УДК 536.46

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕАЛЬНОГО ЗАКОНА СКОРОСТИ ГОРЕНИЯ ТВЕРДОГО ТОПЛИВА КАК ФУНКЦИИ ДАВЛЕНИЯ В РДТТ

А. М. Липанов[1,2], Л. Н. Колесникова[2], А. Ю. Лещёв[3]

[1]Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 125047 Москва, aml35@yandex.ru
[2]Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова, 426069 Ижевск
[3]Удмуртский федеральный исследовательский центр УрО РАН, 426067 Ижевск

Выполнен сравнительный анализ предельно максимальных давлений в РДТТ, получаемых при использовании степенного и реального законов скорости горения твердого топлива как функций давления. Показано, что при высоких значениях показателя степени в законе горения наблюдается большое (десятки процентов) различие между предельно максимальными значениями давления в двигателе, полученными двумя названными выше способами. В случае, когда показатель степени находится в диапазоне $0.3 \div 0.4$, степенной закон скорости горения завышает уровень давления в двигателе лишь на $2 \div 3$ %.

Ключевые слова: твердое топливо, заряд, двигатель, давление, скорость горения, закон скорости горения.

DOI 10.15372/FGV20200208

На практике при выполнении внутрибаллистических расчетов в твердотопливных ракетных двигателях (РДТТ) скорость горения твердого топлива как функция давления традиционно определяется в соответствии со степенным законом [1]

$$u = u_1 p^{\nu}, \tag{1}$$

где u_1 и ν — коэффициент скорости и показатель степени соответственно, принимаемые здесь постоянными.

В работе [2] показано, что более общей формулой для зависимости скорости горения твердого топлива от давления является выражение

$$u_{real} = u_1 p + a(1 - \exp(-mp)) \exp(-np). \tag{2}$$

Содержащиеся в нем коэффициенты u_1, a, m и n положительные. Из анализа выражения (2) следует, что при $p \to 0$ величина $u_{real} \to 0$, а при $p \to \infty$ второе слагаемое в формуле (2) исчезает и она превращается в одночленный закон

$$u_{real} = u_1 p, \tag{3}$$

выполняющийся в артиллерийском диапазоне давлений.

Из сказанного следует, что при экспериментальном определении коэффициента u_1 его значения следует находить при высоких давлениях, характерных для артиллерийского диапазона (сотни мегапаскалей), а коэффициенты a, m и n следует определять, используя давления, характерные для ракетного диапазона (единицы и десятки мегапаскалей).

Оказывается, что и нижеследующая формула [3]

$$u_{real} = u_1 p + ap^m \exp(-np), \tag{4}$$

где $0 < m < 1$, тоже может успешно использоваться при расчете скорости горения твердого топлива как функции давления. Воспользуемся рис. 1, заимствованным из работы [3], где представлены пять кривых $u(p)$, охватывающих, наверное, все возможные варианты зависимости скорости горения от давления, интересные для практики. Формулой (2) можно аппроксимировать четыре из пяти кривых $u(p)$, приведенных на рис. 1. Она не годится только при получении кривой *4*, но такая зависимость $u(p)$ еще и не реализована на практике. Формулой (4) можно аппроксимировать кривую *4*, а также кривые *1–3*. Но она не годится для аппроксимации кривой *5* с затянутым асимптотическим приближением функции $u(p)$ к ее асимптоте $u_1 p$. Однако совокупность уравне-

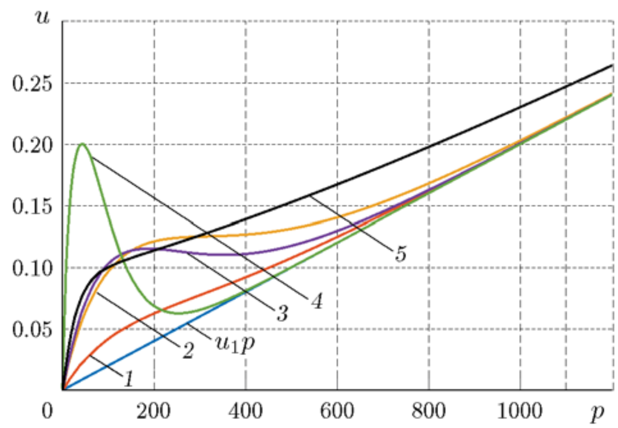

Рис. 1. Безразмерные зависимости скорости горения от давления:

кривая *1* заимствована из работы [4], кривые *2*, *3*, *5* построены на основе данных работы [5], кривая *4* предложена в работе [3]

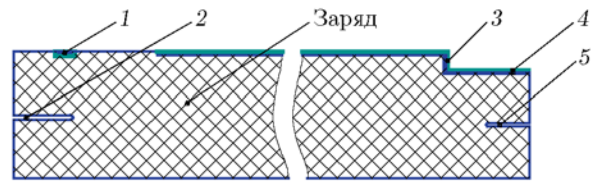

Рис. 2. Продольное сечение осесимметричного твердотопливного заряда для РДТТ с застойной зоной:

1 — наружный поясок из бронировки, *2* — проточка на переднем торце заряда, *3* — опорный уступ, *4* — бронировка наружной поверхности заряда, *5* — проточка на сопловом торце заряда

ний (2) и (4) позволяет аппроксимировать все кривые $u(p)$, приведенные на рис. 1.

Воспользуемся этими формулами и выполним сравнительный анализ эффективности использования выражений (2) и (4) (будем называть их реальными зависимостями скорости горения твердого топлива от давления) по сравнению со степенным законом (1), в частности, при выполнении проектных расчетов. Отметим, что все параметры в формулах (2) и (4) приведены к безразмерному виду: давление отнесено к 1 атм, а скорость горения — к ее значению при $p = 500$ МПа.

