

РАВНОПРОЧНЫЕ ОТВЕРСТИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С НАЧАЛЬНОЙ НЕПРАВИЛЬНОСТЬЮ

Н. В. Пустовой, И. Д. Суздальницкий
(Новосибирск)

Применяемые в конструкциях цилиндрические оболочки могут подвергаться значительным механическим воздействиям в виде изгиба или растяжения, которые приводят к появлению трещин и последующему разрушению. Для перераспределения напряжений и увеличения гибкости их делают гофрированными, вводят перфорацию. В настоящей работе рассматривается задача об определении формы отверстий, образующих периодическую систему в изотропной гофрированной цилиндрической оболочке и удовлетворяющих условию равнопрочности. Согласно этому условию, тангенциальное напряжение вдоль контура отверстия должно быть постоянным [1].

Рассматривается изотропная цилиндрическая оболочка с начальной неправильностью типа гофра, вдоль продольного сечения которой расположена периодическая система конгруэнтных отверстий с шагом решетки длины H . Контур j -го отверстия обозначен через L_j , $L = UL_j$. Направление оси x совпадает с направлением оси оболочки, ось y ей ортогональна, начало координат в центре контура L_0 . К оболочке приложены растягивающие усилия, изгибающие моменты отсутствуют:

$$(1) \quad S_x^\infty = S_y^\infty, \quad S_{xy}^\infty = S_z^\infty, \quad S_{xz}^\infty = M_x^\infty = M_y^\infty = M_{xy}^\infty = 0,$$

контуров отверстий свободны от нормальных и касательных усилий, изгибающих моментов и перерезывающей силы. Тангенциальное напряжение на контурах L_j предполагается постоянным и подлежащим определению так же, как и форма отверстий.

Пусть ξ, η — такая ортогональная криволинейная система координат, что линия $\xi = 0$ совпадает с контуром L_0 . Краевые условия на L_0 :

$$(2) \quad S_\xi = S_{\xi\eta} = M_\xi = M_{\xi\eta} = Q_\xi = 0, \quad S_\eta = S^* = \text{const.}$$

Дифференциальные уравнения напряженного состояния изотропной цилиндрической оболочки с начальной неправильностью w_0 [2]:

$$(3) \quad DR\Delta^2(w - w_0) + \partial^2 U / \partial x^2 = 0, \quad \Delta^2 U - EhR^{-1} \partial^2(w - w_0) / \partial x^2 = 0.$$

Здесь U — функция напряжений; w — прогиб; R, h — радиус и толщина оболочки; $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$; E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона; $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$.

Вводя комплексную функцию напряжений $\Psi = U/D + i\sqrt{12(1 - \nu^2)} \times (w - w_0)/h$, систему (3) приведем к одному дифференциальному уравнению, общее решение которого можно представить контурным интегралом

$$(4) \quad \Psi(z, \bar{z}) = \int_L \sum_{k=1}^2 \Gamma_k(z - \tau, \bar{z} - \bar{\tau}) [g_{2k-1}(t) + ig_{2k}(t)] dt,$$

где $z = (y + ix)/a$; $\bar{z} = (y - ix)/a$; a — линейный размер; $\tau = \tau(t)$ — аффикс точки на контуре L ; $g_k(t)$ — неизвестные функции, подлежащие определению из краевых условий. Ядра (4) приводятся в [3], их разложения по степеням параметра $\varepsilon^2 = \sqrt{12(1 - \nu^2)}a^2/16Rh$, предполагаемого малым, имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= \Gamma_{k1} + i\Gamma_{k2}, \quad k = 1, 2, \\ \Gamma_{11} &= 0,5 + 2\pi^{-1}\varepsilon^2 \text{Re}[w(2z\bar{z} - z^2) - z\bar{z}] + O(\varepsilon^4), \\ \Gamma_{12} &= -2\pi^{-1}\omega + \varepsilon^2 \text{Re}(z\bar{z} - z^2/2) + O(\varepsilon^4), \end{aligned}$$

$$\Gamma_{21} = \text{Im}[-z + \pi \varepsilon^2((2z^3/3 + 6z\bar{z}^2)\omega + 4z^2\bar{z})] + O(\varepsilon^4),$$

$$\Gamma_{22} = \text{Im}[4\pi^{-1}z\omega + \varepsilon^2(z^2/6 + 3z\bar{z}^2/2)] + O(\varepsilon^4), \quad \omega = 0,5 \ln z\bar{z} + \text{const.}$$

