

## МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КРИОСФЕРЫ

УДК 502/504

DOI: 10.15372/KZ20210103

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВАРИАНТОВ РАЗВИТИЯ МОРФОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ЭРОЗИОННО-ТЕРМОКАРСТОВЫХ РАВНИН

А.С. Викторов, Т.В. Орлов, В.Н. Капралова, О.Н. Трапезникова

*Институт геоэкологии имени Е.М. Сергеева РАН,  
101000, Москва, Уланский пер., 13, стр. 2, Россия; vic\_as@mail.ru*

Рассмотрены четыре варианта гипотез о путях развития эрозионно-термокарстовых равнин на основе математического моделирования их морфологической структуры. В основу создания моделей положены подходы математической морфологии ландшафта с широким использованием теории случайных процессов. Для каждого варианта развития характерен свой вид вероятностного распределения размеров, прежде всего площадей термокарстовых озер. Эмпирическая проверка осуществлялась на 17 ключевых участках, находящихся в различных физико-географических и геокриологических условиях (северные регионы Западной и Восточной Сибири, северо-восточная Канада). Анализ позволяет сделать вывод, что на однородных участках эрозионно-термокарстовых равнин с разными физико-географическими условиями в подавляющем большинстве случаев выполняется интегрально-экспоненциальный закон распределения площади термокарстовых озер и справедлива модель развития морфологической структуры, отвечающая асинхронному старту и росту размеров озер, пропорциональному плотности тепловых потерь через боковую поверхность. Таким образом, на значительных площадях морфологическая структура эрозионно-термокарстовых равнин находится в состоянии динамического равновесия, что должно учитываться при прогнозе ее развития и оценке природных рисков.

*Математическая морфология ландшафта, эрозионно-термокарстовые равнины, морфологическая структура*

## MODELING THE WAYS OF THE MORPHOLOGICAL PATTERN DEVELOPMENT FOR THERMOKARST PLAINS WITH FLUVIAL EROSION

A.S. Victorov, T.V. Orlov, V.N. Kapralova, O.N. Trapeznikova

*Sergeyev Institute of Geoecology, RAS,  
Ulan sky lane 13, buld. 2, Moscow, 101000, Russia; vic\_as@mail.ru*

The research deals with four different hypotheses on the development of thermokarst plains with fluvial erosion based on the mathematical modeling of their morphological pattern. The models result from the mathematical morphology of landscapes, which broadly uses the random processes. The analysis revealed that each variant of the development is characterized by a specific probabilistic distribution of sizes, areas of thermokarst lakes first of all. The empirical testing was done for 17 key sites with different environmental and permafrost conditions in Western and Eastern Siberia, and Canada. Our analysis revealed that in the majority of cases the areas of the thermokarst lakes within the homogenous sections of the thermokarst plains with fluvial erosion obey the integral exponential distribution. Hence, the model of the morphological pattern corresponding to the asynchronous start of thermokarst process is valid, and the increase in the size of the lakes is proportional to the heat loss density through the side surface. Thus, the morphological pattern of the vast areas of thermokarst plains with fluvial erosion is in a state of dynamic equilibrium, which should be taken into account when predicting its development and assessing natural risks.

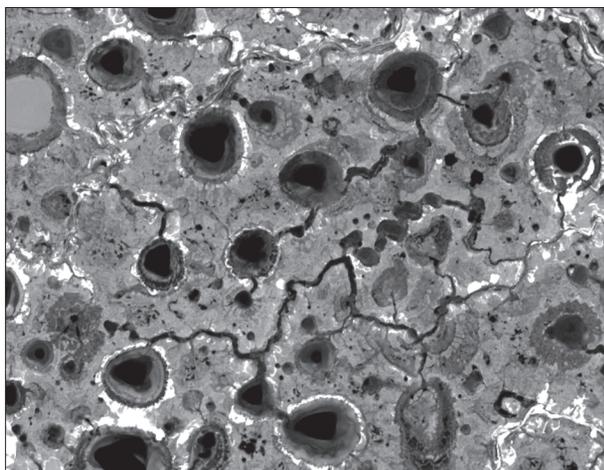
*Mathematical morphology of landscapes, thermokarst plains with fluvial erosion, morphological pattern*

## ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее интересных объектов в изучении криолитозоны является динамика пространственных в ней ландшафтов [Кирпотин и др., 2008; Кравцова, Быстрова, 2009; Полищук В.Ю., Полищук Ю.М., 2013; Grosse et al., 2016]. Особенно интересным представляется анализ развития ландшафтов криолитозоны по прошествии длительного времени. Ранее была предпринята

попытка решения подобной задачи по отношению к озерно-термокарстовым равнинам [Викторов и др., 2015], однако динамика эрозионно-термокарстовых равнин детально не исследовалась.

Цель настоящей работы – изучить закономерности изменения морфологической структуры эрозионно-термокарстовых равнин при различных вариантах ее развития.



**Рис. 1.** Типичное изображение участка эрозионно-термокарстовой равнины на космическом снимке.

Ландшафт эрозионно-термокарстовой равнины представляет собой слабоволнистую субгоризонтальную поверхность с преобладанием различной тундровой или лесотундровой растительности (пушицевые тундры, осоково-пушицевые тундры и др.), в которую вкраплены озера и хасыреи, а также местами развита нечастая эрозионная сеть (рис. 1). Озера часто имеют округлую форму и беспорядочно разбросаны по равнине. Хасыреи представляют собой плоскодонные и полого-склонные заторфованные понижения изометричной формы, занятые луговой или болотной растительностью, и аналогично озерам в беспорядке располагаются на равнине. Внутри хасыреев могут оставаться мелкие остаточные озерки по периферии и крупные озера в центральной части. В пределах хасыреев возможно вторичное формирование мерзлоты и развитие бугров пучения. По мнению большинства исследователей, хасыреи образуются в результате осушения термокарстовых озер, чаще всего вследствие эрозионной деятельности водотоков.

