ПМТФ, № 4, 1966

УЧЕТ ТОМСОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ УРАВНЕНИИ ПЕРЕНОСА ДЛЯ СЕРОЙ МАТЕРИИ И СТРУКТУРА СТАЦИОНАРНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Ю. И. Морозов

(Москва)

На основе релятивистски ковариантного уравнения переноса излучения получены точные релятивистские уравнения переноса для компонент тензора энергии — импульса излучения. При этом коэффициенты поглощения и рассеяния излучения средой, в качестве которой брался идеальный газ, считались не зависящими от частоты излучения. В качестве углового приближения было использовано предположение Эддингтона. Полученная система уравнений применена к исследованию структуры стационарной ударной волны сверхкритической амплитуды. Получена качественная картина изменения гидродинамических и радиационных характеристик во всей зоне ударной волны. Найдено, что в случае преобладания рассеяния над поглощением излучение действует на газ как непрозрачный поршень и тем самым ограничивает радиационное затухание ударной волны.

Для астрофизических явлений часто бывают характерны значительные скорости макроскопического движения высокотемпературного газа и большие плотности энергии излучения. Релятивистски ковариантное уравнение переноса, учитывающее в общем случае эти эффекты, было впервые получено Томасом [1]. В случае одномерного движения в фиксированной системе координат оно имеет вид

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \mu\frac{\partial}{\partial x}\right) I_\nu = -\alpha_{\nu_0} I_\nu L + \alpha_{\nu_0}\frac{B_{\nu_0}}{L^2} - \sigma_{\nu_0} I_\nu L +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} d\mu_1 \int\limits_0^\infty \sigma_{\nu_1}\Omega(\mu, \nu, \mu_1, \nu_1)\, I_{\nu_1}(\mu_1)\, d\nu_1, \qquad L = \theta(1-\beta\mu), \qquad \theta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{1}$$

Здесь I_ν — спектральная интенсивность излучения частоты ν; μ — косинус угла между направлениями движения газа и испускания излучения; α_{ν_0}, σ_{ν_0} — линейные коэффициенты поглощения и рассеяния излучения для покоящегося газа; B_{ν_0} — функция Планка, появляющаяся вследствие гипотезы о локальном термодинамическом равновесии; $\Omega(\mu, \nu, \mu_1, \nu_1)$ — функция переизлучения; β — отношение скорости газа к скорости света. Величины в фиксированной и собственной системах отсчета связаны соотношениями [1,2]

$$\nu = \frac{\nu_0}{L}, \quad d\nu = \frac{d\nu_0}{L}, \quad d\mu = L^2\, d\mu_0, \quad \alpha_\nu = \alpha_{\nu_0} L, \quad \sigma_\nu = \sigma_{\nu_0} L,$$

$$\Omega(\mu, \nu, \mu_1, \nu_1) = \Omega_0(\mu_0, \nu_0, \mu_{10}, \nu_{10})\frac{L_1}{L^2} \qquad L_1 = \theta(1-\beta\mu_1) \tag{2}$$

Предположим теперь, что коэффициенты поглощения и рассеяния излучения для покоящегося газа не зависят от частоты, т. е. $\alpha_{\nu_0} = \alpha_0$ и $\sigma_{\nu_0} = \sigma_0$ (приближение «серой материи» и томсоновского рассеяния), α_0 и σ_0 считаются некоторыми заданными функциями плотности и температуры газа, определяемыми конкретными условиями. Предположим, далее, что рассеяние является когерентным, т. е. происходит без изменения частоты, и изотропным. Тогда функцию переизлучения в собственной системе координат можно записать в виде

$$\Omega = (\mu_0, \nu_0, \mu_{10}, \nu_{10}) = \delta(\nu_0 - \nu_{10})$$

Преобразуем в уравнении (1) член переизлучения в соответствии с правилами (2). Так как $\nu_{10} = \nu_1 L_1$ и $\nu_0 = \nu L$, то

$$\delta(\nu_{10} - \nu_0) = \frac{1}{L_1}\delta\left(\nu_1 - \nu\frac{L}{L_1}\right)$$

