $T^{[ik]} = (p + \varepsilon) u^{[i]} u^{[k]} - g^{[ik]} p$, то компоненты тензора T^{ik} окажутся равными

$$T^{[11]} = \frac{1}{u_4{}^2} p, \quad T^{[14]} = \frac{u^1}{u_4{}^2} p, \quad T^{[44]} = \varepsilon + p \frac{(u^1)^2}{u_4{}^2} \tag{2.17}$$

Подставляя эти формулы в уравнения (2.16) для $T^{[ik]}$, получаем гидродинамические уравнения в сопутствующей системе S в виде

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi^{[4]}} + \frac{u^1}{u_4{}^2} \frac{\partial p}{\partial \xi^{[1]}} + \left(\frac{u^1}{u^4}\right)^2 \frac{\partial p}{\partial \xi^{[4]}} + \varepsilon (D + 2u^1 F) + p\left[D + 2u^1 F + 2D\left(\frac{u^1}{u^4}\right)^2\right] = q^{[4]}$$

$$\frac{u^1}{u_4{}^2} \frac{\partial p}{\partial \xi^{[4]}} + \frac{1}{u_4{}^2} \frac{\partial p}{\partial \xi^{[1]}} + \varepsilon F + p\left[F + D\left(\frac{u^1}{u^4}\right)^2\right] = q^{[1]} \tag{2.18}$$

Нетрудно видеть, что в частном случае для покоящейся точки ($u^1 \equiv 0$, $u^4 \equiv 1$), который соответствует локально сопутствующей системе, получаются уравнения (1.18). Уравнения (2.16), (2.18) совместно с определениями (2.14) и (2.17) описывают взаимодействие излучения с неравномерно движущимся деформируемым континуумом. Для замыкания системы уравнений необходимо постулировать связь между компонентами тензора энергии-импульса излучения, и предположение Эддингтона $W^{[11]} = {}^1/_3 W^{[44]}$ является наиболее обоснованным именно в системе S.

Поступила 30 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Thomas L. H. The radiation field in a fluid in a motion. Quart. J. Math. Oxford Series, 1930, vol. 1, p. 239.
2. Прокофьев В. А. Уравнение переноса в релятивистской радиационной гидродинамике. Докл. АН СССР, 1961, т. 140, № 5.
3. Имшенник В. С., Морозов Ю. И. Тензор энергии-импульса излучения в движущейся среде при условиях, близких к равновесным. ПМТФ, 1963, № 3.
4. Имшенник В. С., Морозов Ю. И. Структура ударной волны с учетом переноса импульса и энергии излучением. ПМТФ, 1964, № 2.
5. Сэмпсон Д. Уравнения переноса энергии и количества движения в газах с учетом излучения. М., «Мир», 1969.
6. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика, М., «Наука», 1967.
7. Морозов Ю. И. Учет томсоновского рассеяния в релятивистском уравнении переноса для серой материи и структура стационарной ударной волны. ПМТФ, 1966, № 4.
8. Имшенник В. С., Морозов Ю. И. Релятивистски ковариантные уравнения взаимодействия излучения с веществом. Астрон. ж., 1969, № 4.
9. Седов Л. И. О пондеромоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учетом конечности деформаций. ПММ, 1965, т. 29, № 4.