

## ЛИТЕРАТУРА

1. Васенин И. М., Рычков А. Д. Численное решение задачи о течении смеси газа и частиц в осесимметричном сопле Лавалья.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1973, № 5, с. 178—181.
2. Копченов В. И., Крайко А. Н. Решение в рамках двухжидкостной модели прямой задачи о двухфазном течении в сопле Лавалья.—«Труды НИИ Механики МГУ», 1974, № 32.
3. Крайко А. Н., Ткаленко Р. А. К решению прямой задачи теории сопла Лавалья для двухфазной смеси при малом отставании частиц.— ПМТФ, 1973, № 4, с. 89—100.
4. Hoglund R. F. Recent advances in gas-particle nozzle flows.—«ARS J.», 1962, vol. 32, N 5, p. 662—671.

УДК 533.6.011+536.423.4

### ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАНСЗВУКОВОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

Г. А. Салтанов, Р. А. Ткаленко  
(Москва)

Конденсация пересыщенного пара в трансзвуковом потоке может привести к нестационарности течения. Это обусловлено выделением скрытой теплоты конденсации, образованием ударной волны и ее взаимодействием с зоной конденсации. Впервые такое явление отмечено в [1,2], где сказано, что характер движения ударной волны зависит от параметров в начальном сечении, относительной влажности и контура сопла. В работе [3] измерены значительные пульсации параметров потока (с частотой 500—1000 Гц), возникающие при течении в воздухе влажного воздуха и чистого водяного пара. В [4] выведен приближенный закон подобия для безразмерной частоты нестационарного течения. В работах [5,6] рассматриваемое явление изучалось методом обращения воздействия, в [7,8] проведены теоретические расчеты и экспериментально подтверждена диаграмма, позволяющая определить границы области устойчивости течения. В последнее время было найдено, что частота пульсаций давления и плотности при течении с конденсацией влажного воздуха может достигать 6000 Гц [9].

В данной работе модифицированным методом С. К. Годунова [10] получено численное решение системы уравнений, описывающей нестационарное квазиодномерное течение со спонтанной конденсацией в трансзвуковой части сопла Лавалья.

Расчеты неравновесных нестационарных течений в соплах методом установления проводились и ранее, например, в работах [11,12] (смешанное течение в соплах), [13] (течение с учетом колебательной релаксации и неравновесных химических реакций), [14] (двухфазное течение в сопле при рассогласовании фаз по скоростям и температурам). Специфика данной задачи состоит в том, что в процессе установления при стационарных начальных и граничных условиях предельное состояние не является стационарным, однако обнаруживает известную периодичность.

1. Рассмотрим нестационарное квазиодномерное течение в сопле Лавалья пересыщенного пара без учета вязкости, теплопроводности и излучения. Предположим, что скорости фаз одинаковы, конденсация спонтанная. Зависимость площади поперечного сечения сопла от координаты  $x$ , изменяющейся вдоль оси, задается функцией  $F(x)$ , причем  $x=0$  соответствует минимальному сечению сопла. Пусть  $p$  — давление;  $\rho$  — плотность смеси;  $u$  — скорость;  $t$  — время, параметры конденсирующейся

фазы имеют верхний индекс нуль. Основные уравнения сохранения массы, количества движения и энергии можно записать в форме

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho F) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u F) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u F) + \frac{\partial}{\partial x} [(p + \rho u^2) F] &= p \frac{\partial F}{\partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho F \left( h - \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho u F \left( h + \frac{u^2}{2} \right) \right] &= 0. \end{aligned}$$

Энтальпия смеси  $h$  зависит от массовой концентрации пара  $\beta$  и определяется формулой

$$(1.2) \quad h = \frac{\kappa}{\kappa - 1} RT + (1 - \beta) c^0 T^0, \quad RT = \frac{p}{\rho},$$

где  $\kappa$  — показатель адиабаты пара;  $T$  — температура;  $c^0$  — удельная теплоемкость жидкой фазы;  $R$  — газовая постоянная.