и, следовательно, в фиксированной системе координат будем иметь

$$\sigma_{\nu_1}\Omega(\mu, \nu, \mu_1, \nu_1) = \frac{\sigma_0 L_1}{L^2}\delta\left(\nu_1 - \nu\frac{L}{L_1}\right) \tag{3}$$

Используя (3) в уравнении (1), получим уравнение переноса для спектральной интенсивности излучения:

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \mu\frac{\partial}{\partial x}\right)I_\nu = -(\alpha_0 + \sigma_0) I_\nu L + \alpha_0\frac{B_0}{L^2} + \frac{\sigma_0}{L^2}\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} L_1 I_{\nu L/L_1}(\mu_1)\,d\mu_1 \tag{4}$$

Интегрируя (4) по частоте ν и проводя в последнем члене замену $\nu L / L_1 = \nu'$, получим для интегральной интенсивности излучения I уравнение переноса в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + \mu\frac{\partial}{\partial\xi}\right)I = -IL + \alpha\frac{B_0}{L^3} + \frac{\varkappa\theta^2}{L^3}\int\limits_{-1}^{1} I(\mu_1)\,[1 - 2\beta\mu_1 + \beta^2\mu_1^2]\,d\mu_1$$

$$B_0 = \frac{\sigma}{\pi}T_0^4, \quad \alpha = \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \sigma_0}, \quad \varkappa = \frac{\sigma_0}{\alpha_0 + \sigma_0} \quad (\alpha + \varkappa = 1) \tag{5}$$

$$d\tau = c(\alpha_0 + \sigma_0)\,dt, \quad d\xi = (\alpha_0 + \sigma_0)\,dx, \quad I = \int\limits_0^\infty I_\nu d\nu$$

Здесь σ — константа Стефана—Больцмана, T_0 — температура покоящегося газа.

Из этого уравнения нетрудно получить систему уравнений для угловых моментов интенсивности I, составляющих тензор энергии — импульса излучения. Введем для этого, следуя [3], обозначения:

$$J = \frac{4\pi}{\rho_0 D^2 c}\int\limits_{-1}^{1} I\,d\mu, \quad S = \frac{4\pi}{\rho_0 D^2 c}\int\limits_{-1}^{1} I\mu\,d\mu, \quad K = \frac{4\pi}{\rho_0 D^2 c}\int\limits_{-1}^{1} I\mu^2\,d\mu$$

$$T = \frac{T_0}{T_\infty}, \quad \delta_1 = \frac{8\sigma T_\infty^4}{3c\rho_0 D^2} \tag{6}$$

Здесь ρ_0, D, T_∞ — некоторые константы размерности плотности, скорости и температуры, соответственно, J и K суть безразмерные плотность энергии излучения и давление излучения (диагонализированный тензор плотности потока импульса излучения) в единицах $\rho_0 D^2$, а S — безразмерная плотность потока энергии излучения в единицах $\rho_0 D^2 c$.

Применим к уравнению (5) интегральные операторы

$$\frac{4\pi}{\rho_0 D^2 c}\int\limits_{-1}^{1}(\ldots)\,d\mu, \qquad \frac{4\pi}{\rho_0 D\, c}\int\limits_{-1}^{1}(\ldots)\,\mu\,d\mu$$

Используя интегралы

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\mu}{L^3} = \frac{1}{2\theta^3}\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\mu}{(1 - \beta\mu)^3} = \theta, \qquad \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mu\,d\mu}{L^3} = \beta\theta$$

получим: (7)

$$\frac{\partial J}{\partial\tau} + \frac{\partial S}{\partial\xi} = \theta^3\{\beta[\beta(J + K) - S(1 + \beta^2)] + \alpha[B_0 - J + 2\beta S - \beta^2(B_0 + K)]\}$$

$$\frac{\partial S}{\partial\tau} + \frac{\partial K}{\partial\xi} = \theta^3\{[\beta(J + K) - S(1 + \beta^2)] + \alpha\beta[B_0 - J + 2\beta S - \beta^2(B_0 + K)]\}$$