Коэффициент u_1 для всех рассматриваемых кривых $u(p)$ принят равным 0.0002. Значения коэффициентов a, m и n приведены в табл. 1. Для кривых *1*–*4* они рассчитаны исходя из формулы (4), для кривой *5* соответствуют формуле (2).

Анализ проведем на примере вкладного заряда твердого топлива для РДТТ с застойной зоной (рис. 2). Заряд имеет опорный уступ, бронировку, расположенную на наружной поверхности заряда и две проточки на переднем и сопловом торцах. Бронировка разделена на две неравные части: меньшую *1* в виде пояска и большую часть *4* тоже на наружной поверхности заряда. Проточки имеют одинаковую начальную ширину, но разную длину. Длина проточки на переднем торце больше, чем на сопловом. Площадь поверхности горения S рассматриваемого заряда рассчитывали в предположении горения твердого топлива в соответствии с законом Вьеля, параллельными слоями [6] с одинаковой скоростью по всей поверхности горения заряда. Шаг Δe дискретизации горящего свода e выбирали минимально возможным и таким, чтобы не пропустить ни одной особой точки на зависимости площади поверхности горения такого заряда от величины сгоревшего свода. Варьируя длину проточек и их расположение относительно канала заряда, изменяя размеры и расположение бронировки на поверхности заряда [7], получаем зависимость $S(e)$, приведенную на рис. 3. Видно, что текущая площадь поверхности горения заряда колеблется около ее среднего значения $\langle S\rangle$. Начальная поверхность горения рассматриваемого заряда при $e = 0$ меньше ее средней поверхности горения примерно на 6.8 %. Максимальная площадь поверхности горения заряда $S_{\max}$ достигается при своде, равном $\approx 0.81 e_{\max}$. В данном случае $S_{\max}/\langle S\rangle = 1.06$. При $e = 0.5$ и 0.81 имеют место скачки в значениях $S(e)$.

Рассмотрим различные варианты твердых топлив баллиститного типа, которые позволяют получать приведенные на рис. 1 кривые $u(p)$, кроме, конечно, кривой *4*.

Температурный диапазон боевого приме-

Таблица 1

Коэффициенты a, m, n для зависимостей $u(p)$ (см. рис. 1)

Кривая на рис. 1	a	m	n
1	0.000428	0.99753	0.006630
2	0.001778	0.95	0.006066
3	0.001908	0.99	0.007871
4	0.02232	0.8	0.02
5	0.09239	0.03462	0.001121

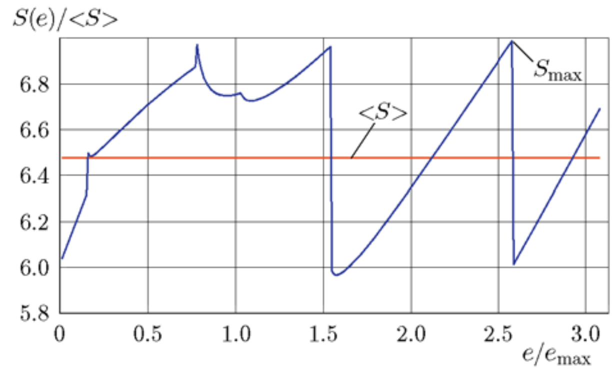

Рис. 3. Изменение площади поверхности горения заряда в зависимости от величины сгоревшего свода e

нения данного твердотопливного заряда принимаем равным ± 50 °C. Номинальную температуру топлива данного заряда T_{real}, соответствующую номинальной скорости горения и средним значениям других параметров заряда и двигателя (площади поверхности горения заряда, плотности топлива, площади минимального сечения сопла и т. д.), принимаем равной 20 °C. Это значит, что для перехода от номинальной температуры T_{real} заряда к ее максимальному уровню $T_{\max}$ температуру заряда необходимо увеличивать на 30 °C.

При выполнении проектных расчетов необходимо знать предельно возможное с заданной вероятностью давление в двигателе $p_{\max}$. Для его определения используем уравнение [1]

$$S\rho u(p) f(T) = \frac{\varphi_2 B(k) F_{\text{кр}} p}{\sqrt{RT_p}}, \tag{5}$$

где ρ — плотность твердого топлива, $f(T)$ — функция, определяющая зависимость скорости горения от температуры заряда, φ_2 — коэффициент расхода (поправка на неодномерность потока), $F_{\text{кр}}$ — площадь критического (минимального) сечения сопла, p — давление в двигателе, k — отношение изобарной (c_p) и изохорной (c_v) теплоемкостей соответственно,

$$B(k) = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{(1/2)\cdot(k+1)/(k-1)} \sqrt{k}.$$

В отечественной научной литературе в качестве зависимости $f(T)$ принято использовать выражение В. К. Цветковой [6]

$$f(T) = \frac{B - T_{\text{оп}}}{B - T}, \tag{6}$$

где B — термохимическая постоянная, $T_{\text{оп}}$ — опорная температура. Опорную температуру $T_{\text{оп}}$ будем приравнивать к номинальной температуре заряда T_{real}. Для баллиститных топлив принимаем $B = 350$. Считаем, что при $S = \langle S \rangle$ давление в двигателе $p = \langle p \rangle = 70$.

Используя уравнения (1) и (5) [1, 6], рассчитаем давления в двигателе: $p(S_{\max})$ при $S = S_{\max}$; $p(T_{\max})$, если $S = S_{\max}$, а $T = T_{\max}$; $p_{\max}^{(\prime)}$, когда $S = S_{\max}$, $T = T_{\max}$ и $u = u_{\max}$. После этого, увеличивая $p_{\max}^{(\prime)}$ на величину $\Delta p_{\max}$ за счет случайных факторов, определим $p_{\max}$. При выполнении расчетов принимаем, что $\Delta p_{\max}/p_{\max}^{(\prime)} = 0.07$.