Предположим, что образующиеся частицы имеют сферическую форму и скорость их роста  $\dot{r} = dr/dt$  не зависит от радиуса  $r$ . В этом случае спонтанная конденсация текущего пара определяется системой уравнений [15, 16], записанной для целей данной работы в виде,

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho F \Omega_k) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u F \Omega_k) &= \rho F \omega_k \quad (k = 0, 1, 2, 3); \\ \omega_k &= \frac{I}{\rho} r_*^k + k \dot{r} \Omega_k; \quad \beta = -\frac{4\pi}{3} \rho^0 \Omega_3, \end{aligned}$$

где  $r_*$  — радиус зародыша;  $\Omega_k$  — вспомогательные функции, введенные в [15];  $I$  — скорость образования зародышей, которая в данной работе определяется формулой Френкеля—Зельдовича [17].

Для скорости роста капли можно использовать формулу Кнудсена

$$(1.4) \quad \dot{r} = \frac{\alpha}{\rho^0 (2\pi RT)^{1/2}} \left[ p - \left( \frac{T}{T^0} \right)^{1/2} p_s(T^0) \right],$$

а для определения температуры капли — уравнение [16, 18]

$$(1.5) \quad \alpha \left( \frac{T^0}{T} - \frac{2L}{RT} \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right) \left[ 1 - \left( \frac{T}{T^0} \right)^{1/2} \frac{p_s(T^0)}{p} \right] - \alpha \left[ 1 - \left( \frac{T^0}{T} \right)^{1/2} \frac{p_s(T^0)}{p} \right] + (1 - \alpha) \gamma \left( \frac{T^0}{T} - 1 \right) = 0,$$

где  $p_s$  — давление насыщенных паров над плоской поверхностью перехода;  $L$  — теплота конденсации;  $\alpha$  и  $\gamma$  — коэффициенты конденсации и термической аккомодации.

Как показало сравнение результатов теоретических расчетов и экспериментальных данных [19], хорошее совпадение местоположения области скачка конденсации и распределения статического давления вдоль линий тока наблюдается при значениях  $\alpha = 0,04$  и  $\gamma = 1$ . Если в показатель степени формулы Френкеля—Зельдовича [17] для скорости образования зародышей ввести полуэмпирический коэффициент  $n$ , то можно добиться хорошего согласования теории и эксперимента также и по дисперсности [6].

В данных расчетах принималось  $\alpha = 0,04$ ,  $\gamma = 1$ ,  $n = 1,8$ .

Начальные условия следующие: при  $t = 0$  все параметры были постоянны и равны своим значениям в начальном сечении сопла  $x = x_0$  (при

$u=0$ ); давление в выходном сечении сопла  $x=x_N$  было равно давлению окружающей среды  $p_a$ .

2. Система уравнений (1.1) — (1.5) решалась на ЭВМ методом [10], основанным на принципе установления без выделения ударных волн. Все сопло разбивалось на  $N$  участков. Параметрам в узловых точках присваивались индексы  $0, 1, 2, \dots, m, \dots, N$ , а в серединах отрезков между узловыми точками с координатами  $x_m$  и  $x_{m+1}$  — дробный индекс  $m+1/2$ . Для величин, соответствующих моменту времени  $t$ , этот индекс помещался внизу, а для момента времени  $t+\Delta t$  — вверху. Расчетная схема, при помощи которой по величинам в момент времени  $t$  и параметрам на границе находятся величины в последующий момент времени  $t+\Delta t$ , получалась интегрированием левых и правых частей дифференциальных уравнений (1.1), (1.3) по контуру элементарной ячейки с последующим применением теоремы о среднем. Была получена следующая система разностных уравнений для определения  $\rho$ ,  $u$ ,  $h$  и  $\Omega_k$ :

$$(2.1) \quad \rho^{m+\frac{1}{2}} = \rho_{m+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\Delta x_m F_{m,m+1}} [(\rho u F)_{m+1} - (\rho u F)_m];$$

$$(\rho u)^{m+\frac{1}{2}} = (\rho u)_{m+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\Delta x_m F_{m,m+1}} [(p + \rho u^2)_{m+1} F_{m+1} - (p + \rho u^2)_m F_m] +$$