Правые части этих уравнений становятся физически ясными, если использовать тензорные связи между компонентами тензора энергии — импульса в различных системах координат [2]

$$J_0 = \theta^2 (J - 2\beta S + \beta^2 K), \qquad S_0 = \theta^2 [S (1 + \beta^2) - \beta \ (J + K)],$$
$$K_0 = \theta^2 (K - 2\beta S + \beta^2 J) \tag{8}$$

Тогда уравнения (7) примут вид:

$$\frac{\partial J}{\partial \tau} + \frac{\partial S}{\partial \xi} = \theta [-\beta S_0 + \alpha (B_0 - J_0)], \quad \frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{\partial K}{\partial \xi} = \theta [-S_0 + \alpha\beta (B_0 - J_0)] \tag{9}$$

Если пренебречь релятивистской зависимостью температуры, то можно представить $B_0 = 3\delta_1 T^4$. Если под температурой T_∞ подразумевать температуру, при которой существует равновесие между излучением и газом, то условие равновесия в собственной системе координат есть $S_0 = 0$; $J_0 = 3\delta_1$, $K_0 = \delta_1$, а соответствующие им условия равновесия в фиксированной системе координат, согласно (8), есть

$$J = \frac{3\delta_1}{1 - \beta^2}\left(1 + \frac{\beta^2}{3}\right), \qquad S = \frac{4\beta\delta_1}{1 - \beta^2}, \qquad K = \delta_1 \frac{1 + 3\beta^2}{1 - \beta^2} \tag{10}$$

Система (9) не замкнута. Для ее замыкания необходимо постулировать дополнительную связь между радиационными величинами. В покоящемся газе в качестве такой связи принимается соотношение $J_0 = 3K_0$, известное как приближение Эддингтона. Эта связь является распространением на неравновесные условия соотношения, строго справедливого только в равновесных условиях. В качестве аналогичного соотношения в фиксированной системе можно принять связь

$$J = K \frac{3 + \beta^2}{1 + 3\beta^2} \tag{11}$$

вытекающую из равновесных значений (10).

Таким образом, уравнения (7) и (11) представляют собой релятивистские уравнения для излучения в модифицированном приближении Эддингтона. Эти уравнения в нерелятивистском виде:

$$\begin{gathered} 3\frac{\partial K}{\partial \tau} + \frac{\partial S}{\partial \xi} = \alpha [3 (\delta_1 T^4 - K) - 2\beta (4\beta K - S)] + \beta (4\beta K - S) \\ \frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{\partial K}{\partial \xi} = 3\alpha\beta (\delta_1 T^4 - K) + (4\beta K - S) \end{gathered} \tag{12}$$

с граничными условиями

$$K = \delta_1, \qquad S = 4\beta\delta_1 \tag{13}$$

В первом из этих уравнений сохранены члены порядка β^2, чтобы данные граничные условия (13) удовлетворялись точно.

Применим полученную систему уравнений к задаче о структуре фронта мощной стационарной ударной волны. Пусть среда, по которой движется ударная волна с постоянной скоростью D, представляет собой бесконечный слой идеального газа плотности ρ_0, с показателем адиабаты $1 < \gamma < 2$ (для эффективного учета ионизации вещества), и с нулевой начальной температурой. После прохождения ударной волны газ имеет окончательную температуру T_∞ и плотность ρ_1. Тем самым величинам, входящим в определение (6), придан четкий физический смысл. Начальные параметры газа соответствуют оптической координате $\xi = +\infty$, конечные — координате $\xi = -\infty$. Разрыв расположен в центре системы координат $\xi = 0$.

