

О ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛНАХ В УПРУГОЙ СРЕДЕ
ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В. А. Феоктистов

(Москва)

Рассмотрены волны в идеально проводящей упругой среде в двух случаях: 1) на свободной поверхности среды, заполняющей бесконечное полупространство и помещенной в однородное постоянное магнитное поле; 2) на поверхности раздела двух сред, из которых одна находится в магнитном поле. При определенной скорости взаимного движения сред имеет место неустойчивость. В случае отсутствия магнитного поля подобная задача исследовалась в работе [1], где была получена критическая скорость. Здесь рассмотрена неустойчивость, обусловленная колебаниями, распространяющимися перпендикулярно магнитному полю.

Уравнение, описывающее распространение малых деформаций идеально проводящего упругого тела, помещенного в однородное постоянное магнитное поле \mathbf{H} , имеет вид

$$\rho u_i = \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} \quad (1)$$

$$\Pi_{ik} = \sigma_{ik} + \frac{\mu}{4\pi} [(H^2 \delta_{ik} - 2H_i H_k) \operatorname{div} \mathbf{u} + (\mathbf{H}\nabla)(H_i u_k + H_k u_i - \delta_{ik} (\mathbf{H}\mathbf{u}))] \quad (2)$$

$$\sigma_{ik} = G \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad \mathbf{H} = \{H_x, H_y, H_z\} \quad (3)$$

$$H_i = \text{const} \quad (i = x, y, z)$$

Здесь ρ — плотность среды; \mathbf{u} — вектор смещения; G , λ — коэффициенты Ламэ; μ — магнитная проницаемость среды.

В случае плоской деформации в поперечном магнитном поле, когда $u_y = 0$, $\mathbf{H} = \{0, H, 0\}$ и производные по y равны нулю, волна, описываемая уравнением (1), распадается на две независимо распространяющиеся части, из которых одна описывает волны расширения, другая — волны сдвига [2]. Подобное разложение волны имеет место и при учете конечной, но достаточно малой, проводимости среды [3]. Если же магнитное поле лежит в плоскости вектора смещения, то волны расширения и волны сдвига связаны между собой. Для двух отличных от нуля компонент вектора \mathbf{u} справедливы уравнения

$$\begin{aligned} (2G + \lambda) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + (G + \lambda) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} - \rho u_x'' &= 0 \\ \left(2G + \lambda + \frac{\mu H^2}{4\pi} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \left(G + \frac{\mu H^2}{4\pi} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + (G + \lambda) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} - \rho u_z'' &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

при этом

$$\mathbf{H} = \{H, 0, 0\}, \quad u_y = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

Исходя из этих уравнений будет определена частота поверхностных магнитоупругих волн, распространяющихся вдоль магнитного поля.

Пусть упругая идеально проводящая среда занимает бесконечное полупространство $z < 0$. Бесконечная плоскость, ограничивающая эту среду с одной стороны, принята за плоскость xy . Магнитное поле направлено по оси x и отлично от нуля только в полупространстве, занимаемом средой. Решение уравнений (4) представляется в виде $\exp [i(\omega t - kx) + \gamma z]$. Условие совместности двух однородных уравнений, т. е. равенство нулю опреде-

лителя системы, для γ дает биквадратное уравнение

$$\begin{aligned} a\gamma^4 + b\gamma^2 + c &= 0, & a &= \left(2G + \lambda + \frac{\mu H^2}{4\pi}\right) \\ b &= \frac{k^2(G + \lambda)^2}{G} - \frac{[(2G + \lambda)k^2 - \rho\omega^2]a}{G} + \left[\rho\omega^2 - k^2\left(G + \frac{\mu H^2}{4\pi}\right)\right] \\ c &= -\frac{1}{G} \left[\rho\omega^2 - k^2\left(G + \frac{\mu H^2}{4\pi}\right)\right] [(2G + \lambda)k^2 - \rho\omega^2] \end{aligned}$$

решение которого есть

$$\gamma_1 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^{1/2}, \quad \gamma_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^{1/2} \quad (\operatorname{Re} \gamma_1 > 0) \\ (\operatorname{Re} \gamma_2 > 0)$$

Два других решения соответствуют неограниченному возрастанию деформаций по направлению в глубь среды. При $H = 0$

$$\gamma_1 = \sqrt{k^2 - \rho\omega^2 / (2G + \lambda)}, \quad \gamma_2 = \sqrt{k^2 - \rho\omega^2 / G}$$