$$+ \frac{\Delta t}{\Delta x_m F_{m,m+1}} \left( p^{m+\frac{1}{2}} + p_{m+\frac{1}{2}} \right); \quad \left[ \rho \left( h - \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \right]^{m+\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[ \rho \left( h - \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \right]_{m+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\Delta x_m F_{m,m+1}} \left\{ \left[ \rho u F \left( h + \frac{u^2}{2} \right) \right]_{m+1} - \right.$$

$$\left. - \left[ \rho u F \left( h + \frac{u^2}{2} \right) \right]_m \right\}; \quad (\rho \Omega_k)^{m+\frac{1}{2}} = (\rho \Omega_k)_{m+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\Delta x_m F_{m,m+1}} [(\rho u F \Omega_k)_{m+1} -$$

$$- (\rho u F \Omega_k)_m] + \frac{\Delta t}{2} \left[ (\rho \omega_k)^{m+\frac{1}{2}} + (\rho \omega_k)_{m+\frac{1}{2}} \right] \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Здесь  $\Delta x_m = x_{m+1} - x_m$ ,  $2F_{m,m+1} = F_m + F_{m+1}$ . Остальные параметры находятся из (1.2) — (1.5).

По формулам (2.1) определяются параметры с дробными индексами. Величины с целыми индексами находятся по формулам для распада произвольного разрыва [10], видоизмененным применительно к рассматриваемому неравновесному течению. Модификация касалась только способов определения параметров  $\Omega_k$ , характеризующих релаксационный процесс, и параметров на границах (при  $x=x_0$  и  $x=x_N$ ). Так как время установления равновесия по поступательным и вращательным степеням свободы молекул, характеризующее толщину газодинамических разрывов, значительно меньше времени релаксационного процесса массообмена, будем считать, что  $\Omega_k$  не изменяются при переходе через газодинамические разрывы. Таким образом, значения параметров  $\Omega_k$  при  $x=x_m$  будут зависеть только от знака скорости контактного разрыва  $U_m$  в этой точке. Условия распада разрыва для  $\Omega_k$  можно записать в виде

$$(\Omega_k)_m = (\Omega_k)_{m-\frac{1}{2}} \quad \text{при } U_m \geq 0;$$

$$(\Omega_k)_m = (\Omega_k)_{m+\frac{1}{2}} \quad \text{при } U_m < 0.$$

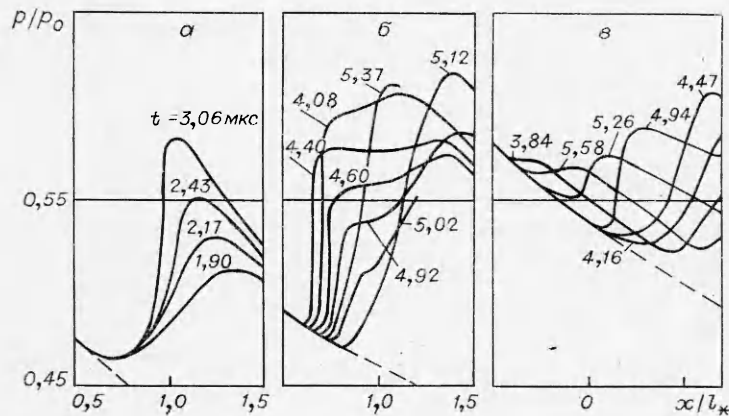
Для определения параметров на границах ( $x=x_0$  и  $x=x_N$ ) слева и справа к соплу присоединим несколько дополнительных ячеек и предположим, что течение на этих участках изэнтропическое. В силу постановки задачи в начальном сечении сопла известен правый инвариант Римана и величина  $S_0 = p_0 \rho_0^{-\kappa}$ , а левый инвариант рассчитывается по параметрам прилегающей ячейки в момент времени  $t$ . Это позволяет вычислить все параметры в сечении входа [11, 12]. Аналогичный метод используется для определения параметров в выходном сечении сопла с той разницей, что роли левого и правого инвариантов Римана меняются местами.

Сопло разбивалось на 40—80 отрезков различной длины. Минимальный шаг  $\Delta x$  выбирался там, где следовало ожидать больших градиентов параметров  $\rho$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $\Omega_k$  (в области минимального сечения сопла или в предполагаемой области появления газодинамических разрывов). Для устойчивости решения использовался критерий Куранта—Фридрихса—Леви [20].