Результаты расчета отношений $p(S_{\max})/\langle p \rangle$, $p(T_{\max})/p(S_{\max})$, $p_{\max}^{(\prime)}/p(T_{\max})$ для зависимостей *1–3*, *5*, приведенных на рис. 1, при $S = S_{\max}$, $T = T_{\max}$, $u = u_{\max}$, если $S_{\max}/\langle S \rangle = 1.06$, $(B - T_{real})/(B - T_{\max}) = 1.1$, $u_{\max}/u_{real} = 1.03$, представлены в табл. 2. На данном этапе не рассматриваем кривую *4*, к которой не будем применять степенной закон с отрицательным значением ν. Видно, что для кривых в порядке возрастания их номера влияние конструктивных $S_{\max}/\langle S \rangle$, эксплуатационных $(B - T_{real})/(B - T_{\max})$, технологических $u_{\max}/u_{real}$ факторов соответственно на переменные $p(S_{\max})/\langle p \rangle$, $p(T_{\max})/p(S_{\max})$, $p_{\max}^{(\prime)}/p(T_{\max})$ убывает. Чтобы выяснить, в чем здесь дело, запишем уравнение (5) сначала для $S = \langle S \rangle$, когда уравнение (5) содержит $p = \langle p \rangle$, а затем для $S = S_{\max}$, когда $p = p(S_{\max})$, и разделим уравнения друг на друга. Получим

$$\frac{p(S_{\max})}{\langle p \rangle} = \left(\frac{S_{\max}}{\langle S \rangle}\right)^{1/(1-\nu_{real})}. \tag{7}$$

Таблица 2

Изменение в РДТТ отношений $p(S_{\max})/\langle p \rangle$, $p(T_{\max})/p(S_{\max})$, $p_{\max}^{(\prime)}/p(T_{\max})$ в зависимости от параметров $S_{\max}/\langle S \rangle$, $(B - T_{real})/(B - T_{\max})$ и $u_{\max}/u_{real}$ соответственно

Кривая на рис. 1	$p(S_{\max})/\langle p \rangle$	$p(T_{\max})/p(S_{\max})$	$p_{\max}^{(\prime)}/p(T_{\max})$
1	1.2444	1.4300	1.1102
2	1.1606	1.2758	1.0767
3	1.1315	1.2240	1.0644
5	1.0850	1.1427	1.0420

Поскольку при переходе от одной кривой к другой параметр $S_{\max}/\langle S\rangle$ не меняется, причиной уменьшения $p(S_{\max})/\langle p\rangle$ может быть только уменьшение ν_{real}. Поэтому важно установить, какие ν_{real} соответствуют рассматриваемым кривым при $\langle p\rangle = 70$. Значение ν рассчитывается в соответствии с выражением [3] для каждой из рассматриваемых зависимостей скорости горения от давления:

$$\nu_{real} = \frac{p}{u}\,\frac{du}{dp}. \tag{8}$$

Результаты расчетов представлены в табл. 3. Видно, что действительно с ростом номера рассматриваемых кривых соответствующие им значения ν уменьшаются. Особенно малым он оказывается у кривой *5*: по сравнению с кривой *1* меньше в 2.644 раза. В этих условиях влияние параметра $S_{\max}/\langle S\rangle = 1.06$ на увеличение $p(S_{\max})/\langle p\rangle$ сокращается с 24.4 % (для кривой *1*) до 8.5 % (для кривой *5*), или в 2.876 раза. В то же время при высоком значении ν, равном, например, для первой кривой 0.73354, увеличение поверхности горения всего на 6 % приводит к увеличению давления более чем на 24 %. Равенство, аналогичное (7), может быть получено для $p(T_{\max})/p(S_{\max})$, зависящего от $(B - T_{real})/(B - T_{\max})$. Это значит, что и в данном случае причиной уменьшения отношения $p(T_{\max})/p(S_{\max})$ является уменьшение показателя ν.

Расчет влияния $u_{\max}/u_{real}$ на отношение $p^{(\prime)}_{\max}/p(T_{\max})$ изложим позднее. Отметим, что для значений $u_{\max}/u_{real}$, близких к единице, где $u_{\max} > u_{real}$, расчеты по нелинейной модели практически совпадают с линейной теорией. А в этом случае имеем [1]

$$\frac{p^{(\prime)}_{\max} - p(T_{\max})}{p(T_{\max})} = \frac{1}{1-\nu}\,\frac{u_{\max} - u_{real}}{u_{real}}. \tag{9}$$

Таблица 3

Показатель степени ν_{real} для рассматриваемых кривых при $\langle p\rangle = 70$

Кривая на рис. 1	ν_{real}
1	0.7335
2	0.6087
3	0.5285
4	0.4747
5	0.2775

Видно, что и здесь причиной уменьшения отношения $p^{(\prime)}_{\max}/p(T_{\max})$ является уменьшение ν.

Из анализа данных табл. 2 следует, что влияние параметра $(B - T_{real})/(B - T_{\max})$ на отношение $p(T_{\max})/p(S_{\max})$ значительно превышает влияние параметров $S_{\max}/\langle S\rangle$ и $u_{\max}/u_{real}$ на отношения $p(T_{\max})/p(S_{\max})$ и $p^{(\prime)}_{\max}/p(T_{\max})$ соответственно. Дело в том, что в рассматриваемом случае $(B - T_{real})/(B - T_{\max})$ в 1.0377 раза больше, чем $S_{\max}/\langle S\rangle$, и тем более больше, чем $u_{\max}/u_{real}$. Отношение $p(T_{\max})/p(S_{\max})$ для каждой кривой будет больше, чем отношения $p(S_{\max})/\langle p\rangle$ и $p^{(\prime)}_{\max}/p(T_{\max})$. При этом влияние $(B - T_{real})/(B - T_{\max})$ относительно $S_{\max}/\langle S\rangle$ (оно равно 1.0377) тем сильнее, чем больше ν, так как для кривой *1* показатель степени $1/(1 - \nu_{real})$ в соотношении (7) равен 3.7529, а для кривой *5*, например, он составляет только 1.3840. В табл. 2 приведены отношения $p(S_{\max})/\langle p\rangle$, $p(T_{\max})/p(S_{\max})$, $p^{(\prime)}_{\max}/p(T_{\max})$. Но так как

$$\frac{p^{(\prime)}_{\max}}{\langle p\rangle} = \frac{p^{(\prime)}_{\max}}{p(T_{\max})}\,\frac{p(T_{\max})}{p(S_{\max})}\,\frac{p(S_{\max})}{\langle p\rangle}, \tag{10}$$