В (4) следует ввести учитывающее условия (1) дополнительное слагаемое $U^\infty(z, \bar{z}) = 0,25a^2 \text{Re}[(S_1 + S_2)z\bar{z} + (S_1 - S_2 + 2iS_{12})z^2]$. Компоненты усилий, моментов и перерезывающих сил в координатах ξ, η выражаются через функцию напряжений и прогиб по формулам

$$(5) \quad \begin{aligned} S_\xi + S_\eta &= 4a^{-2} \partial^2 U / \partial z \partial \bar{z}, \\ S_\eta - S_\xi + 2iS_{\xi\eta} &= 4a^{-2} e^{2i\theta} \partial^2 U / \partial z^2, \\ M_\xi + M_\eta &= -4a^{-2} (1 + \nu) D \partial^2 w / \partial z \partial \bar{z}, \\ M_\eta - M_\xi - 2iM_{\xi\eta} &= 4a^{-2} e^{2i\theta} (1 - \nu) D \partial^2 w / \partial z^2, \\ Q_\xi + iQ_\eta &= 8ia^{-3} e^{i\theta} D \partial^3 w / \partial z^2 \partial \bar{z}, \end{aligned}$$

где θ — угол между направлениями оси y и касательной к координатной линии ξ в сторону ее возрастания.

Отделив в (4) действительную и мнимую части, подчиним их крайевым условиям (2) согласно формулам (5). Получим систему сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $g_k(t)$. Положим $g_k(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{2j} g_{kj}(t)$, $\delta = D/a^2$ и введем функции

$$\Phi_{kj}(z) = \frac{2\delta}{\pi i} \int_L \left[\frac{i g_{kj}(t) - \bar{\tau} g_{k+2,j}(t)}{z - \tau} - \ln(z - \tau) g_{k+2,j}(t) \right] dt,$$

$$\Phi_{k+2,j}(z) = \frac{2\delta}{\pi i} \int_L \frac{g_{k+2,j}(t)}{z - \tau} dt, \quad \Phi(z) = \varphi'(z), \quad k = 1, 2; \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\Phi_{21}^0(z) = \delta \int_L [i(z - \tau - 3\bar{\tau}) g_{40}(t) + g_{20}(t)] dt,$$

$$\Phi_{41}^0(z) = \delta \int_L [3i(\tau - z) g_{40}(t) - g_{20}(t)] dt.$$

Пусть функция $z = \omega(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{2j} \omega_j(\zeta)$ выполняет конформное отображение внешности многосвязного контура L на внешность периодической системы кругов $\gamma = \{|\zeta - nH| = 1, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Тогда, сохраняя слагаемые при ε^0 и ε^2 , систему сингулярных интегральных уравнений преобразуем к следующей краевой задаче теории функций комплексного переменного:

$$(6) \quad S_1 + S_2 + 4\text{Re} \Phi_{40}(z) = S_0^*;$$

$$(7) \quad \frac{\bar{\zeta}^2 \bar{\omega}'_0}{\omega'_0} \left[S_1 - S_2 + 2 \left(\frac{\bar{\omega}_0}{\omega'_0} \Phi'_{40}(\zeta) + \Phi_{20}(\zeta) \right) \right] = S_0^*;$$

$$(8) \quad 4\text{Re} [\Phi_{41}(z) + \Phi_{41}^0(z)] + 4\delta [2 \sqrt{2(1 - \nu^2)} w_0(z, \bar{z})/h - 2\text{Re} \varphi_{30}^*(z)] = S_1^*;$$

$$(9) \quad \begin{aligned} & \frac{\bar{\zeta}^2}{\omega'_0} \left\{ 2 \left[\bar{\omega}_0 (\Phi'_{41}(\zeta) + \Phi_{41}^0(\zeta)) + \omega'_0 (\Phi_{21}(\zeta) + \Phi_{21}^0(\zeta)) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\omega_1 - \frac{\omega_1 \bar{\omega}_0}{\omega'_0} \right) \Phi'_{40}(\zeta) + \left(\omega'_1 - \frac{\omega_0 \bar{\omega}_1}{\omega'_0} \right) \left(\Phi_{20}(\zeta) + \frac{S_1 - S_2}{2} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\delta \omega'_0 (2\overline{\varphi_{30}^*}(\zeta) - \sqrt{12(1 - \nu^2)} w_0(z, \bar{z})/h) \right\} = S_1^*; \end{aligned}$$

$$(10) \quad \varphi_{30}(z) + z\overline{\varphi'_{30}(z)} + \overline{\varphi_{10}(z)} = h^{-1} \sqrt{12(1-\nu^2)} \partial^2 w_0 / \partial \bar{z}^2,$$

где $S^* = S_0^* + \varepsilon^2 S_1^* + O(\varepsilon^4)$; $\omega_j = \omega_j(\zeta)$; $\varphi_{30}^*(z) = \int_{z_0}^z \varphi_{30}(z) dz$;

для $\Phi(\omega(\zeta))$ сохраняется обозначение $\Phi(\zeta)$.