при этом γ_1 и γ_2 определяют зависимость от z для продольной и поперечной волны, соответственно [4]. Таким образом, решение системы (4) имеет вид

$$\begin{aligned} u_x &= (Ae^{\gamma_1 z} + Be^{\gamma_2 z}) e^{i(\omega t - kx)} \quad (A, B = \text{const}) \\ u_z &= \left(\frac{Aik\gamma_1(G + \lambda)e^{\gamma_1 z}}{\rho\omega^2 - k^2(G + 1/4\mu H^2/\pi) + a\gamma_1^2} + \frac{Bik\gamma_2(G + \lambda)e^{\gamma_2 z}}{\rho\omega^2 - k^2(G + 1/4\mu H^2/\pi) + a\gamma_2^2} \right) e^{i(\omega t - kx)} \end{aligned}$$

На свободной поверхности среды выполняется граничное условие:

$$\left(\sigma_{ik}^\circ + \frac{\mu}{4\pi} \left[H_i H_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} H^2 \right] + \Pi_{ik}\right) n_k = 0 \quad (5)$$

Здесь \mathbf{n} — единичный вектор нормали к возмущенной поверхности среды; σ_{ik}° — тензор напряжения в невозмущенном состоянии, имеющий только одну компоненту $\sigma_{zz}^\circ = 1/8\mu H^2/\pi$.

Подставляя (2), (3) в (5) и учитывая, что $n_k = \delta_{kz} - \nabla_k u_z$, граничное условие в линейном приближении записываем так:

$$\left(G + \frac{\mu H^2}{8\pi}\right) \frac{\partial u_z}{\partial x} + G \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0, \quad \left(2G + \lambda + \frac{\mu H^2}{4\pi}\right) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

Приравнявая нулю определитель системы (6), получим уравнение для определения зависимости частоты ω от k .

$$\begin{aligned} \gamma_1' \left[\frac{1 + \nu}{1 - 2\sigma} + (\xi^2 - 1 - 2\nu) + \gamma_1'^2 a' \right] \left[a' \gamma_2'^2 \left(\frac{1 - 2\sigma}{2\sigma} \right) - (\xi^2 - 1 - 2\nu) \right] = \\ = \gamma_2' \left[\frac{1 + \nu}{1 - 2\sigma} + (\xi^2 - 1 - 2\nu) + \gamma_2'^2 a' \right] \left[a' \gamma_1'^2 \left(\frac{1 - 2\sigma}{2\sigma} \right) - (\xi^2 - 1 - 2\nu) \right] \quad (7) \\ \gamma_1' = \frac{\gamma_1}{k}, \quad \gamma_2' = \frac{\gamma_2}{k}, \quad \xi^2 = \frac{\rho\omega^2}{Gk^2}, \quad \nu = \frac{\mu H^2}{8\pi G}, \quad a' = \frac{2(1 - \sigma)}{(1 - 2\sigma)} + 2\nu \\ b' = \frac{1}{(1 - 2\sigma)^2} - \left[\frac{2(1 - \sigma)}{(1 - 2\sigma)} - \xi^2 \right] \left[\frac{2(1 - \sigma)}{(1 - 2\sigma)} + 2\nu \right] + (\xi^2 - 1 - 2\nu) \\ c' = \left[\xi^2 - \frac{2(1 - \sigma)}{(1 - 2\sigma)} \right] [\xi^2 - 1 - 2\nu] \end{aligned}$$

Здесь σ — коэффициент Пуассона. Уравнение (7) определяет ξ как функцию коэффициента Пуассона σ и безразмерного параметра ν .

При $\nu = 0$ уравнение (7) переходит в уравнение, определяющее скорость поверхностных волн Рэлея. Определим корни выражения (7) при $\sigma = 0.25$, $\nu = 1$. Путем численного счета можно убедиться в том, что в области вещественных значений уравнение (7) имеет два корня, которые соответствуют колебаниям, убывающим на бесконечности. Первый корень обращает в нуль выражение $(b' - 4a'c')^{1/2}$ и равен $\xi_1 = 0.618$.