то для учета суммарного воздействия трех этих факторов на давление в двигателе значения, находящиеся в табл. 2, достаточно перемножить. Результаты расчетов для рассматриваемых кривых приведены в первой графе табл. 4.

Итак, при использовании степенного закона величина $p^{(\prime)}_{\max}$ из-за высокого значения ν почти в два раза превысила $\langle p\rangle$. Зная величину $p^{(\prime)}_{\max}$ и учитывая, что

$$p_{\max} = p^{(\prime)}_{\max} + \Delta p_{\max}, \tag{11}$$

где $\Delta p_{\max}/p^{(\prime)}_{\max} = 0.07$, найдем максимально возможное давление $p_{\max} = 1.07 p^{(\prime)}_{\max}$. Результаты расчетов приведены во второй графе табл. 4. Видно, что для кривой *1* (см. рис. 1) с высоким показателем степени ν максимально возможное давление $p^{(\prime)}_{\max}$ более чем в два раза превышает номинальное давление $\langle p\rangle$. При тех же условиях давление $p^{(\prime)}_{\max}$ для кривой *5*, имеющей минимальный из рассмотренных показатель ν, превышает номинальное давление

Таблица 4

Отношение $p^{(\prime)}_{\max}/\langle p\rangle$, обусловленное совокупным воздействием параметров $S_{\max}/\langle S\rangle$, $(B-T_{real})/(B-T_{\max})$, $u_{\max}/u_{real}$, и давление $p_{\max}$

Кривая на рис. 1	$p^{(\prime)}_{\max}/\langle p\rangle$	$p_{\max}$
1	1.9756	147.9745
2	1.5941	119.3966
3	1.4742	110.4153
5	1.2919	96.7603

$\langle p\rangle$ только на 38 %. Таково влияние показателя степени ν в степенном законе скорости горения на максимально возможное давление $p^{(\prime)}_{\max}$ в двигателе.

Далее, используя реальный закон скорости горения, рассмотрим влияние тех же факторов на давление в двигателе при переходе от $\langle p\rangle$ к $p^{(\prime)}_{\max}$. Снова рассмотрим уравнение (5). Разделим данное уравнение на $u(p)$, а затем умножим на u_1. Далее перенесем комплекс $\varphi_2 B(k)F_{\text{кр}}/\sqrt{RT_p}$ в левую часть уравнения (5). Получим

$$\frac{S\rho u_1 f(t_3)}{\varphi_2 B(k)F_{\text{кр}}}\sqrt{RT_p}=\frac{u_1 p}{u(p)}. \qquad (12)$$

Находящееся справа отношение обозначим

$$\varphi(p)=\frac{u_1 p}{u(p)}. \qquad (13)$$

Зависимости $\varphi_i(p)$ $(i=1,2,3,4)$, соответствующие зависимости $u(p)$ (формула (4)) с коэффициентами для кривых *1–4* с рис. 1, показаны на рис. 4. Здесь также приведена зависимость $\varphi_5(p)$ (кривая *5*) для формулы (2) с коэффициентами для кривой *5* с рис. 1. Видно, что все рассматриваемые зависимости монотонные и с ростом давления увеличиваются от своих начальных значений до единицы. При этом для первых четырех кривых начальное значение общее: $\varphi_i(0)=0$ при $p=0$. Чтобы в этом убедиться, запишем выражение для $\varphi(p)$, где $u(p)$ рассчитывается по формуле (4) в виде

$$\varphi(p)=\frac{p^{1-m}}{p^{1-m}+(a/u_1)\exp(-np)}. \qquad (14)$$

Поскольку $0<m<1$, то $1-m>0$. Поэтому при $p\to 0$ степенная функция p^{1-m} будет

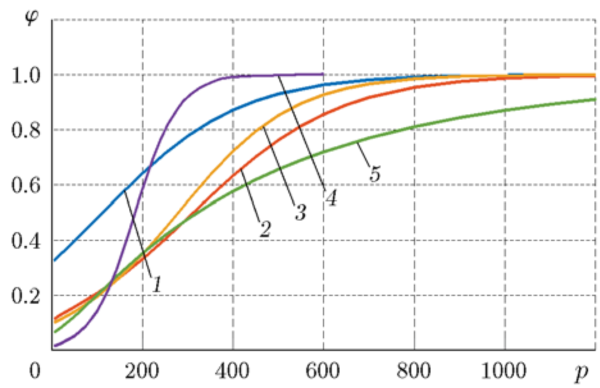

Рис. 4. Зависимость $\varphi(p)$: номера i = *1*, *2*, *3*, *4*, *5* соответствуют номерам кривых на рис. 1

также стремиться к нулю. Однако во всех четырех расчетных случаях разность $1-m$ хотя и положительная, но близка к нулю. По этой причине все функции $\varphi_i(p)$ $(i=1,2,3,4)$ в ближайшей окрестности $p=0$ круто возрастают, имея первую и последующие производные от φ по p стремящимися к бесконечности при $p\to 0$. Поэтому построение кривых *1–4* зависимости $\varphi(p)$ удобно начинать с минимального конечного давления p, большего нуля, например с $p=5$. И только $\varphi_5(p)$ при $p=0$ не имеет особенности и равна $\varphi_5(0)=1/[1+(a/u_1)m]$.