Ландшафт эрозионно-термокарстовых равнин находится под сложным влиянием термокарстовых, термоабразионных и термоэрозионных процессов, которые проявляются в следующих элементах:

- появляются новые первичные термокарстовые понижения;
- термокарстовые понижения растут независимо друг от друга как озера за счет термоабразионных процессов;

**Таблица 1. Варианты моделей развития морфологической структуры**

Модель	Исходные допущения	
	Старт	Рост размеров
1.0	Синхронный	Пропорциональный плотности тепловых потерь
1.1	Асинхронный	То же
2.0	Синхронный	Квазиравномерный
2.1	Асинхронный	То же

– в некоторый момент времени озеро может быть спущено эрозионными процессами и превращается в хасырей, при этом рост котловины останавливается из-за отсутствия водной массы.

Таким образом, основной причиной роста размеров озера (в плане) авторам представляются термоабразионные процессы, на что, в частности, указывает часто округлая форма озер.

В проведенном исследовании рассмотрены различные варианты гипотез развития эрозионно-термокарстовых равнин на основе математического моделирования их морфологической структуры. Рассмотрены четыре варианта гипотез, каждой из которых отвечает своя математическая модель развития (модели 1.0, 1.1, 2.0, 2.1), отличающаяся исходными допущениями (табл. 1). Основными отличиями исходных допущений являются представления о примерной синхронности или растянутости во времени возникновения первичных термокарстовых понижений и о постоянстве или изменчивости скорости роста.

В основу создания моделей положены подходы математической морфологии ландшафта [Викторов, 2006; Капралова, 2014] с широким использованием теории случайных процессов.

#### МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗВИТИЯ ТЕРМОКАРСТОВЫХ РАВНИН

Модель морфологической структуры эрозионно-термокарстовых равнин относится к случаю участка с однородными физико-географическими и геокриологическими условиями, развивающегося в современном климате. Естественно, в модели не предполагается абсолютная однородность, а лишь статистическая. В основу модели 1.0 положены следующие допущения:

1. Процесс появления термокарстовых понижений происходил за короткий отрезок времени (“синхронный старт”); он являлся вероятностным и на непересекающихся площадках шел независимо, при этом вероятность возникновения понижений на пробной площадке зависела только от площади пробной площадки<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> При этом вероятность возникновения более чем одного понижения является бесконечно малой более высокого порядка, чем вероятность возникновения одного понижения.

2. Изменение радиуса возникшего термокарстового понижения представляет собой случайный процесс; оно происходит независимо от других озер, и его скорость пропорциональна плотности тепловых потерь через боковую, находящуюся под водой поверхность озерной котловины.

3. В процессе роста озеро (при его спуске) может перейти в хасырей, вероятность этого не зависит от наличия других озер, при этом его рост прекращается.

4. Возникновения истоков эрозионных форм на непересекающихся площадках являются независимыми случайными событиями; вероятность наличия истока на пробной площадке зависит только от ее площади<sup>2</sup>.

Требуется некоторое пояснение второго допущения. При термоабразионном взаимодействии водной массы озера с бортами существенную роль играет не только механическое воздействие, но и тепловое воздействие воды на борт, при котором идет вытаивание ледяной составляющей мерзлых пород и деградация последних. Тепловое воздействие, видимо, оказывается в основном на находящуюся под водой часть борта озерной котловины, непосредственно соприкасающуюся с водой. Естественно предположить, что чем больше тепла водной массы озера уходит на вытаивание ледяной составляющей квадратного метра находящегося под водой борта котловины (в статье получившее условное название “плотность тепловых потерь”), тем при прочих равных условиях быстрее идут деградация мерзлых пород и увеличение размера озера. Именно это несколько схематизированное представление явилось основой второго допущения.

Для случая синхронного старта остаются справедливыми следующие исходные зависимости, полученные ранее для математической морфологии ландшафта [Викторов, 2006]:

– распределение радиуса свободно растущего термокарстового очага через время  $t$  после возникновения данного озера (логнормальное распределение)

$$f_0(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{(\ln x - at)^2}{2\sigma^2 t}\right), \quad (1)$$

где  $a, \sigma$  – параметры;  $t$  – время, прошедшее с начала процесса;

– распределение расстояния от центра растущего озера до ближайшего истока эрозионной формы, останавливающего его рост с превращением в хасырей (распределение Рэлея):

$$F(x) = 1 - \exp(-\pi\gamma x^2), \quad (2)$$

где  $\gamma$  – средняя плотность расположения истоков эрозионных форм<sup>3</sup>; число первичных понижений на пробной площадке, возникших при старте на территории термокарстового процесса (распределение Пуассона):  $P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)$ .

В дальнейшем средняя плотность расположения озер уменьшается в соответствии с возможностью трансформации в хасырей. Поскольку вероятность превращения озера в хасырей не зависит от расположения озера, то, как нетрудно показать, распределение числа озер и числа хасыреев на пробной площадке в любой момент остается пуассоновским.

Распределение радиусов хасыреев в произвольный момент времени определяется расстоянием до ближайшего истока эрозионной формы, который остановит рост, и нетрудно получить, что распределение площади хасырея при большом времени развития отвечает экспоненциальному распределению [Викторов и др., 2016].