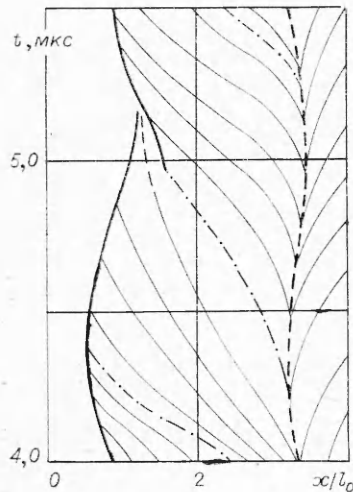
3. Задача решалась на ЭВМ М-222. Давление и температура в начальном сечении сбила  $x_0/l_* = -3,8$  ( $l_*$  — ширина минимального сечения) были следующими:  $p_0 = 1$  ата,  $T_0 = 373$  К. Исследовалось расширение пересыщенного водяного пара в трех соплах. Результаты для всех случаев представлены на фиг. 1, а—в.

На фиг. 1, а показаны кривые распределения давления вдоль оси первого сопла в различные моменты времени (штриховая кривая соответствует течению без конденсации). Видно, что процесс устанавливается и при  $t \approx 3,06$  мкс формируется устойчивый скачок уплотнения, обусловленный выделением тепла при конденсации. Вниз по потоку от скачка располагается область дозвукового течения, в которой пересхлаждение несколько меньше, чем перед скачком, однако оно обеспечивает дальнейший рост образовавшихся зародышей. Такие режимы течения со стационарным скачком уплотнения наблюдались экспериментально [6, 7].

На фиг. 1, б показано распределение давления в разные моменты времени для второго сопла с меньшей степенью расширения при тех же условиях в начальном сечении. Видно, что процесс не устанавливается: интенсивность возникшей ударной волны сначала возрастает, в результате чего она перемещается против потока, а затем уменьшается, что обуславливает ее перемещение в обратном направлении и полное затухание. В дальнейшем образуется новая ударная волна и процесс периодически повторяется.



Фиг. 1



Фиг. 2

В рассмотренных случаях ударная волна не достигала минимального сечения сопла, поэтому был проведен расчет течения в сопле с еще меньшей степенью расширения, что позволило приблизить зону конденсации вплотную к минимальному сечению. На фиг. 1, в представлено распределение давления для этого случая, ударная волна перемещается вверх по потоку от минимального сечения сопла и затухает.

Рассмотрим поле течения непосредственно в зоне конденсации за ударной волной (фиг. 2). Жирной линией обозначен фронт ударной волны, тонкие сплошные линии являются характеристиками второго семейства. За ударной волной поток является дозвуковым, однако вследствие подвода тепла, обусловленного конденсацией, он ускоряется до звуковой скорости и в дальнейшем в результате увеличения степени

расширения сопла становится сверхзвуковым. Таким образом, помимо обычной звуковой линии в критическом сечении сопла вниз по потоку может существовать вторая звуковая линия (см. фиг. 2, штрих).

Все течение в области конденсации можно разделить на чередующиеся волны сжатия и разрежения. На фиг. 2 эти области разделены характеристиками второго семейства, обозначенными штрихпунктиром. Взаимодействие волны сжатия с ударной волной приводит к увеличению интенсивности последней и перемещению ее против потока. Это частично снимает пересечение в зоне конденсации, подвод тепла становится менее интенсивным, и область, порождающая волну сжатия, исчезает. После этого ударная волна начинает взаимодействовать с волной разрежения. Скорость перемещения ударной волны относительно сопла уменьшается и становится равной нулю. В этот момент интенсивность ее можно определить по известным соотношениям для расчета стационарных прямых скачков уплотнения при заданном шаге Маха набегающего потока. Если ударная волна не достигла минимального сечения сопла, то она начинает перемещаться вниз по потоку и затухать. Если же она перейдет минимальное сечение сопла, то затухание происходит с одновременным перемещением вверх по потоку. Уменьшение интенсивности ударной волны приводит к увеличению пересыщения в зоне конденсации, подвод тела становится более интенсивным и вновь образуется волна сжатия, переходящая затем в очередную ударную волну. Процесс циклически повторяется.