В номинальных условиях имеем

$$\frac{\langle S\rangle\rho u_{1real}}{\varphi_2 B(k)F_{\text{кр}}}\sqrt{RT_p}=\frac{u_{1real}\langle p\rangle}{u_{real}(\langle p\rangle)}. \qquad (15)$$

При заданном $\langle p\rangle=70$ правая часть уравнения (15) известна. Это значит, что известна и его левая часть. Обозначим ее L:

$$L=\frac{\langle S\rangle\rho u_{1real}}{\varphi_2 B(k)F_{\text{кр}}}\sqrt{RT_p}. \qquad (16)$$

Если $S=S_{\max}$, то, записывая уравнение (15) в виде

$$\frac{S_{\max}}{\langle S\rangle}L=\varphi(p(S_{\max})), \qquad (17)$$

получим уравнение для определения давления $p(S_{\max})$, соответствующего $S=S_{\max}$. Оно трансцендентное. Но поскольку функция $\varphi(p)$ монотонная, то, используя метод касательных Ньютона [8], без большого труда определим давление $p(S_{\max})$. Аналогично при $T=T_{\max}$ получаем уравнение

$$L\frac{B-T_{\text{оп}}}{B-T_{\max}}=\varphi(p_1(T_{\max})) \qquad (18)$$

Таблица 5

Изменение в РДТТ отношений $p(S_{\max})/\langle p\rangle$, $p(T_{\max})/p(S_{\max})$, $p^{(')}_{\max}/p(T_{\max})$ в зависимости соответственно от параметров $S_{\max}/\langle S\rangle$, $(B-T_{real})(B-T_{\max})$ и $u_{\max}/u_{real}$ при использовании реальной зависимости скорости горения твердого топлива от давления

Кривая на рис. 1	$p(S_{\max})/\langle p\rangle$	$p(T_{\max})/p(S_{\max})$	$p^{(')}_{\max}/p(T_{\max})$
1	1.2238	1.3719	1.1150
2	1.1509	1.2489	1.0781
3	1.1244	1.2043	1.0643
4	1.0397	1.0652	1.0203
5	1.0835	1.1388	1.0416

для определения давления $p = p_1(T_{\max})$. Здесь $p(S_{\max})$ и $p_1(T_{\max})$ определяются только одним фактором: увеличением площади поверхности горения или температуры заряда начиная от номинальных значений при $p = \langle p\rangle = 70$. Результаты расчетов представлены в табл. 5. Видно, что для зависимостей в порядке возрастания их номера интенсивность воздействия каждого фактора ослабевает, т. е. наблюдается та же зависимость, что и при использовании степенного закона скорости горения. Воздействие большего по величине фактора $((B-T_{real})/(B-T_{\max})$ по сравнению с $S_{\max}/\langle S\rangle)$ приводит к большему увеличению давления. Но наименьший рост давления при увеличении параметров $S_{\max}/\langle S\rangle$ и $(B-T_{real})/(B-T_{\max})$ наблюдается для кривой *4*, когда имеет место отрицательная производная $\dfrac{du}{dp}$.

Сравнивая результаты, полученные при использовании степенного и реального законов скорости горения в зависимости от давления, видим, что в последнем случае для каждой из кривых при воздействии как $S_{\max}/\langle S\rangle$, так и $(B-T_{real})/(B-T_{\max})$ всякий раз приращение давления меньше. Различия при воздействии каждого фактора на относительное давление не столь велики (в третьей значащей цифре на две-три единицы), но отклонения всегда в меньшую сторону. Исключение составляет воздействие максимальной температуры заряда $T_{\max}$ для кривой *1*. Здесь отклонение в меньшую сторону на одну единицу имеет место уже во второй значащей цифре, или около 4 %.

Далее, рассмотрим влияние увеличения скорости горения твердого топлива u на давление. Снова будем рассматривать относительное отклонение скорости u от номинального значения u_{real}, когда $u_{\max}/u_{real} = 1.03$, при давлении начиная с $p = \langle p\rangle = 70$. В данном случае отклонение скорости Δu зависит от четырех коэффициентов: u_1, a, m и n (при использовании степенного закона скорости горения имеем два коэффициента — u_{1real} и ν_{real}). Их значения, обеспечивающие получение $u_{\max}$, будем снабжать индексом i. Так что $\Delta u_{\max} = u_{\max}(u_{1i}, a_i, m_i, n_i) - u_{real}$ или $\Delta u_{\max}/u_{real} = u_{\max}(u_{1i}, a_i, m_i, n_i)/u_{real} - 1$.

Подставляя вместо $u_{\max}(u_{1i}, a_i, m_i, n_i)$ формулу (4) для кривых *1–4* или формулу (2) для кривой *5*, будем каждый из параметров, как и при использовании степенного закона, находить в предположении, что рассматриваемое отклонение $\Delta u_{\max}$ обусловлено воздействием только данного фактора при постоянстве остальных (получаемое значение параметра будем обозначать чертой сверху). Сначала воспользуемся формулой (4). Имеем

$$u_{\max} = u_{1i}\langle p\rangle + a_i[\langle p\rangle]^{m_i}\exp(-n_i\langle p\rangle). \quad (19)$$

Отсюда, если принять коэффициенты a, m и n номинальными, находим

$$\bar{u}_{1i} = \frac{u_{\max} - a[\langle p\rangle]^m\exp(-n\langle p\rangle)}{\langle p\rangle}. \quad (20)$$

