

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНЖЕКЦИИ
МОЩНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА
В ВАКУУМНУЮ КАМЕРУ
С СИЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Ю. А. Березин, Б. Н. Брейзман, В. А. Вишневков
(Новосибирск)

Среди многочисленных задач, связанных с использованием мощных релятивистских электронных пучков (РЭП) в физических экспериментах, важное место занимает задача о транспортировке пучка в вакууме [1, 2]. Аналитически здесь удается рассмотреть лишь несколько наиболее простых частных случаев; большинство же ситуаций требует применения численных методов. Для стационарных задач имеющиеся сейчас численные процедуры достаточно эффективны: они позволяют получить весьма высокую точность при вполне приемлемых затратах машинного времени [3—5]. Нестационарные задачи гораздо более трудоемки и обычно лежат на пределе возможностей современной вычислительной техники [6]. С другой стороны, из-за сравнительно малой длительности мощных РЭП нестационарность для них часто оказывается принципиально важной, причем наряду с нестационарностью движения частиц необходимо, вообще говоря, учитывать и эффекты запаздывания для электрического и магнитного полей. Поскольку соответствующие расчеты весьма громоздки, целесообразно в качестве первого шага рассмотреть ситуацию, в которой траектории частиц выглядят возможно более просто. Это имеет место при движении пучка в сильном внешнем магнитном поле, когда частицы можно считать «нанизанными» на силовые линии. Именно такой случай и рассмотрен в данной работе. Отметим, что указанная постановка задачи достаточно реалистична, поскольку во многих экспериментальных установках специально создается сильное поле, предопределяющее вид траекторий электронов.

1. Рассматриваемая схема эксперимента по транспортировке РЭП имеет следующий вид. Пучок входит в цилиндрическую вакуумную камеру через анодную фольгу, которая находится на торце цилиндра. Пройдя через дрейфовое пространство, пучок попадает на другой торец, который является коллектором. Стенки камеры, фольга и коллектор находятся под нулевым потенциалом. Внешнее магнитное поле однородно и направлено вдоль оси камеры (подразумевается, что вся система обладает аксиальной симметрией).

Пучок в дрейфовой камере будем представлять в виде набора трубчатых пучков, каждый из которых имеет пренебрежительно малую толщину и может быть учтен при решении уравнений Максвелла как граничное условие. Задавая надлежащим образом количество трубчатых пучков, их токи и радиусы, можно промоделировать фактически произвольный профиль инжектируемого тока. Для простоты сформулируем задачу для того случая, когда имеется всего одна трубка тока.

В цилиндрических координатах (r, z) дрейфовое пространство имеет вид прямоугольника $0 \leq r \leq R$, $0 \leq z \leq L$. Трубка тока разбивает эту область на две подобласти: I ($0 \leq r \leq r_b$) и II ($r_b \leq r \leq R$).

Ввиду аксиальной симметрии задачи система уравнений Максвелла расщепляется на две независимые системы (для TE - и TM -волн). Пучок

влияет только на TM -волны, в которых отличны от нуля величины E_r , E_z и H_φ :

$$(1.1) \quad \frac{\partial E_r}{\partial t} = -c \frac{\partial H_\varphi}{\partial z};$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{c}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi);$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = c \left(\frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial z} \right).$$

Граничные условия на стенках дрейфовой камеры имеют вид

$$E_z = 0 \text{ при } r = R, \quad H_\varphi = E_r = 0 \text{ при } r = 0, \\ E_r = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = L.$$

Эти формулы необходимо дополнить условиями сшивки полей при $r = r_b$ (на пучке):

$$(1.4) \quad E_r^{\text{II}} - E_r^{\text{I}} = 4\pi\sigma, \quad H_\varphi^{\text{II}} - H_\varphi^{\text{I}} = \frac{4\pi}{c} j.$$

Здесь $\sigma(z, t)$ и $j(z, t)$ — поверхностные плотности заряда и тока. Функция E_z при $r = r_b$ непрерывна ($E_z^{\text{II}} = E_z^{\text{I}}$), а ее производная по радиусу терпит разрыв:

$$(1.5) \quad \frac{\partial E_z^{\text{II}}}{\partial r} - \frac{\partial E_z^{\text{I}}}{\partial r} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j}{\partial t} + 4\pi \frac{\partial \sigma}{\partial z}.$$