Из (6), (7) получим решения задачи о периодической системе равнопрочных отверстий в пластине, поправочные коэффициенты при ε^2 , учитывающие кривизну оболочки, найдем из (8), (9), а функции φ_{10} , φ_{30} , связанные с влиянием начальной неправильности, — из (10). Вывод уравнения (10) повторяет рассуждения [4] при изучении изгиба пластин.

Воспользуемся методом [5] решения задач типа (6)—(10) для периодических систем отверстий. Если функция $F_0(z)$ определена в полосе $|\text{Im}z| < H$ комплексной плоскости z , то функция $F(z)$, имеющая период Hi и совпадающая с $F_0(z)$ в этой полосе, может быть представлена в виде

$$F(z) = F_0(z) + \frac{1}{\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} \int_{L_0}^{\bar{z}} F(\xi) (\xi - z)^{2k+1} d\bar{\xi},$$

$$\alpha_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k}, \quad \lambda = 1/H.$$

Пусть в окрестности $z = 0$ имеет место разложение

$$F_0(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{2m} F_{0m}(z), \quad F_{0m}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{mj} z^{1-2j}.$$

Тогда

$$(11) \quad F(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m z^{2m+1},$$

$$B_{-m} = \beta_{0m} + \lambda^2 \beta_{1m} + \lambda^4 \beta_{2m} + O(\lambda^6), \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$B_0 = -2\alpha_2 \lambda^2 \beta_{01} - 2\lambda^4 (\alpha_2 \beta_{11} - 3\alpha_4 \beta_{02}) + O(\lambda^6),$$

$$B_1 = 2\alpha_4 \lambda^4 \beta_{01} + O(\lambda^6).$$

Приняв для неизвестных функций разложения вида (11), подставляя их в уравнения (6)—(10) и приравнивая между собой коэффициенты при одинаковых степенях λ , получим систему нелинейных алгебраических уравнений, численное решение которой выполняется методом последовательных приближений.

Форма равнопрочного отверстия определяется уравнением [6] $r = |\omega(e^{i\theta})|$.

Оценка жесткости оболочки с отверстиями может быть выполнена путем определения приведенных параметров. Пусть энергия деформации линейного элемента вдоль линии центров от края отверстия до середины

отрезка между центрами этого и соседнего отверстий $\mathcal{E} = \int_{R_0}^{H/2} S_x U_x dx$ в

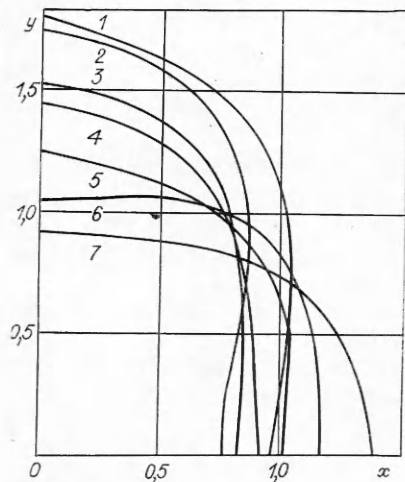
перфорированной оболочке с упругими постоянными E , ν равна энергии деформации \mathcal{E}_0 линейного элемента длины $H/2$ вдоль той же линии в сплошной оболочке, упругие постоянные которой E_0 , ν_0 . Постоянные E_0 , ν_0 назовем приведенными модулем упругости и коэффициентом Пуассона,

а отношение $k_{пр} = \frac{E_0/(1-\nu_0)}{E/(1-\nu)}$ — коэффициентом приведения. Используя представления компонентов напряжений и смещений через функции φ_2 , φ_4 и их производные $S_x = \text{Re}(2\Phi_4 + z\Phi_4' + \Phi_2)$, $2\mu u_x = \text{Im}(\kappa\varphi_4 - z\varphi_4' - \bar{\varphi}_2)$, $2\mu = E/(1+\nu)$, $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$, имеем

$$\mathcal{E} = T/2\mu, \quad T = [Q_{-1}^2 - Q_{-2}(C_1 - 3C_2)](2H^{-2} - 0,25R_0^{-2}) -$$

$$- Q_{-1}(C_1 - C_2) \ln(0,5H/R_0) + C_1 C_2 (H^2/8 - R_0^2) -$$

$$- Q_1(C_1 + 3C_2)(H^4/64 - R_0^4/4).$$



При вычислениях полагалось, что коэффициенты Пуассона ν , ν_0 исходной и приведенной среды одинаковые, равные 0,3.