Аналогично определяем $\bar{a}_i$, $\bar{m}_i$, $\bar{n}_i$:

$$\bar{a}_i = \frac{u_{\max} - u_1\langle p\rangle}{[\langle p\rangle]^m\exp(-n\langle p\rangle)}, \quad (21)$$

$$\bar{m}_i = \ln\frac{u_{\max} - u_1\langle p\rangle}{a\exp(-n\langle p\rangle)}\Big/\ln(\langle p\rangle), \quad (22)$$

$$\bar{n}_i = \left\langle\frac{1}{p}\right\rangle\ln\frac{a[\langle p\rangle]^m}{u_{\max} - u_1\langle p\rangle}. \quad (23)$$

После этого можно записать

$$\theta_i = \theta + \xi(\bar{\theta}_i - \theta), \quad (24)$$

где θ — алгебраический вектор, имеющий компонентами параметры u_1, a, m, n; переменная ξ изменяется от нуля до единицы. Компоненты вектора θ можно использовать при расчете влияния отношения $u_{\max}/u_{real}$ на давление в двигателе для кривых *1–4* на рис. 1.

Для расчета коэффициентов u_{1i}, a_i, m_i, n_i воспользуемся формулой (24). После этого, рассматривая равенство (19) как уравнение, содержащее неизвестную ξ, и удовлетворяя условию $u_{\max}/u_{real} = 1.03$, найдем требуемые значения u_{1i}, a_i, m_i, n_i.

Аналогично для кривой *5* имеем

$$u_{\max} = u_{1i}\langle p\rangle + \\ + a_i(1 - \exp(-m_i\langle p\rangle))\exp(-n_i\langle p\rangle). \quad (25)$$

Используя выражение (25), запишем для коэффициентов $\bar{u}_{1i}$, $\bar{a}_i$, $\bar{m}_i$, $\bar{n}_i$ равенства, аналогичные (20)–(23). Определив коэффициенты $\bar{u}_{1i}$, $\bar{a}_i$, $\bar{m}_i$, $\bar{n}_i$, запишем систему равенств (24), которую будем решать совместно с уравнением (25) с целью определения оптимального значения коэффициента ξ, удовлетворяя условию $u_{\max}/u_{real} = 1.03$. Зная оптимальную величину коэффициента ξ и используя равенства (24), находим требуемые значения коэффициентов u_{1i}, a_i, m_i, n_i для кривой *5*. Аналогично решается задача определения u_{1real} и ν_{real} при использовании степенного закона

$$u_{\max} = u_{1real}\langle p\rangle^{\nu_{real}} \quad (26)$$

и выполнении условия $u_{\max}/u_{real} = 1.03$.

Имея для каждой кривой $u(p)$ значения коэффициентов u_{1i}, a_i, m_i, n_i, можем найти значения $p(u_{\max}/u_{real})$. С этой целью для каждой кривой *1–4* необходимо решить уравнение

$$\frac{u_{1i}}{u_{1real}}L = u_{1i}p\left(\frac{u_{\max}}{u_{real}}\right)\Big/\left\{u_{1i}p\left(\frac{u_{\max}}{u_{real}}\right) + \right. \\ \left. + a_i\left[p\left(\frac{u_{\max}}{u_{real}}\right)\right]^{m_m}\exp\left(-n_i p\left(\frac{u_{\max}}{u_{real}}\right)\right)\right\}, \quad (27)$$

а для кривой *5* — уравнение

$$\frac{u_{1i}}{u_{1real}}L = u_{1i}p\left(\frac{u_{\max}}{u_{real}}\right)\Big/\left\{u_{1i}p\left(\frac{u_{\max}}{u_{real}}\right) + \right. \\ + a_i\left(1 - \exp\left(-m_i p\left(\frac{u_{\max}}{u_{real}}\right)\right)\right) \times \\ \left. \times \exp\left(-n_i p\left(\frac{u_{\max}}{u_{real}}\right)\right)\right\}. \quad (28)$$

Результаты расчетов представлены в табл. 5 (последняя графа). Сравнение результатов, установленных при использовании степенного и реальных законов скорости горения как функции давления, позволяет заключить, что при небольших увеличениях скорости горения топлива результаты близки.

Что касается определения давления по степенному закону скорости горения, то при известных u_{1i} и ν_i, используя уравнение (5), запишем

$$p(u_{\max}) = (Au_{1i})^{1/(1-\nu_i)}, \quad (29)$$

где $A = \dfrac{\langle S\rangle\rho}{\varphi_2 B(k)F_{\text{кр}}}\sqrt{RT_p}$. В номинальных условиях при известном давлении $p = \langle p\rangle$ множитель A находим из уравнения (5):

$$A = \frac{(\langle p\rangle)^{1-\nu_{real}}}{u_{1real}}. \quad (30)$$

После расчета давления $p(S_{\max})$ можно определить, как влияют на давление $p(T_{\max})$ два следующих фактора: увеличение площади поверхности горения $S_{\max}/\langle S\rangle$ и рост температуры заряда $(B - T_{real})/(B - T_{\max})$. Для этого необходимо решить уравнение

$$\frac{S_{\max}}{\langle S\rangle}\frac{B - T_{real}}{B - T_{\max}}L = \varphi(p(T_{\max})). \quad (31)$$