Изменение плотности заряда и тока определяем, исходя из уравнений движения электронов:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_e v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = -e E_z(r_b, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = v.$$

Полная энергия системы W складывается из энергии электромагнитного поля

$$W_1 = \int_0^L \int_0^{r_b} \frac{r}{4} (E_r^2 + E_z^2 + H_\varphi^2) dr dz$$

и кинетической энергии электронов

$$W_2 = - \frac{2\pi m_e c^2}{e} r_b \int_0^L \gamma \sigma dz,$$

где $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Изменение W связано только с тем, что электроны пересекают границы области $0 \leq z \leq L$:

$$(1.6) \quad \frac{dW}{dt} = \frac{2\pi m_e c^2}{e} r_b [(v\gamma\sigma)_{z=L} - (v\gamma\sigma)_{z=0}].$$

Соотношение (1.6) в дальнейшем будет использовано для контроля точности расчета.

2. Для численного решения уравнений (1.1)–(1.3) используется схема с перешагиванием. Для этого функции E_r , E_z , H_φ задаются на сдвинутых относительно друг друга сетках. Значения функций E_r и H_φ на пучке определяются из уравнений Максвелла с учетом граничных условий (1.4), (1.5). Для решения уравнений движения используется метод частиц в ячейках. По положениям и скоростям частиц определяются поверхностные плотности заряда и тока, необходимые в условиях (1.4), (1.5). Подробно указанный алгоритм изложен в работе [7].

Во всех рассчитанных вариантах начальные условия задавались следующим образом. В начальный момент времени функции E_r , E_z , H_φ равны нулю и частицы в дрейфовом пространстве отсутствуют. Затем на каждом временном шаге в дрейфовое пространство через границу $z = 0$ попадает одинаковое количество частиц, чтобы обеспечить постоянный инжектируемый ток.

3. Для проверки точности этого алгоритма проводились методические расчеты. Одним из них был следующий. Инжектируемый ток очень медленно увеличивался от нуля до некоторого значения I_0 . При этом система приходила в состояние, мало отличающееся от стационарного состояния, которое существует для данного значения тока. Параметры задачи были следующие: $I_0 = 0,03I_*$, $v_0 = 0,9c$, $r_b = 0,4R$, $L = 5R$, $h_r = h_z = 0,1R$, $\tau = 0,01R/c$, 2000 частиц. Здесь и далее ток измеряется в единицах критического вакуумного тока I_* для трубчатого пучка в бесконечно длинной системе [8]

$$(3.1) \quad I_* = \frac{(\frac{m}{e} e^3 I_{c0})}{\ln(R/r_b)} (\gamma_0^2 - 1)^{3/2},$$

где $\gamma_0 = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}$. Инжектируемый ток линейно увеличивался за время $t \approx 22R/c$, и в момент времени $t = 30R/c$ отклонения всех величин (I , v , σ) в середине пучка от значений стационарного решения не превышали 0,05%. Отклонение полной энергии от значений стационарного решения в тот же момент времени составляло 0,052%.

В процессе расчета точность контролировалась путем проверки выполнения закона сохранения энергии. Для этого вычисляется энергия $W_0(t)$, которую должна иметь система к моменту времени t . Она подсчитывается путем интегрирования по времени уравнения (1.6). С другой стороны, энергия может быть вычислена как сумма величин W_1 и W_2 (см. п. 1). Расхождение между энергиями, вычисленными этими двумя способами, является мерой точности расчета.

Расчеты показали, что при уменьшении шагов точность увеличивается. Например, при расчете с $I = 0,6I_*$ ($L = 5R$, $v_0 = 0,9c$, $\tau = 0,025R/c$, 2000 частиц) в момент времени $t = 10R/c$ относительное отклонение энергии

$$\delta W = \frac{W(t) - W_0(t)}{W_0(t)},$$

где $W(t) = W_1(t) + W_2(t)$, равно $\delta W = 1,22\%$ при $h_z = h_r = 0,1R$ и $\delta W = 0,64\%$ при $h_z = h_r = 0,05R$.