В области значений ξ , удовлетворяющих условию $(b'^2 - 4a'c') < 0$, выражение (7) удобно переписать в виде

$$\text{Im} \left\{ \gamma_1' \left[\frac{(1+\nu)}{(1-2\sigma)} + (\xi^2 - 1 - 2\nu) + a'\gamma_1'^2 \right] \left[a'\gamma_2'^2 \left(\frac{1-2\sigma}{2\sigma} \right) - (\xi^2 - 1 - 2\nu) \right] \right\} = 0$$

Это уравнение удовлетворяется при $\xi_2 = 1.53$. При значениях $\xi > \xi_2$ корни уравнения (7) приводят к чисто мнимым решениям для γ_2' и, следовательно, колебания являются незатухающими при $z \rightarrow -\infty$. Таким образом, вдоль магнитного поля могут распространяться две волны со скоростями

$$\omega_1 / k = \xi_1 \sqrt{G / \rho}, \quad \omega_2 / k = \xi_2 \sqrt{G / \rho}$$

При этом скорость волн Рэлея (если $\sigma = 0.25$, то $\xi = 0.916$ для волн Рэлея) находится в промежутке между ω_1 / k и ω_2 / k .

Рассмотрим две идеально проводящие упругие среды с плоской границей раздела, которая принята за плоскость xy . Магнитное поле по-прежнему отлично от нуля только в полупространстве $z < 0$, но теперь направлено вдоль оси y . Среда 2, занимающая верхнее полупространство, движется относительно среды 1 со скоростью ν вдоль оси x . Рассмотрим упругую волну на поверхности раздела двух сред, когда производные по y равны нулю и $u_y = 0$. В этих предположениях решение уравнения (1) в области 1 удобно искать в виде $u = \text{grad } \varphi + \text{rot } (j\psi)$, где первое слагаемое описывает волны расширения, второе — волны сдвига. Для потенциалов φ и ψ имеем [2]

$$\begin{aligned} \rho_1 \varphi'' - (2G_1 + \lambda_1 + 1/4 \mu H^2 / \pi) \Delta \varphi &= 0 \\ \rho_1 \psi'' - G_1 \Delta \psi &= 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения (8) дают возможность получить дисперсионное уравнение для волн на поверхности раздела сред и изучить неустойчивость, связанную с этими волнами. Неустойчивость взаимного движения двух упругих сред при наличии магнитного поля рассмотрена также в работе [5].

Если потенциалы φ, ψ искать в виде

$$\varphi = A' e^{ik(w_1 t - x) + \alpha_1 k z}, \quad \psi = B' e^{ik(w_1 t - x) + \beta_1 k z}$$

то из (8) получается

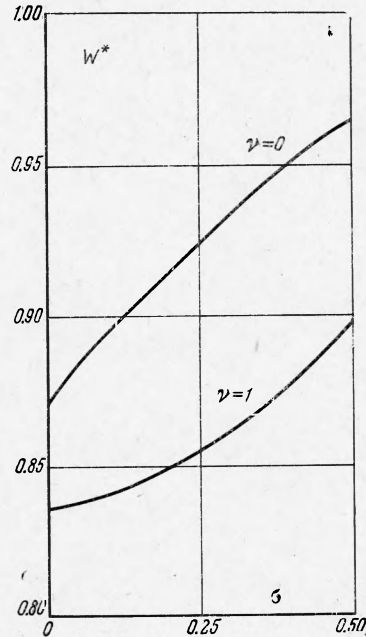
$$\begin{aligned} \alpha_1^2 &= 1 - \frac{w_1^2 \rho_1}{(2G_1 + \lambda_1 + 1/4 \mu H^2 / \pi)} \\ \beta_1^2 &= 1 - \frac{w_1^2 \rho_1}{G_1} \end{aligned}$$

Чтобы колебания затухали по направлению внутрь среды 1, необходимо, чтобы $\text{Re } \alpha_1 > 0, \text{Re } \beta_1 > 0$. Пусть на границе раздела сред возникает слабое возмущение давления вида $p = p_0 \exp [ik(w_1 t - x)]$. Тогда константы A', B' определяются из следующего граничного условия:

$$\left(\sigma_{ik}^0 + \frac{\mu}{4\pi} \left[H_i H_k - \frac{\delta_{ik}}{2} H^2 \right] + \Pi_{ik} \right) n_k = -p n_i \quad (9)$$

Подставляя (2), (3) в (9) и учитывая, что $n_k = \delta_{kz} - \nabla_k u_z$ граничное условие в линейном приближении записываем так:

$$2G_1 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \left(\lambda_1 + \frac{\mu H^2}{4\pi} \right) \text{div } \mathbf{u} = -p \quad \left(G_1 + \frac{\mu H^2}{8\pi} \right) \frac{\partial u_z}{\partial x} + G_1 \frac{\partial u_x}{\partial z} =$$