Найденное в результате его решения давление $p(T_{\max})$ будет больше давления $p_1(T_{\max})$, полученного при воздействии только одного фактора $(B - T_{real})/(B - T_{\max})$. Результаты расчета $p_1(T_{\max})$ приведены в табл. 6. Разделим эти значения $p_1(T_{\max})$ на значения $p(S_{\max})$, соответствующие первой графе в табл. 5. Полученные результаты приведены в табл. 6. Видно, что отношения $p(T_{\max})/p(S_{\max})$ меньше отношений $p_1(T_{\max})/\langle p\rangle$ в случае воздействия одного и того же фактора $(B - T_{real})/(B - T_{\max})$. Этот эффект обусловлен тем, что отношение $p(T_{\max})/p(S_{\max})$ получено делением давления $p(T_{\max})$ на большее значение $p(S_{\max})$, чем при делении $p_1(T_{\max})$ на величину $\langle p\rangle$. Далее находим давление $p_{\max}^{(')}$ как результат одновременного воздействия на процессы в двигателе трех факторов: увеличения площади поверхности горения $S_{\max}/\langle S\rangle$, температуры $(B - T_{real})/(B - T_{\max})$ и скорости горения топлива по сравнению с номинальной $u_{\max}/u_{real}$. Снова считаем, что $u_{\max}/u_{real} = 1.03$. В этих условиях для каждой кривой $u(p)$ сначала определяем коэффициенты u_{1i}, a_i, m_i, n_i при $p = p(T_{\max})$. Полагая их известными, решаем для каждой кривой *1–4* уравнение

Таблица 6

Давление $p(T_{\max})$ и отношение $p(T_{\max})/p(S_{\max})$, полученное в результате воздействия факторов $S_{\max}/\langle S\rangle$ и $(B-T_{real})(B-T_{\max})$

Кривая на рис. 1	$p(T_{\max})$	$p(T_{\max})/p(S_{\max})$
1	113.0693	1.3199
2	98.4363	1.2218
3	93.2141	1.1843
4	77.3861	1.0633
5	86.0574	1.1346

Таблица 7

Давление $p_{\max}^{(')}$ и отношение $p_{\max}^{(')}/p(T_{\max})$, полученное при одновременном воздействии факторов $S_{\max}/\langle S\rangle$, $(B-T_{real})/(B-T_{\max})$ и $u_{\max}/u_{real}$

Кривая на рис. 1	$p_{\max}^{(')}$	$p_{\max}^{(')}/p(T_{\max})$
1	122.1740	1.0815
2	104.2332	1.0590
3	97.8618	1.0499
4	78.8460	1.0189
5	89.4494	1.0394

$$\frac{S_{\max}}{\langle S\rangle}\frac{B-T_{real}}{B-T_{\max}}\frac{u_{1i}}{u_{1real}}L = \frac{u_{1i}p_{\max}^{(')}}{u_{1i}p_{\max}^{(')}+a_i[p_{\max}^{(')}]^{m_i}\exp(-n_ip_{\max}^{(')})}, \quad (32)$$

а для кривой *5* — уравнение

$$\frac{S_{\max}}{\langle S\rangle}\frac{B-T_{real}}{B-T_{\max}}\frac{u_{1i}}{u_{1real}}L = u_{1i}p_{\max}^{(')}/\{u_{1i}p_{\max}^{(')} + a_i(1-\exp(-m_ip_{\max}^{(')}))\exp(-n_ip_{\max}^{(')})\}. \quad (33)$$

В итоге находим давление $p_{\max}^{(')}$, после чего рассчитываем отношение $p_{\max}^{(')}/p(T_{\max})$. Результаты расчетов приведены в табл. 7. Отметим, что приведенные в ней отношения $p_{\max}^{(')}/p(T_{\max})$, обусловленные воздействием параметра $u_{\max}/u_{real}$, меньше соответствующих значений, приведенных в табл. 5, т. е. наблюдаем тот же эффект, что и для $p(T_{\max})/p(S_{\max})$ в табл. 6.

После этого находим максимально возможное давление $p_{\max}$. Здесь следует отметить, что при использовании реального закона для скорости горения как функции давления параметр ν является функцией давления p. Поэтому в приведенном ниже выражении для предельного отклонения давления при воздействии случайных факторов [1]

$$\frac{\langle\Delta p\rangle}{\langle p\rangle} = \frac{n}{1-\nu_{real}}\sqrt{\sum_{i=1}^{6}D_i} \quad (34)$$

не зависящим от давления является сомножитель $n\sqrt{\sum_{i=1}^{6}D_i}$. Пусть $\langle\Delta p\rangle/\langle p\rangle = \Theta$. Принимаем $\Theta = 0.07$. Тогда из равенства (34) находим

$$n\sqrt{\sum_{i=1}^{6}D_i} = (1-\nu_{real})\Theta. \quad (35)$$

Далее получаем

$$\frac{\Delta p_{\max}^{(')}}{p_{\max}^{(')}} = \frac{1-\nu_{real}}{1-\nu(p_{\max})}\Theta. \quad (36)$$

Но $\Delta p_{\max}^{(')} = p_{\max} - p_{\max}^{(')}$, поэтому

$$p_{\max} = p_{\max}^{(')}\left(1+\frac{1-\nu_{real}}{1-\nu(p_{\max})}\Theta\right). \quad (37)$$

Величину $\nu(p_{\max}^{(')})$ для кривых *1–4* рассчитываем по формуле

$$\nu(p_{\max}) = [u_1p_{\max} + a(m-np_{\max})(p_{\max})^m\exp(-np_{\max})]/ /[u_1p_{\max}+a(p_{\max})^m\exp(-np_{\max})], \quad (38)$$

а для кривой *5* — по формуле

$$\nu(p_{\max}) = \{u_1p_{\max}+a[(m+n)\times \times\exp(-mp_{\max})-n]p_{\max}\exp(-np_{\max})\}/[u_1p_{\max}+ + a(1-\exp(-mp_{\max}))\exp(-np_{\max})]. \quad (39)$$

Уравнение (37) содержит одну неизвестную величину $p_{\max}$ и является трансцендентным. Легко показать, что его правая часть как функция $p_{\max}$ является монотонной. Поэтому, используя метод касательных Ньютона, можно без большого труда решить уравнение (37). Результаты расчета максимально возможных давлений $p_{\max}$ приведены в табл. 8.