Распределения радиусов термокарстовых озер в произвольный момент времени определяется распределением соответствующего радиуса в условиях свободного роста, но при условии, что озеро не станет хасыреем, т. е. расстояние до истока будет больше радиуса озера:

$$f_l(x,t) = \frac{f_0(x,t) \exp(-\pi\gamma x^2)}{\int_0^{+\infty} f_0(u,t) \exp(-\pi\gamma u^2) du}. \quad (3)$$

Используя выражение для свободного роста (1) и упрощая за счет одинаковых членов в числителе и знаменателе, зависящих только от времени, получаем, что при значительном времени развития ( $t \rightarrow +\infty$ ) плотность распределения радиуса озера стремится к предельному распределению:

$$f_l(x,\infty) = \frac{x^{a/\sigma^2 - 1} \exp(-\pi\gamma x^2)}{\int_0^{+\infty} x^{a/\sigma^2 - 1} \exp(-\pi\gamma x^2) dx},$$

в котором нетрудно узнать известное хи-распределение. Отсюда с учетом круговой формы озера получаем, что предельным распределением для площади озера является гамма-распределение:

$$f_{sl}(x,\infty) = \frac{\gamma^{a/2\sigma^2}}{\Gamma(a/(2\sigma^2))} x^{a/2\sigma^2 - 1} \exp(-\gamma x),$$

где  $\Gamma(x)$  – гамма-функция.

<sup>2</sup> При этом вероятность возникновения более чем одного истока является бесконечно малой более высокого порядка, чем вероятность возникновения одного истока.

<sup>3</sup> Под средней плотностью расположения истоков эрозионных форм подразумевается среднее число истоков на единицу площади ( $\text{км}^{-2}$ ).

Таким образом, на основе допущений модели удалось получить выражения, описывающие особенности морфологической структуры эрозионно-термокарстовых равнин и ее динамику в варианте модели 1.0.

Второй вариант модели 1.1 отличается от первого следующим допущением (“асинхронный старт”):

1а. Возникновения первичных термокарстовых понижений (очагов) за непересекающиеся отрезки времени и на непересекающихся площадках являются независимыми случайными событиями; вероятность возникновения понижения зависит только от величины временного отрезка и размеров площадки<sup>4</sup>.

Кроме того, в модели 1.1 появляется дополнительное допущение:

5. Возникновение первичных термокарстовых понижений не происходит на площади существующих термокарстовых озер.

Для случая асинхронного старта также остаются справедливыми две исходные зависимости (1), (2), полученные ранее.

Анализ предположений модели позволяет получить важные выводы о динамике развивающегося процесса. Генерация первичных термокарстовых понижений на свободном (незаозеренном) участке без развития эрозии, как показано ранее (например, [Викторов, 2006; Викторов и др., 2016]), описывается пуассоновским процессом. Однако, если мы учтем второе допущение модели (что первичные понижения генерируются только вне площади озер), это эквивалентно тому, что наблюдается переменная плотность генерации первичных понижений:

$$\lambda_1(t) = \lambda[1 - P_l(t)],$$

где  $P_l(t)$  – заозеренность. Функция  $P_l(t)$ , как показано, например, в [Викторов, 2006], связана с параметрами процесса зависимостью

$$P_l(t) = 1 - \exp[-\tau(t)s(t)], \quad (4)$$

где  $s(t)$  – средняя площадь озер в момент времени  $t$ ;  $\tau(t)$  – среднее количество озер на единицу площади в момент времени  $t$ .

Распределение числа озер, а также хасыреев останется пуассоновским, так как вероятность перехода в хасырей не зависит от расположения озера.

Плотность распределения радиусов озер в момент времени  $t$  будет равно отношению числа озер, имеющих данный радиус (с учетом разного времени их появления и вероятности сохранения

без превращения в хасырей) к общему числу озер, и после упрощения составит

$$f(x,t) = \exp(-\pi\gamma x^2) \int_0^t [1 - P_l(u)] f_0(x,t-u) du \times \left[ \int_0^t [1 - P_l(u)] \int_0^{+\infty} \exp(-\pi\gamma x^2) f_0(x,t-u) dx du \right]^{-1}. \quad (5)$$

Модель позволяет получить выражение, описывающее динамику заозеренности. Если из приведенного выше закона распределения радиуса озера установить значение средней площади озера, то с учетом выражения для средней плотности расположения озер и выражения (4) после упрощения и логарифмирования можно получить [Викторов, 2006] интегральное уравнение

$$\ln[1 - P_l(t)] = -\pi\lambda \int_0^t [1 - P_l(u)] \times \int_0^{+\infty} x^2 \exp(-\pi\gamma x^2) f_0(x,t-u) dx du, \quad (6)$$

решением которого и является функция заозеренности (пораженности).

Особый интерес в развитии каждого процесса представляет его поведение при значительном времени развития, так как очень часто исследователь сталкивается с давно идущими процессами. Используя интегральное уравнение (6), можно показать, что если сходится интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^2 \exp(-\pi\gamma x^2) f_0(x,u) dx du,$$

и решение уравнения<sup>5</sup>

$$\ln[1 - P_l^*] = -\lambda\pi[1 - P_l^*]I$$

не превышает  $(1 - e^{-1})$ , т. е. 0.63, то существует предел функции  $P_l(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$ , причем он равен решению этого уравнения  $(P_l^*)$ . В основе доказательства лежит построение пары ступенчатых функций, ограничивающих функцию  $P_l(t)$  сверху и снизу. Используя уравнение (6), можно показать, что при указанном выше условии обе ступенчатые функции сходятся к единому пределу. Соответственно, по известной теореме тот же предел должен иметь и функция  $P_l(t)$ .