Фиг. 1

После простых вычислений можно получить выражение для смещения точек поверхности среды 1 вдоль оси z

$$u_z^{(1)} = \frac{P}{kG_1} f_1(w_1) \quad (10)$$

$$f_1(w_1) = -\frac{w_1^2 \rho_1}{G_1} \frac{\alpha_1}{2(2 + \frac{1}{8} \mu H^2 / \pi G_1) \alpha_1 \beta_1 - (1 + \beta_1^2) [(1 + \beta_1^2) + \frac{1}{8} \mu H^2 / \pi G_1]}$$

При $H = 0$ формула (10) совпадает с соответствующим выражением работы [1]. Приравняв нулю знаменатель формулы (10), получаем уравнение для определения частоты поверхностных волн, распространяющихся на свободной поверхности перпендикулярно магнитному полю. При фиксированных значениях коэффициента Пуассона σ и безразмерного параметра ν это уравнение имеет только один корень w_1^* , удовлетворяющий условию $\operatorname{Re} \alpha_1 > 0$, $\operatorname{Re} \beta_1 > 0$. На фиг. 1 дан график зависимости величины $W^* = w_1^* / \sqrt{G_1 / \rho}$ от σ при $\nu = 1$. Для сравнения приведена аналогичная кривая при $\nu = 0$, определяющая скорость w_2^* поверхностных волн Рэлея в зависимости от коэффициента Пуассона.

Смещение $u_z^{(2)}$ для среды 2 получается из формулы (10), в которой надо магнитное поле положить равным нулю и w_1 заменить на $w_2 = w_1 - \nu$.

Таким образом

$$u_z^{(2)} = \frac{P}{kG_2} f_2(w_2)$$

$$f_2(w_2) = -\frac{w_2^2 \rho_2}{G_2} \frac{\alpha_2}{4\alpha_2 \beta_2 - (1 + \beta_2^2)^2}$$

$$\alpha_2^2 = 1 - w_2^2 \rho_2 / (2G_2 + \lambda_2)$$

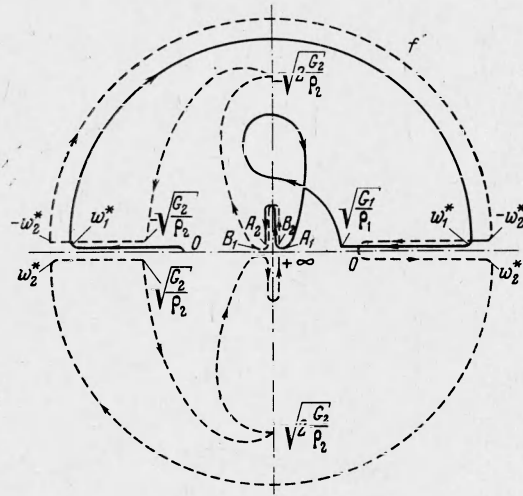
$$\beta_2^2 = 1 - w_2^2 \rho_2 / G_2$$

При этом $\operatorname{Re} \alpha_2 < 0$, $\operatorname{Re} \beta_2 < 0$, так как среда 2 занимает полупространство $z > 0$.

Из условия равенства смещений точек поверхности сред 1 и 2 находится уравнение для определения зависимости между w_1 и k

$$G_1^{-1} f_1(w_1) = G_2^{-1} f_2(w_2)$$

$$w_2 = w_1 - \nu \quad (11)$$



Фиг. 2

Если упругая замагниченная среда обтекается несжимаемой идеальной жидкостью, то вместо (11) справедливо уравнение

$$G_1^{-1} f_1(w_1) = -w_2^{-2} \rho_2^{-1}$$

В тех случаях, когда комплексная скорость, определенная при решении уравнений (11), имеет отрицательную мнимую часть, колебания будут нарастающими во времени, а состояние системы — неустойчивым.

Пусть $w_1 = a_1 - i\varepsilon$, где $0 < a_1 < +\infty$, тогда функция f_1 на комплексной плоскости f дает некоторую кривую, вид которой представлен на фиг. 2 сплошной линией. Стрелка указывает направление обхода кривой, когда a_1 возрастает от 0 до $+\infty$. Точка A_1 соответствует значению функции f_1 при $a_1 = [\rho_1^{-1}(2G_1 + \lambda_1 + \frac{1}{4} \mu H^2 / \pi)]^{1/2}$, а точка B_1 — значению функции при $a_1 = +\infty$. При преобразовании, совершаемом функцией f_2 , прямая линия, параллельная действительной оси и смещенная на бесконечно малое расстояние в нижнюю полуплоскость, переходит в кривую, обозначенную на фиг. 2 пунктиром. Стрелка указывает направление обхода

при изменении a_2 от $-\infty$ до $+\infty$, при этом, когда a_2 меняет знак, кривая переходит из верхней полуплоскости в нижнюю. Вид этой кривой по существу ничем не отличается от кривой, приведенной в работе [1].