Интересно отметить, что процессы затухания предыдущей ударной волны и образования последующей перекрываются во времени. Очередная ударная волна зарождается вниз по потоку от предыдущей. В результате в области течения между ними образуется периодически появляющаяся и исчезающая третья звуковая линия (см. фиг. 2, штрих).

Если рассмотреть фиксированное сечение сопла, то параметры потока в нем будут изменяться с определенной частотой. Например, пульсации статического давления вблизи минимального сечения сопла достигают 35—40%, а пульсации числа Маха — около 20%. Весь цикл повторяется приблизительно за 2 мкс, т. е. частота пульсаций достигает 500 Гц. На верхнем графике фиг. 3 приведена зависимость давления от времени для второго сопла в сечении  $x/l_0 = 0,835$ .

Нестационарность течения в зоне конденсации может привести к пульсациям всех параметров течения, в том числе расхода и удельного импульса. Поскольку в первых двух соплах ударная волна не доходит до критического сечения, расход газа остается постоянным. Однако в третьем исследованном сопле ударная волна перемещается в дозвуковую часть, в результате чего наблюдаются пульсации расхода. Именно такая нестационарность отмечена в [3, 4]. На фиг. 3 приведен график изменения коэффициента тяги в выходном сечении третьего сопла. Расчетное тело Маха на выходе для течения водяного пара при отсутствии конденсации равнялось 1,3.

Обычно при экспериментальном изучении нестационарных течений используются кинотепперограммы, получаемые при работе кинокамеры в режиме регистратора. В результате снимки растягиваются по времени. На фиг. 4,а приведена кинотепперограмма для второго сопла. Там же приведен соответствующий график (фиг. 4,б), полученный расчетным путем. Несмотря на некоторое различие в частоте, качественное согласие опытов с результатами расчетов очевидно.

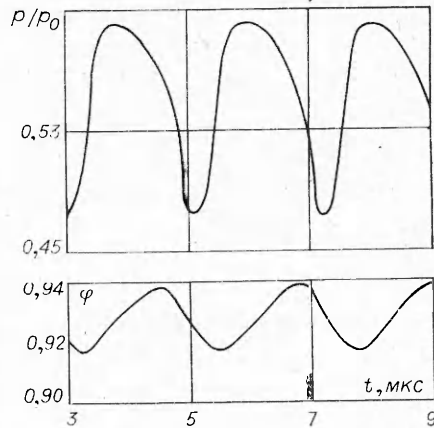
Таким образом, при спонтанной конденсации в трансзвуковой части сопла Лавала могут наблюдаться следующие картины течения: а) образуется стационарный скачок уплотнения, течение устанавливается, расход определяется из условия изэнтропического расширения; б) в сверхзвуковой части сопла периодически образуются ударные волны, течение нестационарное, однако расход остается неизменным; в) периодически образующиеся ударные волны перемещаются в дозвуковую часть сопла, течение нестационарное и сопровождается периодическими пульсациями всех газодинамических параметров, в том числе и расхода.

Авторы признательны А. Н. Крайко за полезные советы, касающиеся метода численного счета, и обсуждение результатов.

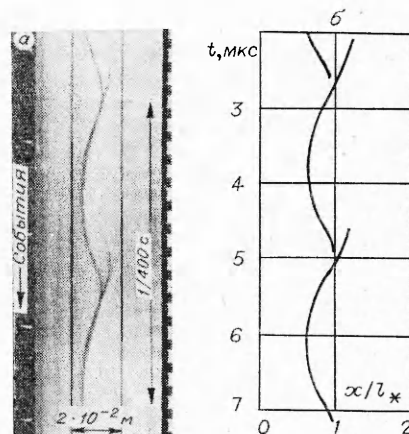
Поступила 30 IX 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Schmidt D. Beobachtungen über das Verhalten der durch Wasserdampf-Kondensation ausgelösten Störungen in einer Überschall-Windkanaldüse. Dissertation. Karlsruhe, 1962.
2. Gyarmathy G. Kondensationsstoß-Diagramme für Wasserdampfströmungen. — «Forsch. Ing. Wes.», 1963, D. 29, N 4.
3. Barschdorf D. Kurzzeitfeuchtemessung und ihre Anwendung bei Kondensationerscheinungen. — In: Lavaldüsen. Strömungsmechanik und Strömungsmaschinen. Universität. Karlsruhe, 1967, N 6.