При указанных условиях, обеспечивающих существование предельного значения пораженности  $(P_l^*)$ , существует также предельное распределение радиусов озер при  $t \rightarrow +\infty$ . Используя вы-

<sup>4</sup> При этом для малых площадок и временных отрезков вероятность возникновения нескольких понижений много меньше, чем вероятность возникновения одного понижения.

<sup>5</sup> Можно показать, что уравнение всегда имеет решение, причем единственное.

ражение (1) для плотности распределения радиусов озер при свободном росте и вычисляя верхний интеграл выражения (5) при  $t \rightarrow +\infty$  как значение преобразования Лапласа [Викторов, 2006], получаем, что распределение площади озера при площади первичного понижения  $\varepsilon$  будет отвечать выражению

$$f_{sl}(x, \infty) = -\frac{2}{x \text{Ei}(-\gamma\varepsilon)} \exp(-\gamma x), \quad x \geq \varepsilon,$$

где  $\text{Ei}(-x)$  – интегральная экспоненциальная функция, и может быть названо интегрально-экспоненциальным. Наконец, из полученного результата вытекает, что в этом случае существует предельное значение среднего числа озер на единицу площади [Victorov, 2005].

Таким образом, согласно модели 1.1, по прошествии большого ( $t \rightarrow +\infty$ ) времени устанавливается динамическое равновесие в процессах генерации термокарстовых озер (первичное термокарстовое образование озер) и превращения их в хасыреи.

В основу третьего варианта модели (модель 2.0) положено допущение о синхронном старте, а также допущение о том, что рост озер происходит квазиравномерно, основой для такого предположения являются эмпирические данные [Burn, Smith, 1990; Smith et al., 2005]. В этом случае изменяется второе допущение.

2а. Изменение радиуса возникшего термокарстового понижения является случайным процессом; изменение за единицу времени представляет собой независимую, одинаково распределенную случайную величину.

Для данного варианта изменяется первая исходная зависимость [Викторов и др., 2015] – распределение радиуса свободно растущего термокарстового озера подчиняется нормальному распределению

$$f_0(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}t} \exp\left(-\frac{(x-at)^2}{2\sigma^2 t}\right), \quad (7)$$

где  $a, \sigma$  – параметры распределения;  $t$  – время, прошедшее с начала процесса.

Распределение радиусов озер определяется выражением (3), но с функцией свободного роста, отвечающей квазиравномерному росту (7). Вычисляя интеграл и упрощая, получаем, что в любой момент времени радиус озера должен подчиняться нормальному распределению с плотностью распределения

$$f_l(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_l(t)}} \exp\left(-\frac{[x-a_l(t)]^2}{2\sigma_l^2(t)}\right),$$

$$\text{где } a_l(t) = \frac{at}{2\pi\gamma\sigma^2 t + 1}, \quad \sigma_l(t) = \sigma \sqrt{\frac{t}{2\pi\gamma\sigma^2 t + 1}}.$$

Переходя к пределу, получаем, что при  $t \rightarrow \infty$  распределение радиусов озер в модели 2.0 является также близким к нормальному.

Четвертый вариант модели 2.1 отличается тем, что в комплексе допущений первое заменяется на 1а (асинхронный старт), и появляется, как и в модели 1.1, дополнительное пятое допущение о невозможности зарождения новых термокарстовых понижений в пределах существующих озер. Для данного варианта сохраняются две исходные зависимости: распределение радиуса свободно растущего термокарстового очага через время  $t$  после возникновения данного озера, которое подчиняется нормальному распределению, и рэлеевское распределение расстояния до истоков эрозионных форм.

Анализ модели 2.1 приводит к выводу, как и в модели 1.1, о пуассоновском распределении как озер, так и хасыреев. Выполняя аналогичный предыдущему анализ развития территории при большом времени развития, получаем, что при весьма общих условиях устанавливается динамическое равновесие в процессах генерации термокарстовых озер и превращения их в хасыреи, а также справедливо экспоненциальное распределение площадей хасыреев.

Плотность распределения радиусов озер при большом времени развития может быть определена с помощью выражения для предельного распределения радиуса в модели 1.1, если в нем заменить функцию плотности распределения радиуса при свободном росте на (7):

$$f_l(x, \infty) = \sqrt{\gamma} \exp(-\pi\gamma x^2), \quad x \geq 0,$$

а следовательно, площадь озер подчиняется в данной модели гамма-распределению, но с фиксированным значением параметра формы, равным 0.5:

$$f_{sl}(x, \infty) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \frac{\exp(-\gamma x)}{\sqrt{x}}.$$

В итоге, результаты анализа вариантов гипотез о развитии эрозионно-термокарстовых равнин показывают, что варианты отличаются по характеру распределения площадей озер (табл. 2).