Влияние временного шага на точность расчета показано в табл. 1, составленной по результатам расчетов с теми же параметрами, что и в предыдущем примере ($h_z = h_r = 0,1R$). Из табл. 1 видно, что точность расчета остается примерно постоянной для разных шагов τ , т. е. в данном варианте она определяется пространственными шагами. Но чем меньше шаг τ , тем дольше сохраняется эта точность.

4. Рассмотрим прохождение трубчатого пучка через цилиндрическую камеру.

В зависимости от величины инжектируемого тока существовало два режима движения. При малом токе весь пучок проходил через дрейфовое пространство, испытывая вместе с электромагнитным полем периодические колебания около средних значений. Эти колебания составляют по величине 10—15% от средних значений и связаны с тем, что инжектируемый пучок имеет крутой передний фронт. В результате такой инжекции в камере возбуждаются электромагнитные волны, которые не затухают со временем. Такой режим наблюдался до некоторых критических значений.

Т а б л и ц а 1

$t(R/c)$	$\tau=0,05R/c$	$\tau=0,025 R/c$	$\tau=0,01R/c$
5	$\delta W=1,28\%$	1,21	1,21
10	1,24	1,22	1,24
15	1,26	1,24	1,24
20	1,35	1,24	1,24
25	1,74	1,28	1,25

Т а б л и ц а 2

I_0/I_*	1,06	1,12	1,18	1,30
$\bar{z}(R)$	0,84	0,64	0,54	0,48

Поскольку камера имеет ограниченную длину, величина критического тока для нее больше, чем вычисленная по формуле (3.1). При этом отличие тем сильнее, чем короче камера. Так, при $L = 5R$ критический ток был больше I_* на 0,8%, а при $L = R$ критический ток превосходил I_* в 1,9 раза (в обоих случаях $r_b = 0,4R$, $v_0 = 0,9c$).

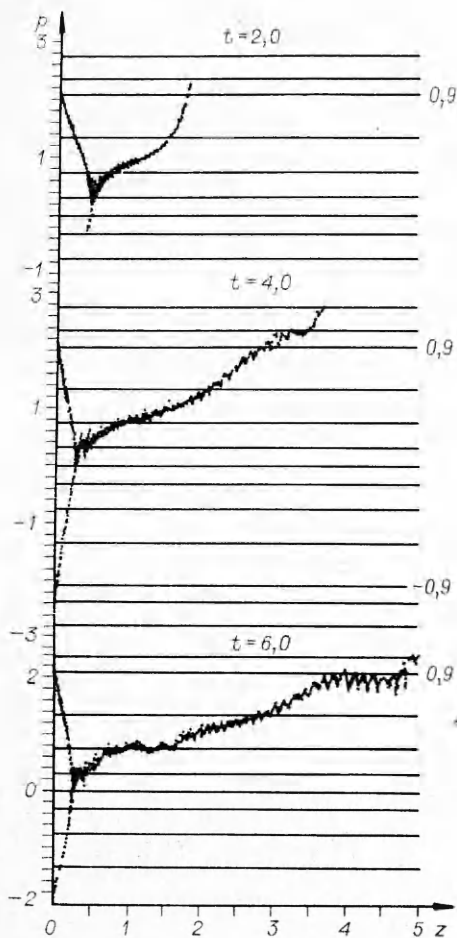
Начиная с критического тока, характер движения меняется. При небольшом превышении тока над I_* пер-

редний фронт пучка проходит через дрейфовое пространство без отражения частиц. Постепенно в системе накапливается заряд, и с некоторого момента времени часть электронов начинает отражаться. С течением времени точка, в которой происходит отражение частиц (виртуальный катод), сдвигается к началу камеры. Система приходит в квазистационарное состояние. Окончательное положение точки отражения \bar{z} зависит от величины инжектируемого тока I_0 : чем больше ток, тем ближе к началу камеры находится эта точка (табл. 2).