Введем определения:

$$\eta = \frac{\rho_0}{\rho}, \quad A = \frac{RT_1}{\mu D^2}, \quad r = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad q = \frac{D}{c}, \quad G = r\left(\frac{S}{q} + 1\right) \tag{14}$$

где ρ — плотность газа, R — универсальная газовая постоянная, μ —

молекулярный вес газа. Тогда в принятых обозначениях первые интегралы радиационной гидродинамики имеют вид [3]:

$$\beta = -q\eta, \qquad AT = \eta\left(1 - \eta - \frac{1}{2}K\right), \qquad G = AT\,\frac{1+r}{r} + \eta^2 \tag{15}$$

С использованием этих соотношений система стационарных радиационных уравнений (12) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{d\xi} &= -\frac{r}{q}\left[3\alpha\,(K - \delta_1 T^4) + q^2\eta\,(2\alpha - 1)\left(\frac{G}{r} - 1 + 4K\eta\right)\right] \\ \frac{dK}{d\xi} &= q\left[3\alpha\eta\,(K - \delta_1 T^4) - \left(\frac{G}{r} - 1 + 4K\eta\right)\right] \end{aligned} \tag{16}$$

Граничные условия для системы (16) имеют вид

$$\begin{gathered} K = T = 0, \quad \eta = 1, \quad G = r, \quad \xi = +\infty \\ K = \delta_1, \quad T = 1, \quad \eta = \eta_1, \quad G = r\,(1 - 4\delta_1\eta_1), \quad \xi = -\infty \end{gathered} \tag{17}$$

Свойства системы (16) для случая $\alpha = 1$ (чистое поглощение без рассеяния) подробно исследованы в работе [1].

Особенностью этого случая является то, что в фазовых плоскостях (G, K) или (T, η) выпадает из рассмотрения конкретная зависимость коэффициента поглощения α_0 от параметров газа. В самом деле, исследуемое нелинейное уравнение в фазовой плоскости (G, K) имеет вид:

$$\begin{gathered} \frac{dG}{dK} = -\frac{r}{q^2}\,\frac{3\alpha P(\eta) + q^2\eta\,(2\alpha - 1)\,Q(\eta)}{3\alpha\eta P(\eta) - Q(\eta)} \\ P(\eta) = K - \delta_1 T^4, \qquad Q(\eta) = \frac{G}{r} - 1 + 4K\eta \end{gathered} \tag{18}$$

В случае $\alpha = 1$ свойства поглощающей среды входят только в определение оптической толщины ξ. Исследование удобно провести в фазовой плоскости (T, η). Использование уравнений (15) приводит к соотношению

$$\frac{dT}{d\eta} = \frac{1}{A}\left[\frac{dG}{dK}\left(1 - 2\eta - \frac{1}{2}K\right) - r\eta^2\right]\left[\frac{dG}{dK} + \eta\,\frac{1+r}{2}\right]^{-1} \tag{19}$$

Подставляя сюда (18), получаем (20)

$$\frac{dT}{d\eta} = \frac{1}{A}\,\frac{3\alpha\,(1 - 2\eta - {}^1\!/_2K)(1 + q^2\eta^2)\,P(\eta) + q^2\eta\,[(2\alpha - 1)(1 - 2\eta - {}^1\!/_2K) - \eta]\,Q(\eta)}{3\alpha\,[1 - q^2\eta^2(1 + r)/2r]\,P(\eta) + q^2\eta\,[2\alpha + (1 - r)/2r]\,Q(\eta)}$$

Отсюда видно, что если α равно или порядка 1, то при условии $K \gg \delta_1 T^4$ (сильная неравновесность) членами порядка q^2 можно пренебречь и получившееся уравнение имеет своим первым интегралом выражение $(AT + \eta^2)/\eta = \mathrm{const}$. Это, согласно (15), не что иное, как условие постоянства радиационного давления. Следовательно, в условиях, далеких от равновесия, интегральная кривая должна быть близка к кривой постоянного K [4]. Однако, состояние газа меняется между граничными точками равновесия, определяемыми условиями (17). Поэтому изменение радиационного давления K от 0 до δ_1 должно происходить вблизи кривой лучистого равновесия $K = \delta_1 T^4$. В плоскости (T, η) это уравнение имеет вид

$$T^4 + 4mT - 3n = 0, \qquad m = \frac{A}{2\delta_1\eta}, \qquad n = \frac{2(1 - \eta)}{3\delta_1} \tag{21}$$

Решение этого уравнения есть (22)

$$T = \left(\frac{m}{\sqrt{y}} - y\right)^{1/2} - \sqrt{y}, \qquad y = \frac{1}{2}\left\{\sqrt[3]{\sqrt{m^4 + n^3} + m^2} - \sqrt[3]{\sqrt{m^4 + n^3} - m^2}\right\}$$

Качественное исследование особых точек (17) показывает, что начальная точка при всех возможных параметрах задачи остается седлом.