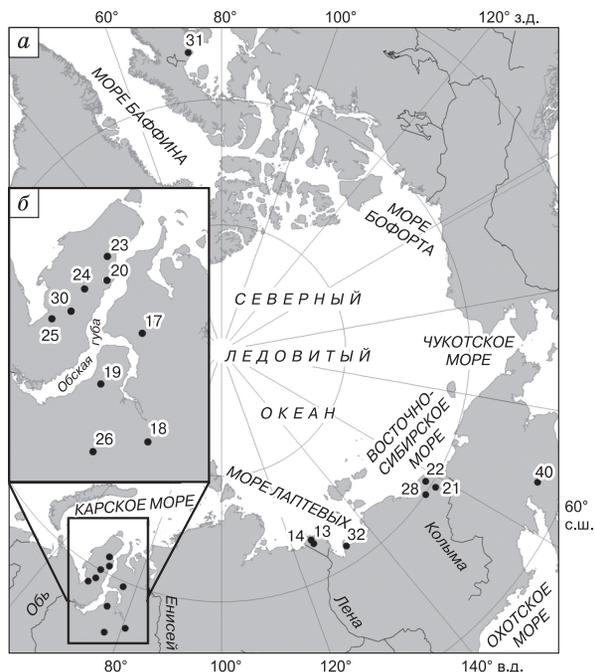
Таблица 2. Характер распределения размеров озер при разных вариантах (моделях)

Модель	Вид статистического распределения размеров озер
1.0	Гамма-распределение
1.1	Интегрально-экспоненциальное распределение
2.0	Нормальное распределение (средние радиусы)
2.1	Гамма-распределение

**ЭМПИРИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА  
И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ  
РАЗВИТИЯ ТЕРМОКАРСТОВЫХ РАВНИН**

Эмпирическая проверка включала анализ соответствия распределения площадей термокарстовых озер разным видам распределений. Результаты сопоставления распределения числа центров озер и хасыреев на случайно выбранной площадке закону Пуассона уже опубликованы и наблюдаются хорошее соответствие [Викторов и др., 2019a], то же относится и к распределению площадей хасыреев [Викторов и др., 2019б].

Участки эмпирической проверки для распределений площадей термокарстовых озер были выбраны в различных физико-географических и геокриологических условиях (рис. 2, табл. 3). Используются следующие материалы космической съемки: архивные снимки Corona (2–10 м/пиксел, 1965–1976 гг.); съемка среднего разрешения Sentinel 2A (10 м/пиксел, 2018–2019 гг.), современные высокодетальные снимки 0.5–1.5 м/пиксел (Spot 6,7, Worldview 2, июнь–август 2013–2019 гг.), как специально заказанные, так и полученные из открытых источников (спутниковые покрытия Google, Bing, Yandex). Данные последних съемок 2013–2019 гг. приводятся в таблицах



**Рис. 2. Схема расположения ключевых участков эрозионно-термокарстовых равнин:**

а – общая схема; б – укрупненная схема Ямал-Гыданского района.

Таблица 3. **Характеристика тестовых участков**

Номер участка (см. рис. 2)	Характеристика участков	Средняя годовая температура пород, °С	Мощность ММП, м
13	Аккумулятивный тип рельефа, плоская или пологонаклонная аллювиально-морская равнина возраста $Q_{III}-N$ с участками озерно-болотных равнин позднеголоценового возраста, с многочисленными термокарстовыми и таликовыми озерами, булгуньяхами, заболоченными западинами, ложбинами стока. В районах термокарстовых озер озерные и болотные глинистые алевриты, супеси с прослоями песков, растительного детрита и торфа. Вне распространения озер аллювиально-морские образования, представленные песками с прослоями супесей и торфа. Сплошное распространение ММП	-9...-11	300–400
22	Аккумулятивный тип рельефа. Плоская озерно-болотная (аласная) равнина, созданная совместной деятельностью термокарста и озерно-болотных процессов, отвечает конечной стадии разрушения термокарстом едомной равнины. Обширные слившиеся озерные котловины разной стадии аласообразования. Время формирования рельефа – с позднего неоплейстоцена, раннего голоцена. Преобладают лессовидные озерно-аллювиальные монотонные сероцветные глинистые, реже песчаные алевриты с циклично повторяющимися прослоями и линзами торфа. Сплошное распространение ММП	-9...-11	300–500
23	Аккумулятивный тип рельефа. Вторая аллювиально-морская терраса Обской губы, $Q_{III}$ . Плоская заболоченная, заозеренная равнина. Пески с маломощными прослоями супесей и суглинков. Сплошное распространение ММП	-7...-9	200–300
26	Эрозионно-аккумулятивный тип рельефа, третья озерно-аллювиальная надпойменная терраса р. Пур, $Q_{III}$ . Плоская равнина, местами заболоченная с большим количеством спущенных озерных ванн. Широко развиты бугры пучения и термокарстовые провалы. В базальной части преобладают мелко- и среднезернистые пески с включениями гальки и гравия с характерной косой слоистостью. Средняя часть разреза (пойменная фация) представлена пылеватыми и мелкими песками, часто оторфованными с прослоями супесей и суглинков. Озерная фация сложена суглинками, реже глинами и алевритами с прослоями мелкого песка. Редкоостровное распространение ММП	-2...-0.5	0–15

Примечание. ММП – многолетнемерзлые породы.

без детализации под названием “срок 2”, а данные снимков Согопа – “срок 1”.

Выделение границ термокарстовых понижий производилось как автоматизированным методом – на основе программных модулей ARCGIS и QGIS по спектральным яркостям снимка, так и в экспертном режиме.

Проверка соответствия теоретически полученных распределений эмпирическим данным выполнялась для большинства распределений с помощью программного пакета для статистического анализа с использованием критерия Пирсона на основе известной методики (см., например, [Кример, 1970]) при соблюдении условий ее применения. Для интегрально-экспоненциального распределения был создан специальный модуль для расчета значения критерия Пирсона (автор П.В. Березин). При этом за оценку параметра  $\varepsilon$

принималось минимальное значение выборки, а значение  $\gamma$  находилось методом моментов путем численного решения в рамках того же программного модуля уравнения

$$-\frac{1}{\gamma \text{Ei}(-\gamma \varepsilon)} \exp(-\gamma \varepsilon) = \bar{s}_l,$$

где  $\bar{s}_l$  – средняя площадь озера.