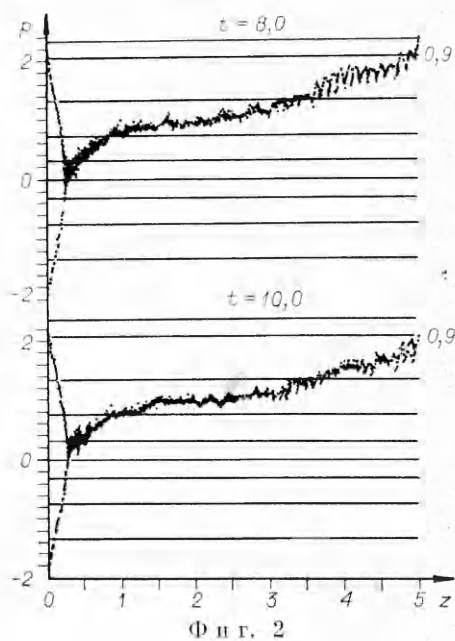
При больших инжектируемых токах отражение частиц наступает в более ранние моменты времени. Характер движения остается тем же. На фиг. 1, 2 приведено положение частиц в плоскости $(z, p = \gamma v/c)$ в моменты времени $t = 2; 4; 6; 8; 10$, линии, параллельные горизонтальной оси, отмечают различные скорости в единицах скорости света. Справа от них указаны соответствующие значения скорости. Эти расчеты были сделаны для инжектируемого тока $I = 1,78 I_*$ ($L = 5R$, $r_b = 0,4R$, $v_0 = 0,9c$), время t указано в единицах R/c . Все эффекты, о которых говорилось выше, хорошо видны на этих графиках. На фиг. 2 графики мало отличаются друг от друга, что говорит о получении квазистационарного режима. Здесь проходящий ток больше I_* на 0,84%. Время счета этого варианта составляло 7 мин на БЭСМ-6. Расчетная сетка имела 20 узлов по радиусу и 100 узлов по длине. Было сделано 400 шагов по времени. Число частиц в дрейфовом пространстве в момент времени $10 R/c$ равно 1727.

В этом варианте вычислялось отношение $\max|\text{rot}\mathbf{E}|/\max|\mathbf{E}/R|$ в различные моменты времени. Оно изменялось в диапазоне от 1,2 до 5,8, что свидетельствует о том, что непотенциальная часть электрического поля имеет тот же порядок, что и само поле. Следовательно, учет электромагнитных эффектов необходим для правильного решения задачи.

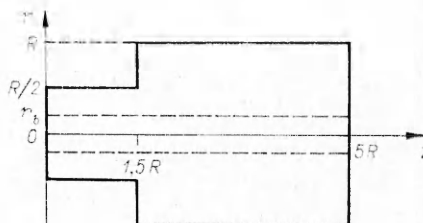
5. Рассмотрим трубчатый пучок в камере переменного сечения. В этих расчетах предполагалось, что радиус камеры изменяется ступенчатым образом. Для примера рассмотрим расчет движения пучка в дрейфовом пространстве, изображенном на фиг. 3. Радиус пучка $r_b = 0,2R$, скорость инжекции $v_0 = 0,9c$. Инжектируемый ток выбирался таким, чтобы в меньшем сечении он был докритическим $I = 0,9 I_*^1$, а в большем — сверхкритическим $I = 1,5 I_*^2$. Здесь I_*^1 и I_*^2 — критические токи для малого и большого сечения камеры. На фиг. 4 приведены фазовые плоскости (z, p) в разные моменты времени для этого расчета. Вертикальная черта на графиках отмечает положение скачка сечения камеры. Из графика видно, что пучок свободно проходит через камеру с меньшим радиусом и на-