Конечная точка равновесия при выполнении неравенства

$$A > \eta^2{}_1\,(1 - r)\,(1 + r)^{-1}$$

---

[1] Морозов Ю. И. Некоторые нелинейные задачи релятивистской радиационной гидродинамики. Канд. дис., М., 1965.

также является седлом. Физический смысл этого неравенства состоит в утверждении, что в конечной точке равновесия скорость газа меньше адиабатической скорости звука. При этом должно возникать разрывное решение. До разрыва интегральная кривая идет вблизи кривой лучистого равновесия (22), практически совпадая с ней (в порядке q^2), за разрывом интегральная кривая идет вблизи кривой постоянного радиационного давления равного предельному значению δ_1. Эта кривая дается, как это следует из (15), уравнением

$$AT = \eta\,(1 - \eta - {}^1/_2\,\delta_1) \qquad (23)$$

Отсюда видно, что температура за разрывом выше температуры в конечной точке и может достигать максимального значения T_m в точке η_m

$$T_m = \frac{1}{4A}\left(1 - \frac{1}{2}\delta_1\right)^2, \qquad \eta_m = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\delta_1\right) \qquad (24)$$

если эта точка лежит в области за разрывом.

Поток излучения в области за разрывом и до разрыва определяется соответственно выражениями

$$G = \eta\,[(1 + r)(1 - {}^1/_2\,\delta_1) - \eta], \qquad G = \eta\,[(1 + r)(1 - {}^1/_2\,\delta_1\,T^4) - \eta] \qquad (25)$$

Здесь $T(\eta)$ вычисляется из (22).

Обращение к исходным уравнениям (16) показывает, что оптическая толщина равновесной зоны до разрыва имеет порядок δ_1/q, т. е. очень велика, а оптическая толщина зоны за разрывом порядка q/δ_1, т. е. эта зона почти прозрачна и температурный пик за разрывом по оптической толщине очень узок.

Такая картина хода интегральных кривых получается, как отмечалось выше, для α порядка единицы. Но, как следует из уравнений (18), эта картина будет сохраняться и для малых α порядка q. При этом отклонение интегральных кривых от кривых лучистого равновесия и постоянного K будет также порядка q (точнее, порядок отклонения будет равен q^2/α).

В случае очень малых α (т. е. в условиях, когда рассеяние существенно больше поглощения, что имеет место при очень больших температурах) картина хода интегральных линий имеет иной вид.

Прежде всего, случай $\alpha = 0$ (чистое рассеяние) имеет особый характер, поскольку при этом исходное нелинейное уравнение не имеет особых точек, соответствующих точкам равновесия. Уравнение (20) для $\alpha = 0$ интегрируется точно:

$$T = \mathrm{const}\cdot\eta^{-\frac{2r}{1-r}} = C\eta^{1-\gamma} \qquad (26)$$

Это решение соответствует адиабатическому изменению термодинамических параметров газа. При этом излучение становится не зависимым от вещества и действует на него как поршень. Импульс излучения за счет рассеяния просто передается среде, и, таким образом, рассеяние является фактором, препятствующим радиационному торможению ударной волны.

В области преобладающего рассеяния ход величин описывается уравнениями

$$K = 2\left[1 - \eta - C\eta^{-\frac{1+r}{1-r}}\right], \qquad G = \eta\left[(1 + r)\,C\eta^{-\frac{1+r}{1-r}} + \eta r\right] \qquad (27)$$

и уравнением (26).