На рисунке показана форма равнопрочного отверстия в оболочке с циклическим гофром при различных значениях параметров нагрузки $S = S_2/S_1$, решетки $\lambda = a/H$, глубины гофра $F = f_0 E h / 8 R S_1$ и кривизны оболочки ε^2 . Для кривых 2—7 $\varepsilon^2 = 0,2$ и соответственно $S = 1, 1; 1; 0,6; 0,6; 0,6$, $\lambda = 0,2; 0,1; 0,1; 0,2; 0,1; 0,1$, $F = 0,4; 0,4; 0; 0,4; 0,4; 0$. Для кривой 1 $S = 1$, $\lambda = 0,1$, $F = 0$, $\varepsilon^2 = 0,4$. Таблица иллюстрирует поведение коэффициентов концентрации напряжений на контуре отверстия $\sigma = S_0/S_1$ и приведения в зависимости от соотношения поперечных и продольных усилий и глубины гофра.

Обнаруживаются следующие особенности формы равнопрочного отверстия. При малых F , λ , ε^2 отверстие вытянуто вдоль оси оболочки, с ростом каждого из этих параметров оно перестраивается и оказывается вытянутым вдоль поперечного сечения. Например, при $F = 0$, $\lambda = 0,1$, $\varepsilon^2 = 0,2$ отношение длины поперечного радиуса к длине продольного равно 0,3; 0,65; 1,5 соответственно при $S = 0,4; 0,6; 1$. Коэффициент концентрации напряжений σ растет с увеличением F , ε^2 , S и практически не меняется при изменении λ . Коэффициент приведения $k_{пр}$ с ростом F при $S \geq 0,6$ увеличивается и при меньших значениях S убывает. При постоянном F с ростом S и ε^2 он уменьшается.

В случае винтового гофра отверстие поворачивается в направлении начального прогиба оболочки. Однако этот поворот незначителен. Наибольшее отклонение в значениях радиусов, имеющих одинаковый наклон α к оси оболочки, достигается при $\alpha = \pm \pi/6$. Например, $[r(-\pi/6) - r(\pi/6)]/r(0)$ при $F = 0,4$, $S = 1 \sim 0,8$, $\varepsilon^2 = 0 \sim 0,4$ и отношении шага решетки к радиусу оболочки, равном 0,5, колеблется в пределах от 3,5 до 7%.

Результаты вычислений теряют достоверность при $\varepsilon^2 > 0,5$, $\lambda > 0,4$, $F > 5$, $S < 0,3$. Первые три ограничения связаны с особенностями использованных при решении задачи методов малого параметра, последнее — с невозможностью существования равнопрочной формы отверстия при малых S .

S	F							
	0		0,2		0,4		0,6	
	σ	$k_{пр}$	σ	$k_{пр}$	σ	$k_{пр}$	σ	$k_{пр}$
1,0	3,26	0,816	3,41	0,843	3,65	0,887	3,69	0,963
0,8	2,92	0,843	3,06	0,853	3,20	0,874	3,34	0,912
0,6	2,55	0,906	2,68	0,904	2,82	0,910	2,96	0,929
0,4	2,12	1,009	2,25	0,992	2,38	0,984	2,51	0,988

Здесь $C_1 = S_1 - 0,5\pi\varepsilon^2 D_{-1} + Q_0$; $C_2 = C_1 - \nu(S_1 + S_2 + 2\pi\varepsilon^2 D_{-1})/(1 + \nu)$; $Q_j = D_j + \varepsilon^2 P_j$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); D_j, P_j — коэффициенты разложений функций $\varphi_{20}(z)$, $\varphi_{21}(z)$ в ряды вида (11). Если положить $D_j = P_j = R_0 = 0$ и вместо E , ν ввести E_0 , ν_0 , то $\mathfrak{D}_0 = T_0/2\mu_0$, где $T_0 = S_1(S_1 - \nu_2 S_2)H^2/8(1 + \nu_0)$, $2\mu_0 = E_0/(1 + \nu_0)$. Из равенства $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0$ следует $k_{пр} = T_0/T$.