Фиг. 3



Фиг. 4

4. *Zierep J., Lin S.* Ein Ähnlichkeitsgesetz für instationäre Kondensationvorgänge in Lavaldüsen.—«Forsch. Ingenieur», 1968, Bd 34, N 1.
5. *Баршдорф Д., Филиппов Г. А.* Анализ некоторых особых режимов работы сопел Лаваля с местным подводом тепла.—«Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт», 1970, № 3.
6. *Салтанов Г. А.* Сверхзвуковые двухфазные течения. Минск, «Выш. школа», 1972.
7. *Pouring A.* Thermal choking and condensation in nozzles.—«Phys. Fluids», 1965, vol. 8, N 10.
8. *Yosif F., Campbell B., Bakhtar F.* Instability in condensing flow of steam.—«Proc. Inst. Mech. Eng.», 1972, vol. 186, N 37.
9. *Wegener P., Gagliastro D.* Periodic nozzle flow with heat addition.—«Combust. sci and technol.», 1973, vol. 6, N 5.
10. *Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений газовой динамики. Математический сборник, 1959, т. 47, вып. 3.
11. *Иванов М. Я., Крайко А. Н.* Численное решение прямой задачи о смешанном течении в соплах.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1969, № 5.
12. *Крайко А. Н., Осипов А. А.* Исследование отражения возмущений от дозвуковой части сопла Лаваля.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1973, № 1.
13. *Anderson J.* Time-dependent solutions of nonequilibrium nozzle flows. A. sequel.—«AIAA J.», 1970, vol. 8, N 12.
14. *Весенин И. М., Рычков А. Д.* Численное решение задачи о течении смеси газа и частиц в осесимметричном сопле Лаваля.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1973, № 5.
15. *Ткаленко Р. А.* О спонтанной конденсации при обтекании сверхзвуковым потоком выпуклого угла.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1970, № 5.
16. *Ткаленко Р. А.* Конденсация паров воды при расширении в плоских и осесимметричных соплах.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1972, № 6.
17. *Френкель Я. И.* Кинетическая теория жидкостей. Том 3. М., «Наука», 1959.
18. *Hill P.* Condensation of water vapor during supersonic expansion in nozzles.—«J. Fluid Mech.», 1966, vol. 25, N 3.
19. *Куршаков А. В., Салтанов Г. А., Ткаленко Р. А.* Теоретическое и экспериментальное исследование конденсации в центрированной волне разрежения.—ПМТФ, 1971, № 5.
20. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М., «Мир», 1972.

УДК 532.517.4

## НЕКОТОРЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИФФУЗИИ ХИМИЧЕСКИ АКТИВНОЙ ПРИМЕСИ В ТУРБУЛЕНТНОЙ ЗОНЕ СМЕШЕНИЯ

А. Ф. Курбацкий  
(Новосибирск)

В статье путем численного решения связанной системы уравнений турбулентного переноса для полей скорости и концентрации химически активной примеси вычислен ряд вторых моментов поля концентрации в плоской зоне смешения. Система уравнений переноса выведена из уравнения для совместной функции распределения полей пульсаций скорости и концентрации [1] и упрощена в приближении пограничного слоя. Замкнутый вид уравнений переноса получен на уровне третьих моментов с использованием гипотезы четвертых моментов [2] в ее обобщенном виде для смешанных моментов поля скорости и поля пассивного скаляра. Дифференциальный оператор замкнутой системы уравнений турбулентного переноса для полей скорости и концентрации оказывается при таком способе замыкания принадлежащим не к параболическому, а к слабогиперболическому типу [3]. Для численного решения применена неявная разностная схема, предложенная в [4]. Проведено сопоставление результатов численного решения с экспериментальными данными [5].

**1. Система уравнений для моментов поля концентрации.** В эйлеровом описании рассматривается турбулентная диффузия динамически пассивной примеси в свободном неоднородном турбулентном потоке несжимае-