Однако эта область не может включать в себя точку конечного равновесия. В малой окрестности этой точки, как показывает качественный анализ, интегральная кривая идет вблизи кривой $K = \delta_1$, как и в случае $\alpha \approx 1$, и только затем, на расстояниях порядка q^2 приближается к кривой чистого рассеяния. Если осуществляется разрывное решение, т. е. выполняется неравенство

$$A > \eta_1^2\,(1 - r)\,(1 + r)^{-1}$$

то области чистого рассеяния не могут прилегать к разрыву с обеих сторон, поскольку условие непрерывности G и K на разрыве в этом случае дает только непрерывное решение.

Исследуя уравнение (20), нетрудно получить в этом случае уравнение, приближенно описывающее область, прилегающую к разрыву со стороны невозмущенного газа, для случая преобладания рассеяния ($\alpha \ll q^2$). Эта область описывается уравнением

$$G / r - 1 + 4K\eta = O(\alpha / q^2) \tag{28}$$

и, следовательно, величины в этой области удовлетворяют уравнениям

$$AT = \frac{r}{1-7r}(1-\eta)(1-7\eta), \quad K = \frac{2}{\eta}\,\frac{(1-\eta)(\eta-r)}{1-7r}$$
$$G = r\left[1 - 8\,\frac{(1-\eta)(\eta-r)}{1-7r}\right] \tag{29}$$

Следует отметить, что области чистого рассеяния, лежащие по разные стороны разрыва, имеют существенно различный характер изменения величин. В самом деле, из уравнения (20) следует, что для этих областей

$$\frac{dG}{dK} = -r\eta \tag{30}$$

Используя уравнения (15), нетрудно получить

$$\frac{dK}{d\eta} = \frac{2}{\eta^2}\left(AT\,\frac{1+r}{1-r} - \eta^2\right) = -2\left(1 - \frac{c_s^2}{v^2}\right)$$
$$\frac{dG}{d\eta} = -\frac{2r}{\eta}\left(AT\,\frac{1+r}{1-r} - \eta^2\right) = 2r\eta\left(1 - \frac{c_s^2}{v^2}\right) \tag{31}$$

Здесь c_s — адиабатическая скорость звука, v — скорость газа. Из условий устойчивости разрыва следует, что до разрыва справедливо соотношение $v^2 > c_s^2$ (сверхзвуковое течение), а за разрывом — $v^2 < c_s^2$.

Поэтому из формул (31) следует, что в области чистого рассеяния до разрыва справедливы неравенства $dK / d\eta < 0$, $dG / d\eta > 0$, а в области за разрывом — неравенства $dK / d\eta > 0$, $dG / d\eta < 0$.

Сшивка всех упомянутых областей дает приближенное решение задачи о структуре ударной волны с достаточно высокой степенью точности.

В работе, указанной в ссылке на стр. 45, исследовалась структура сильной ударной волны в нестационарном случае при распространении по плоскому слою спадающей плотности. Было показано, что эффекты излучения в случае чистого поглощения препятствуют кумуляции энергии ударной волны и могут не только остановить бесконечное возрастание температуры и скорости газа на скачке при приближении его к границе области, но даже привести к падению этих величин по мере приближения к границе.

Рассмотренный эффект влияния рассеяния излучения на структуру ударной волны показывает, что учёт рассеяния совершенно необходим в задачах подобного рода и может привести к изменению качественной картины, поскольку будет препятствовать радиационному торможению ударной волны. Автор благодарит В. С. Имшенника за интерес и участие в работе.

Поступила 9 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Thomas L. H. The radiation field in a fluid in a motion. Quart. J. Math. Oxford series, 1930, vol. 1.
2. Имшенник В. С., Морозов Ю. И. Тензор энергии-импульса излучения в движущейся среде при условиях, близких к равновесию. ПМТФ, 1963, № 3.
3. Имшенник В. С., Морозов Ю. И. Структура ударной волны с учетом переноса импульса и энергии излучением. ПМТФ, 1964, № 2.
4. Райзер Ю. П. О структуре фронта сильных ударных волн в газах. Ж. эксп. и теор. физ., 1957, т. 32, № 5.