Вычисления выполнялись для случая, когда начальная неправильность задана функцией $w_0 = f_0 \cos(2\pi ax/H + cy/R)$, имитирующей цилиндрическую оболочку с винтовым (при $c = a$) или циклическим (при $c = 0$) гофром, имеющим амплитуду f_0 , наклон $H/2\pi R$ и тот же шаг H , что и шаг перфорации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П., Ершов Л. В. Механика разрушения. — М.: Машиностроение, 1977.
2. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. — М.: Физматгиз, 1963.
3. Куршин Л. М., Суздальницкий И. Д. К представлению решений для цилиндрической оболочки, ослабленной отверстиями // ДАН СССР. — 1974. — Т. 219, № 4.
4. Угодчиков А. Г., Длугач М. И., Степанов А. Е. Решение краевых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах. — М.: Высш. шк., 1970.
5. Космодамианский А. С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. — Киев: Вища шк., 1975.
6. Черепанов Г. П. Обратные задачи плоской теории упругости // ПММ. — 1974. — Т. 38, вып. 6.

Поступила 16/XII 1986 г.

УДК 539.3

УСРЕДНЕННЫЙ КРИТЕРИЙ ПРОЧНОСТИ СВЯЗУЮЩЕГО ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

А. Г. Колпаков

(Новосибирск)

Рассматривается задача построения критерия прочности связующего композиционных материалов, армированных высокомолекулярными волокнами, в терминах усредненных (макроскопических) напряжений. Решение проводится на основе анализа «ячеечной задачи» [1] с привлечением гипотез, учитывающих существенное различие жесткостей армирующих волокон и связующего.

При деформировании волокнистых композитов главную часть нагрузки принимают на себя высокомолекулярные волокна [1]. Напряженно-деформированное состояние связующего в этом случае может быть определено на основании использования приближенной модели, в которой мягкое связующее «следует» за армирующими волокнами как за жестким каркасом, деформирующимся независимо от связующего. Близкий к указанному подход широко применяется при изучении однонаправленных композитов [2—4], где он приводит к моделям, показывающим удовлетворительное совпадение с экспериментом [5, 6].

Рассмотрим композит, образованный периодически чередующимися слоями волокон, уложенных параллельно плоскости Ox_1x_2 . В каждом слое волокна уложены параллельно друг другу. Угол, образованный волокнами α -го слоя с осью Ox_1 , обозначим через φ_α , $\alpha = 1, \dots, M$ (M — число армирующих слоев, образующих период структуры композита). Описанная схема армирования типовой для композитов, изготовленных намоткой или по препреговой технологии [7]. Рассмотрим усредненные деформации вида e_{ij} , $e_{i3} = 0$ ($i = 1, 2$), т. е. деформации в плоскости армирующих слоев, что является практически наиболее распространенным видом деформаций материалов описанного типа.

Рассмотрение задачи о деформировании композита при условии, что диаметр ϵ армирующих волокон мал ($\epsilon \ll 1$), может быть сведено к решению задачи теории упругости на ячейке периодичности Π структуры композита [1, 8, 9]. Именно, если $\{e_{ij}\}$ — усредненный тензор деформации композита, следует решить задачу теории упругости с нулевыми массовыми силами и краевым условием

$$(1) \quad \mathbf{w} - e_{ij}x_j\mathbf{e}_i, \quad \sigma_n(\mathbf{w} - e_{ij}x_j\mathbf{e}_i) \text{ периодичны на } \Pi,$$

где \mathbf{w} — перемещения; $\sigma_n(\mathbf{u})$ — нормальные напряжения, отвечающие \mathbf{u} .

Склейка решений задачи теории упругости с краевым условием (1) дает в конечной области Q решение задачи теории упругости для композита в целом с погрешностью, стремящейся к нулю в $W_2^1(Q)$ при $\epsilon \rightarrow 0$ [1]. В случае бесконечной области Q указанная склейка дает точное решение периодической задачи теории упругости, соответствующей средней деформации $\{e_{ij}\}$ [9]. Наше рассмотрение основано на гипотезе, что локальные (микроскопические) напряжения $\{\sigma_{ij}^\epsilon\}$ в композите, по крайней мере вне зон краевого эффекта, совпадают с напряжениями, определяемыми из решения задачи теории упругости с краевым условием (1).