Ф и г. 1



Ф и г. 2

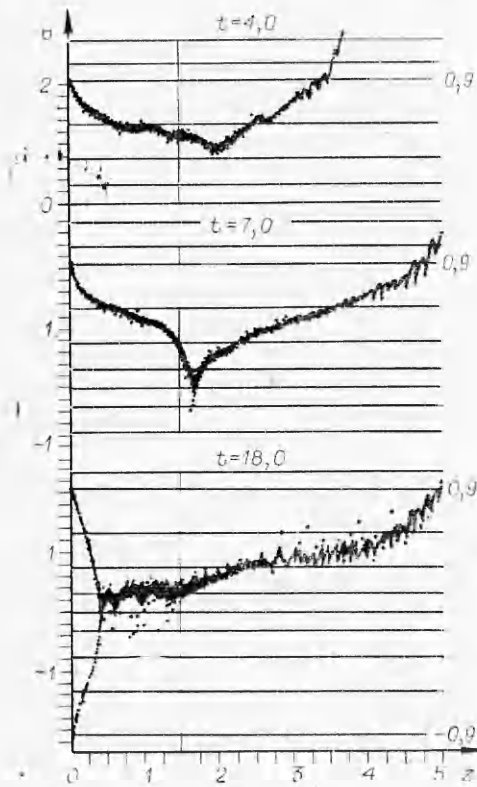


Ф и г. 3

чинает отражаться в области с большим сечением в точке $z = 1,7R$. Отраженная часть пучка вместе с инжектируемым пучком создает в области с малым сечением заряд, достаточный для отражения в этом сечении. Поэтому виртуальный катод с течением времени сдвигается в область с малым радиусом, доходя до $z = 0,3R$.

6. Рассмотрим встречные пучки в цилиндрической камере. На фиг. 5 приведена фазовая картина, соответствующая инжекции в дрейфовую камеру двух одинаковых пучков навстречу друг другу. Ток каждого из пучков составляет $(2/3) I_*$, так что суммарный объемный заряд соответствует току, равному $(4/3) I_*$ ($L = 5R$, $r_b = 0,4R$, $v_0 = 0,9c$). Поэтому в системе наблюдается отражение частиц. Расчет показал, что накопление заряда происходит медленно и только в момент времени $t = 13R/c$ начинается отражение частиц. Затем картина на фазовой плоскости становится квазистационарной. Начиная с $t = 17R/c$, она практически не меняется (расчет велся до времени $t = 25R/c$).

Аналогичный расчет для малых токов инжекции ($I < 0,5 I_*$) показывает, что в этом случае, как и следовало ожидать, оба пучка проходят через камеру без отражения. Отметим, что при этом движение частиц в камере оказывается устойчивым.

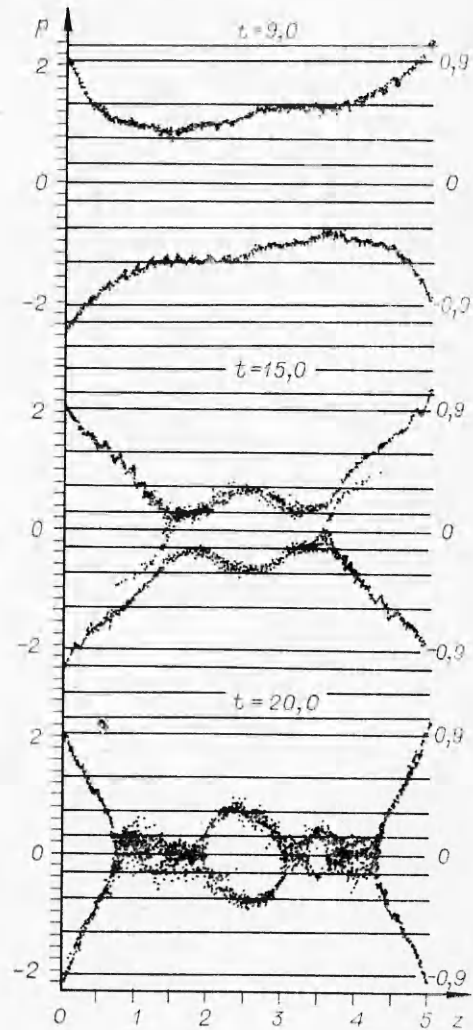


Ф и г. 4

Как уже говорилось выше, для моделирования пучка с распределенным по сечению током можно использовать несколько трубчатых пучков, вложенных друг в друга. Расчеты проведены с восемью вложенными друг в друга пучками. Поверхностная плотность тока инжекции бралась во всех пучках одинаковой $j_k = j_0$ ($k = 1, \dots, 8$), чтобы создать однородную по сечению плотность тока. Пучки располагались в первых восьми от оси узлах по радиусу. Этот расчет показал, что отражение во внутренних пучках происходит сильнее, чем в наружном, и часть пучка, которая достигает коллектора, фактически имеет трубчатое сечение.