Эмпирическая проверка для модели эрозионно-термокарстовых равнин дала следующие основные результаты. Полученные эмпирические данные площадей термокарстовых озер для ключевых участков эрозионно-термокарстовых равнин включали выборки объемом от 62 до 598 элементов (табл. 4).

Для срока 2 на 10 участках из 17 (59 %) наблюдается соответствие эмпирических распределений интегрально-экспоненциальному распре-

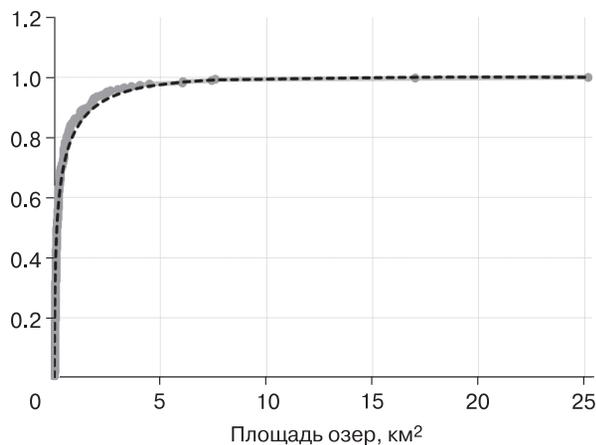
Таблица 4. Соответствие эмпирических и теоретических распределений площадей термокарстовых озер

Участок	Срок*	Объем выборки	Распределение			
			логнормальное	гамма	нормальное**	интегрально-экспоненциальное
13	2	581	0.000	0.000	0.000	0.000
13	1	598	0.000	0.000	0.000	0.000
14	2	209	<b>0.014</b>	<b>0.017</b>	0.000	<b>0.022</b>
17	2	232	0.005	0.000	0.000	0.002
18	2	62	<b>0.160</b>	<b>0.018</b>	0.000	<b>0.086</b>
19	2	161	<b>0.017</b>	0.000	0.000	<b>0.213</b>
19	1	160	<b>0.091</b>	0.000	0.000	<b>0.394</b>
20	2	318	0.007	0.000	0.000	0.000
20	1	359	0.000	0.000	0.000	0.000
21	2	405	0.000	0.000	0.000	<b>0.109</b>
21	1	339	<b>0.010</b>	0.000	0.000	0.004
22	2	244	0.000	0.000	0.000	<b>0.014</b>
22	1	337	0.000	0.000	0.000	<b>0.641</b>
23	2	257	<b>0.044</b>	0.000	0.000	<b>0.220</b>
24	2	346	0.004	0.000	0.000	<b>0.663</b>
24	1	376	0.001	0.000	0.000	<b>0.024</b>
25	2	278	<b>0.225</b>	0.000	0.000	0.000
25	1	281	<b>0.265</b>	0.000	0.000	0.000
26	2	500	0.008	0.000	0.000	0.001
28	2	264	<b>0.310</b>	0.000	0.000	<b>0.053</b>
28	1	267	<b>0.122</b>	0.000	0.000	<b>0.085</b>
30	2	519	<b>0.322</b>	0.000	0.000	<b>0.245</b>
30	1	519	<b>0.710</b>	0.000	0.000	<b>0.023</b>
31	2	74	0.000	<b>0.015</b>	0.000	0.005
31	1	70	0.000	0.000	<b>0.018</b>	0.001
32	2	430	0.000	0.000	0.000	0.000
32	1	439	0.000	0.000	0.000	0.000
40	2	535	0.001	0.000	0.000	<b>0.122</b>

Примечание. Приведены значения уровня  $p$  (вероятность превышения фактического значения критерия хи-квадрат); эмпирические данные не противоречат теоретическим на уровне значимости 0.99, если  $p > 0.01$  (выделено жирным шрифтом).

\* Срок 1 – съемки 1965–1976 гг. (Согопа); срок 2 – съемки 2013–2019 гг.

\*\* Для средних радиусов озер.



**Рис. 3.** Пример соответствия эмпирического распределения площадей озер (сплошная линия) интегрально-экспоненциальному распределению (штриховая линия), участок 28.

лению (рис. 3), что соответствует модели 1.1 асинхронного старта; для срока 1 соответствие наблюдается на 5 участках из 11 (45 %). Одновременно на 8 участках из 17 распределение площадей озер отвечает логнормальному распределению, характерному для озерно-термокарстовых равнин. На 3 участках из 17 наблюдается соответствие эмпирических распределений гамма-распределению, все эти же выборки отвечают и логнормальному распределению, что соответствует модели синхронного старта [Викторов, 2006; Викторов и др., 2016, 2019б]. Близость к логнормальному распределению, как и в случае с хасыреями, объясняется двумя факторами:

- эрозионно-термокарстовые равнины на начальных стадиях представляли собой озерно-термокарстовые равнины, так как вероятность спуска озер при их изначально ограниченных размерах была невелика, а для этих равнин характерно логнормальное распределение площадей озер;

- интегрально-экспоненциальное распределение является предельным распределением при  $t \rightarrow +\infty$ , а прошедшее с начала термокарстового процесса время является хотя и большим, но конечным.