Точки A_2 и B_2 соответствуют значениям функции f_2 при $a_2 = -\sqrt{(2G_2 + \lambda_2)\rho_2^{-1}}$ и $a_2 = -\infty$, соответственно. Пересечение сплошной и пунктирной линий означает то, что уравнения (11) допускают решения для скорости w_1 , имеющей отрицательную мнимую часть.

Если $v = 0$, то $a_2 > 0$ (учитывая, что $a_2 = a_1 - v$) и f_2 дает только ту часть кривой, которая расположена в нижней полуплоскости.

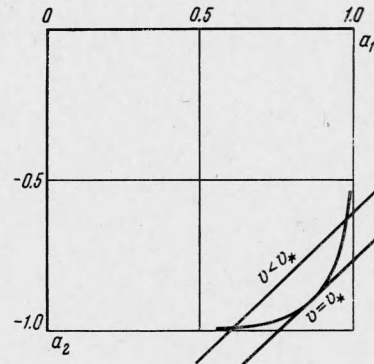
Это соответствует тому, что уравнения (11) имеют решение только при действительных значениях w_1 . Если $v \neq 0$ то, как видно из фиг. 2, пунктирная и сплошная линии могут пересечься, при этом пересечение имеет место, когда:

$$(1) \quad a_1 < \sqrt{G_1/\rho_1}, \quad |a_2| < \sqrt{G_2/\rho_2}$$

$$(2) \quad a_1 > \sqrt{(2G_1 + \lambda_1 + \frac{1}{4}\mu H^2/\pi)\rho_1^{-1}}, \quad |a_2| > \sqrt{(2G_2 + \lambda_2)\rho_2^{-1}}$$

Так как $a_1 + |a_2| = v$, то первое условие соответствует меньшим по величине значениям скорости взаимного движения. Если пересечение будет в первом октанте, то $w_1^* < v < (w_2^* + \sqrt{G_1/\rho_1})$; аналогично для второго октанта $w_2^* < v < (w_1^* + \sqrt{G_2/\rho_2})$. При скоростях $v < \min\{w_1^*, w_2^*\}$ существуют только действительные решения. В этом случае в полном соответствии с работой [1] решение определяется из графического построения. Для этого, исходя из первого уравнения (11), строится график зависимости $w_1 = F(w_2)$, когда $0 < a_2 < \sqrt{G_2/\rho_2}$ и на него наносится прямая $a_2 = a_1 - v$.

Точка пересечения определяет решение фиг. 3. При скорости $v > v_*$ решение уравнений (11) переходит в область комплексных значений w_1 , имеющих отрицательную мнимую добавку. Аналогичные рассуждения можно провести и для отрицательных значений a_1 . При $v = 1$ и $\sigma = 2/7$ была определена критическая



Фиг. 3

скорость v_* для двух одинаковых сред; оказалось $v_* = 1.78 \sqrt{G/\rho}$. При $v=0$, согласно результатам работы [1], критическая скорость равна удвоенной величине скорости волн Рэля, т. е. $v_* = 1.85 \sqrt{G/\rho}$. Таким образом, поперечное магнитное поле практически не изменяет величины критической скорости.

Автор признателен Киселеву М. И. за полезное обсуждение.

Поступила 15 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Л а м и е р Р. Е. Устойчивость взаимного движения сред. Изв. вузов, Авиационная техника, 1959, № 4, стр. 32—39.
2. Д о л б и и Н. И. Распространение упругих поверхностных волн в полупространстве, находящемся в магнитном поле. ПМТФ, 1963, № 1, стр. 84—87.
3. У ф л я н д Я. С. Об одном приближенном способе решения задач магнитоупругости для тел конечной проводимости. ПМТФ, 1965, № 2, стр. 155—157.
4. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Теория упругости. «Наука», 1965.
5. K a l i s k i S. Stability of relative motion of two perfectly conducting elastic media in a magnetic field parallel to the direction of motion. Proc. of Vibration Problems, Warsaw, 1964, vol. 5, No 2, p. 75—86.