Из приведенных примеров видно, что алгоритм [7] дает возможность исследовать довольно сложные комбинации дрейфового пространства и расположения пучков.

Поступила 10 I 1980



Ф и г. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Валлис Г., Зауер К. и др. Инжекция сильноточных релятивистских электронных пучков в плазму и газ. — УФН, 1974, т. 113, вып. 3.
2. Brejzman V. N., Ryutov D. D. Powerful relativistic electron beams in a plasma and in a vacuum (theory). — Nuclear Fusion, 1974, vol. 14, p. 873—907.
3. Ильин В. П. Численные методы решения задач электрооптики. Новосибирск, Наука, 1974.

4. Poukey J. W., Freeman J. R., Yonas G. Simulation of relativistic electron beam diodes. — J. Vac. Sci. Technol., 1973, vol. 10, N 6.
5. Коломенский А. А., Новицкий М. А. Двумерная модель распространения сильно-точного электронного пучка и ускорение ионов из газа. — ЖТФ, 1976, т. 46, вып. 1.
6. Boris J. P. Relativistic plasma simulation — optimization of a hybrid code. — In: IV conf. on numerical simulation on plasmas. Washington, 1970.
7. Вшивков В. А. Численное моделирование релятивистского электронного пучка. — Численные методы механики сплошной среды, 1979, т. 10, № 2.
8. Рютов Д. Д. О критическом вакуумном токе релятивистских электронных пучков. — ЖТФ, 1977, т. 47, вып. 4.

УДК 533.9

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЧАСТИЧНО КОМПЕНСИРОВАННОМ ЭЛЕКТРОННОМ ПУЧКЕ

А. С. Чихачев

(Москва)

При изучении проблемы устойчивости квазистационарного релятивистского пучка в остаточном газе существенно рассмотрение движения не только электронов, но и ионов пучка. В работе [1] рассмотрены неустойчивости частично компенсированного пучка по отношению к изгибанию (неустойчивости типа «змейки»). При этом использовалась модель двух шнуров, образованных электронами и ионами пучка, которые могут смещаться относительно друг друга. Для проблем, изученных в [1], не существенна структура пучков в фазовом пространстве — поперечные колебания анализируются по движению осевых частиц.

В данной работе рассмотрим устойчивость электронно-ионного пучка относительно аксиально-симметричных возмущений радиусов электронной и ионной компонент. При этом будем полагать, что как электроны, так и ионы пучка характеризуются ненулевым эмиттансом.

1. При описании частиц пучка с помощью функции распределения в нестационарном случае необходимо найти интеграл движения, не являющийся следствием однородности системы, что возможно в параксиальном приближении [2, 3].

Электронную функцию распределения будем искать в виде

$$(1.1) \quad f_e = \kappa \delta(I - I_{0e}) \delta(\beta_z - \beta_0),$$

где κ — нормировочная постоянная; $\beta_z = v_z/c$; v_z — продольная скорость электронов; c — скорость света; I — функционал, зависящий от поперечных координат и скоростей.

Для справедливости (1.1) необходимо выполнение условия $J \ll \gamma \beta_0 \times \times mc^3/e$, где J — полный ток пучка; e , m — заряд и масса электрона; γ — релятивистский фактор. При этом β_z будет приближенным интегралом движения, что является следствием сохранения z-компоненты обобщенного импульса.

Функционал I в рассматриваемом случае аксиально-симметричного пучка можно представить в виде

$$(1.2) \quad I = A_e(t) \left[\left(\dot{r} - \frac{\dot{A}_e r}{2A_e} \right)^2 + \frac{C_{0e}^2}{r^2} \right] + \frac{E_{0e}^2}{A_e(t)} r^2,$$