Интересно, что для типичных озерно-термокарстовых равнин справедливо в основном только логнормальное распределение, соответствия с гамма-распределением не наблюдается. Распределение средних радиусов озер не отвечает нормальному ни на одном участке. Наконец, на 5 участках для срока 2 распределения не отвечают ни одному из рассматриваемых видов.

Таким образом, в целом эмпирическая проверка позволяет сделать вывод, что ситуация асинхронного старта, описываемая моделью 1.1

для эрозионно-термокарстовых равнин, реализуется в природе на достаточном количестве территорий. Теоретически полученные закономерности (интегрально-экспоненциального распределения площадей озер) подтверждаются эмпирически на значительном числе ключевых участков.

В то же время признаки синхронного старта, описываемого моделью 1.0, присутствуют только на 17 % участках (на них наблюдается гамма-распределение площадей озер), при этом на 11 % одновременно наблюдается сходство с интегрально-экспоненциальным распределением.

Анализ данных показывает, что гипотеза о возможности развития эрозионно-термокарстовых равнин при синхронном старте, видимо, не отвечает реальности, так как нигде не наблюдается распределение средних радиусов озер, близкое к нормальному. В то же время признаки развития рассматриваемых равнин при справедливости гипотезы о квазиравномерном росте и асинхронном старте (модель 2.1) наблюдаются в виде гамма-распределения площади озер со значением параметра формы равным 0.5 только на одном участке из 17.

Таким образом, из анализа следует, что большая часть распределений может быть объяснена из гипотезы роста озер, хотя и находящегося под воздействием множества случайных факторов, но пропорционального плотности тепловых потерь через боковую поверхность озера (модели 1.0 и 1.1). Это согласуется с результатами анализа озерно-термокарстовых равнин [Викторов, 2006; Викторов и др., 2015, 2016]. В то же время на первый взгляд имеется несогласованность других полученных результатов: анализ озерно-термокарстовых равнин указывал на гипотезу синхронного старта, а в данном случае более чем в половине ситуаций есть признаки асинхронного старта (модель 1.1). Однако это может быть отчасти объяснено благоприятностью хасыреев как арены развития большого числа вторичных озер уже в пределах хасыреев.

Подчеркнем, что определение заозеренности показывает выполнение указанного выше условия, для которого доказано стремление параметров к предельным значениям в модели 1.1: для всех участков заозеренность находится в пределах 0.01–0.50, лишь на участке 24 достигая значения 0.66.

Несоответствие на пяти участках никаким распределениям может быть связано с переходными процессами при климатических изменениях. Исследование показало, что именно на двух из трех этих участков, входящих в состав пяти и при этом имеющих два срока съемки, значимо (по критерию Смирнова) отличаются распределения площадей озер за первый и второй срок; при этом сре-

ди всех исследованных участков такие отличия наблюдаются на четырех участках.

Настоящий анализ, безусловно, не претендует на исчерпывающую достоверность и должен уточняться. Ограниченность проведенного анализа связана прежде всего с предположением о слабом изменении климатических условий. В то же время очевидно, что данный анализ следовало провести в первую очередь, изучив ситуацию с наиболее простыми условиями.

### ВЫВОДЫ

1. На однородных участках эрозионно-термокарстовых равнин в различных физико-географических условиях в подавляющем большинстве случаев справедлива модель развития морфологической структуры, отвечающая асинхронному старту и росту размеров озер, пропорциональному плотности тепловых потерь через боковую поверхность.

2. На однородных участках эрозионно-термокарстовых равнин с различными физико-географическими условиями в подавляющем большинстве случаев справедлив интегрально-экспоненциальный закон распределения площади термокарстовых озер.

3. Анализ развития эрозионно-термокарстовых равнин за период с 1965 по 2019 г. показал, что при всех наблюдаемых изменениях их структура на значительном количестве участков не развивается, а находится в состоянии динамического равновесия, несмотря на широко обсуждаемые процессы изменения климата; это должно учитываться при прогнозе развития и оценке природных рисков.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 18-17-00226).*

### Литература

- Викторов А.С.** Основные проблемы математической морфологии ландшафта. М., Наука, 2006, 252 с.
- Викторов А.С.** Математическая морфология ландшафтов криолитозоны / А.С. Викторов, В.Н. Капралова, Т.В. Орлов, О.Н. Трапезникова, М.В. Архипова, П.В. Березин, А.В. Зверев, С.А. Садков, Е.Г. Панченко. М., РУДН, 2016, 232 с.
- Викторов А.С., Капралова В.Н., Орлов Т.В. и др.** Анализ развития морфологической структуры озерно-термокарстовых равнин на основе математической модели // Геоморфология, 2015, № 3, с. 3–13.
- Викторов А.С., Орлов Т.В., Садков С.А., Трапезникова О.Н.** Использование подходов математической морфологии ландшафта при дистанционной оценке природных опасностей // Геоэкология. Инж. геология, гидрогеология, геокриология, 2019а, № 5, с. 61–73.
- Викторов А.С., Орлов Т.В., Архипова М.В.** Закономерности распределения размеров хасыреев // Докл. РАН, 2019б, т. 488, № 6, с. 655–657.

**Капралова В.Н.** Закономерности развития термокарстовых процессов в пределах озерно-термокарстовых равнин (на основе подходов математической морфологии ландшафта): Автореф. дис. ... канд. геол.-мин. наук. М., 2014, 24 с.

**Кирпотин С.Н., Полищук Ю.М., Брыксина Н.А.** Динамика площадей термокарстовых озер в сплошной и прерывистой криолитозонах Западной Сибири в условиях глобального потепления // Вестн. ТГУ, 2008, № 311, с. 185–189.