Таблица 8

Параметры $p_{\max}$, $p_{\max} - p^{(')}_{\max}$, $\tilde{p}_{\max} - p_{\max}$ и отношение $(\tilde{p}_{\max} - p_{\max})/\tilde{p}_{\max}$ для рассматриваемых кривых $u(p)$

Кривая на рис. 1	$p_{\max}$	$p_{\max} - p^{(')}_{\max}$	$\tilde{p}_{\max} - p_{\max}$	$(\tilde{p}_{\max} - p_{\max})/\tilde{p}_{\max}$, %
1	127.8124	5.6403	20.1603	13.6242
2	109.3421	5.1089	10.0545	8.4211
3	102.7781	4.9163	7.6372	6.9168
4	83.6925	4.8465	—	—
5	95.1659	5.7165	1.5944	1.6477

Там же представлены разности между давлениями $p_{\max}$ и $p^{(')}_{\max}$, а также между максимально возможными давлениями $\tilde{p}_{\max}$ и $p_{\max}$, полученными по степенному и реальному законам скорости горения. Кроме того, в этой таблице приведены отношения $(\tilde{p}_{\max} - p_{\max})/\tilde{p}_{\max}$.

Анализируя данные табл. 8, можно отметить, что разность $p_{\max} - p^{(')}_{\max}$ ни для одной из рассматриваемых кривых $u(p)$ не превышает 6 %, а все отношения $(\tilde{p}_{\max} - p_{\max})/\tilde{p}_{\max}$ меньше 7 %. Последнее является следствием того, что $\Delta p^{(')}_{\max}/p^{(')}_{\max} < \langle\Delta p\rangle/\langle p\rangle$, а $\langle\Delta p\rangle/\langle p\rangle = 7$ % для всех рассматриваемых кривых $u(p)$. Разность $\tilde{p}_{\max} - p_{\max}$ велика для кривой *1* из-за большого значения $\nu_{real} = 0.73354$, а, например, для кривой *5*, где $\nu_{real} = 0.27746$, она не превышает 1.6. Отношение $(\tilde{p}_{\max} - p_{\max})/\tilde{p}_{\max}$, приведенное на рис. 5 в виде зависимости от значений ν_{real}, взятых из табл. 3, монотонно растет. Данная кривая позволяет находить значения $(\tilde{p}_{\max} - p_{\max})/\tilde{p}_{\max}$ при любом ν_{real}, а не только при соответствующих рассматриваемым кривым $u(p)$.

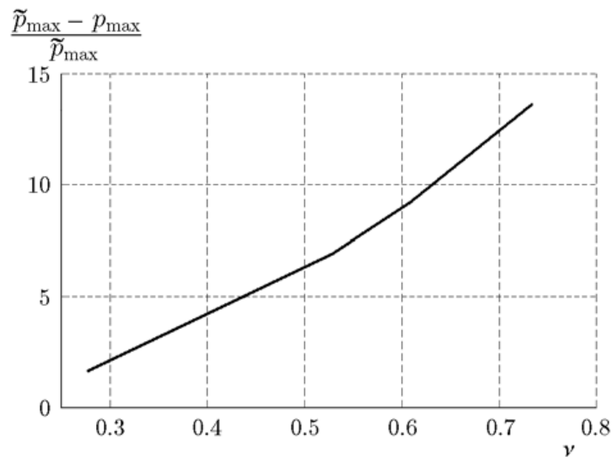

Рис. 5. Изменение отношения $\Delta p_{\max}/\tilde{p}_{\max} = (\tilde{p}_{\max} - p_{\max})/\tilde{p}_{\max}$ в зависимости от показателя степени ν

Итак, в данной работе для вкладных зарядов РДТТ изложен метод и выполнен расчет максимально возможных давлений $p_{\max}$ при использовании степенного и реального законов скорости горения как функции давления.

Показано, что при высоких показателях степени ν разности между значениями $p_{\max}$, полученными при использовании степенного и реального законов, достаточно велики (20 % и более), а при низких показателях ν (на уровне $0.2 \div 0.3$) не превышают 2 %. Выполнены расчеты зависимости давления в двигателе от конструктивных (отношение максимальной и средней поверхностей горения заряда), эксплуатационных (влияние максимальной температуры заряда по сравнению с номинальной) и технологических (отношение максимальной и номинальной скоростей горения топлива) факторов при использовании как степенного, так и реального закона скорости горения. Показана меньшая чувствительность к перечисленным факторам при использовании реального закона скорости горения твердого топлива как функции давления по сравнению со степенным.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Соркин Р. Е.** Теория внутрикамерных процессов в ракетных системах на твердом топливе: внутренняя баллистика. — М.: Наука, 1983.
2. **Липанов А. М.** Скорость горения твердого топлива как функция давления // Физика горения и взрыва. — 2013. — Т. 49, № 3. — С. 34–38.
3. **Липанов А. М.** О расчете давления в РДТТ при использовании реальной зависимости скорости горения твердого топлива от давления //

Физика горения и взрыва. — 2017. — Т. 53, № 5. — С. 87–92.
4. **Абугов Д. И., Бобылев В. М.** Теория и расчет ракетных двигателей твердого топлива: учеб. для машиностроительных вузов. — М.: Машиностроение, 1987.
5. **Жегров Е. Ф., Милехин Ю. М., Берковская Е. В.** Химия и технология баллиститных порохов, твердых ракетных и специальных топлив: в 2 т. / Федер. центр двойных технологий «Союз». — М.: МГУП, 2011. — Т. 2: Технология.
6. **Внутренняя** баллистика РДТТ / под ред. акад. РАН А. М. Липанова и акад. РАРАН Ю. М. Милехина. — М.: Машиностроение, 2007.
7. **Липанов А. М., Алиев А. В.** Проектирование ракетных двигателей твердого топлива. — М.: Машиностроение, 1995.
8. **Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.** Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.

Поступила в редакцию 22.03.2019.
После доработки 12.08.2019.
Принята к публикации 28.08.2019.