**Кравцова В.И., Быстрова А.Г.** Изменение размеров термокарстовых озер в различных районах России за последние 30 лет // Криосфера Земли, 2009, т. XIII, № 2, с. 16–26.

**Крамер Г.** Математические методы статистики. М., Мир, 1970, 648 с.

**Полищук В.Ю.** Геоимитационное моделирование полей термокарстовых озер в зонах мерзлоты / В.Ю. Полищук, Ю.М. Полищук. Ханты-Мансийск, УИП ЮГУ, 2013, 129 с.

**Burn C.R., Smith M.W.** Development of thermokarst lakes during the Holocene at sites Near Mayo, Yukon Territory // Permafrost and Periglacial Processes, 1990, vol. I, p. 161–176.

**Grosse G., Jones B.M., Nitze I. et al.** Massive thermokarst lake area loss in continuous ice-rich permafrost of the northern Seward Peninsula, Northwestern Alaska, 1949–2015 // XI Intern. Conf. on Permafrost: Abstracts (Potsdam, 20–24 June 2016). Potsdam, Germany, 2016, p. 739–740.

**Smith L.C., Sheng Y., Macdonald G.M., Hinzman L.D.** Disappearing Arctic Lakes // Science, 2005, vol. 308, No. 3, p. 14.

**Victorov A.S.** Mathematical models of thermokarst erosion plains // GIS and Spatial Analysis: Proc. of IAMG. Toronto, Canada, printed by China Univ. Geosci. Printing House, 2005, vol. I, p. 62–67.

### References

- Victorov A.S. Osnovnyye problemy matematicheskoy morfologii landshafta [The main problems of the mathematical morphology of the landscape]. Moscow, Nauka, 2006, 252 p. (in Russian).
- Victorov A.S., Kapralova V.N., Orlov T.V. et al. Matematicheskaya morfologiya landshaftov kriolitozony [Mathematical Morphology of Cryolithozone Landscapes]. Moscow, RUDN, 2016, 232 p. (in Russian).
- Victorov A.S., Kapralova V.N., Orlov T.V. et al. Analysis of the development of the morphological structure of lake-thermokarst plains on the basis of a mathematical model. Geomorfologiya [Geomorphology], 2015, No. 3, p. 3–13 (in Russian).
- Victorov A.S., Orlov T.V., Sadkov S.A., Trapeznikova O.N. The use of mathematical landscape morphology approaches for remote assessment of natural hazards. Geoekologiya. Inzhenernaya geologiya, gidrogeologiya, geokriologiya [Geocology. Engineering Geology, Hydrogeology, Geocryology], 2019a, No. 5, p. 61–73 (in Russian).
- Victorov A.S., Orlov T.V., Arkhipova M.V. Regularities of the distribution of the size of the khasyreis. Doklady Akademii Nauk [Reports of the Academy of Sciences], 2019b, vol. 488, No. 6, p. 655–657 (in Russian).
- Kapralova V.N. Zakonomernosti razvitiya termokarstovykh protsessov v predelakh ozerно-termokarstovykh ravnin (na osnove podkhodov matematicheskoy morfologii landshafta) [Regularities of the development of thermokarst processes within the lake-thermokarst plains (based on the approaches of the mathematical morphology of landscapes)]. Abstract of PhD thesis, Moscow, 2014, 24 p. (in Russian).
- Kirpotin S.N., Polishchuk Yu.M., Bryksina N.A. The dynamics of the areas of thermokarst lakes in continuous and discontinuous

ous permafrost zones of Western Siberia under global warming. Vestnik TSU [Bulletin of TSU], 2008, No. 311, p. 185–189 (in Russian).

Kravtsova V.I., Bystrova A.G. Changes in thermokarst lake size in different regions of Russia for the last 30 years. Kriosfera Zemli [Earth's Cryosphere], 2009, vol. XIII, No. 2, p. 16–26 (in Russian).

Kramer G. Matematicheskiye metody statistiki [Mathematical Methods of Statistics]. Moscow, Mir, 1970, 648 p. (in Russian).

Polishchuk V.Yu., Polishchuk Yu.M. Geoimitatsionnoye modelirovaniye poley termokarstovyykh ozer v zonakh merzloty [Geosimulation Modeling of Fields of Thermokarst Lakes in Permafrost Zones]. Khanty-Mansiysk, Ural State University, 2013, 129 p. (in Russian).

Burn C.R., Smith M.W. Development of thermokarst lakes during the Holocene at sites Near Mayo, Yukon Territory. Permafrost and Periglacial Processes, 1990, vol. I, p. 161–176.

Grosse G., Jones B.M., Nitze I. et al. Massive thermokarst lake area loss in continuous ice-rich permafrost of the northern Seward Peninsula, Northwestern Alaska, 1949–2015. In: XI Intern. Conf. on Permafrost: Book of Abstracts (Potsdam, 20–24 June 2016). Potsdam, Germany, 2016, p. 739–740.

Smith L.C., Sheng Y., Macdonald G.M., Hinzman L.D. Disappearing Arctic Lakes. Science, 2005, vol. 308, No. 3, p. 14.

Victorov A.S. Mathematical models of thermokarst erosion plains. In: GIS and Spatial Analysis: Proc. of IAMG, Toronto, Canada, printed by China University of Geosciences Printing House, 2005, vol. I, p. 62–67.

*Поступила в редакцию 13 марта 2020 г.,  
после доработки – 4 ноября 2020 г.,  
принята к публикации 22 ноября 2020 г.*