Физика горения и взрыва

2

1967 г.

УДК 536.46

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМАЛЬНОЙ СКОРОСТИ ПЛАМЕНИ В СФЕРИЧЕСКОЙ БОМБЕ ПОСТОЯННОГО ОБЪЕМА

В. С. Бабкин, Ю. Г. Кононенко

(Новосибирск)

В связи с большими возможностями метода определения нормальной скорости распространения пламени в сферической бомбе постоянного объема с центральным зажиганием в последние годы выполнен ряд работ, направленных на отыскание надежных уравнений для расчета нормальной скорости [1—6].

Кроме экспериментально определяемых величин: радиуса пламени, давления и их производных по времени — в общем случае уравнения разных авторов содержат величины, относящиеся к области сгоревшего газа. Эти величины требуют дополнительного определения весовой доли продуктов сгорания (n), средней плотности $<\sigma_b>$ или средней температуры $<T_b>_n$. Поскольку в этих работах строгие зависимости указанных величин от экспериментально определяемых отсутствуют, возможность определения достаточно точных значений нормальной скорости ограничена ввиду того, что ошибка, вызванная приближенным характером этих величин, возрастает при вычислении их производных.

В настоящей работе показано, что в рамках обычных предположений существуют строгие соотношения между долей продуктов сгорания и давлением и что на основе этих соотношений можно получить все практически важные формы уравнений для определения нормальной скорости пламени.

СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ДОЛИ ПРОДУКТОВ СГОРАНИЯ

После воспламенения горючей смеси в центре бомбы тонкий ламинарный фронт пламени распространяется сферически — симметрично по направлению к стенке бомбы и разделяет области свежего газа и продуктов сгорания. Однородное по всему объему давление изменяется только во времени. Теплообмен между слоями газа и стенкой бомбы пренебрежимо мал. В процессе горения отношения теплоемкостей при постоянных давлении и объеме для свежего и сгоревшего газов, а также изменение числа молей при реакции остаются постоянными. Кроме того, предполагается, что при горении остаются постоянными общая масса газа

$$n + n_u = 1 \text{ или } \omega_b < \sigma_b > + \omega_u \sigma = 1 \tag{1}$$

и объем

$$\omega_b + \omega_u = 1, \tag{2}$$

где

$$n = \frac{m_b}{m_i}; \qquad n_u = \frac{m_u}{m_i}; \qquad \omega_u = \frac{v_u}{v_i}; \qquad \omega_b = \frac{v_b}{v_i};$$

$$\langle\sigma_b\rangle = \frac{\langle\rho_b\rangle}{\rho_i}; \qquad \sigma = \frac{\rho_u}{\rho_i};$$

m — масса; v — объем; ρ — плотность, скобки $\langle\rangle$ означают среднее по объему значение величины, а индексы u, b, i относятся соответственно к свежему газу, сгоревшему и начальному состоянию.

Из уравнений (1) и (2) следует, что

$$\langle\sigma_b\rangle = \frac{\sigma n}{\sigma + n - 1} \tag{3}$$

и

$$\omega_b = r^3 = \frac{\sigma + n - 1}{\sigma}, \tag{4}$$

где $r = \frac{r_b}{a}$ (r_b — радиус пламени, a — радиус бомбы).

Если U_u и U_b — удельная внутренняя энергия свежей смеси и продуктов сгорания при давлении p, а U_i — удельная внутренняя энергия свежей смеси при давлении p_i и температуре T_i, то уравнение энергии можно записать в виде

$$\int_0^n U_b\,dn + \int_n^1 U_u\,dn = U_i. \tag{5}$$

Прирост внутренней энергии свежей смеси в процессе горения обусловлен ее адиабатическим сжатием и равен

$$U_u - U_i = \frac{c_{vu}}{M_i}(T_u - T_i),$$

где M — молекулярный вес; c_v — мольная теплоемкость при постоянном объеме.

С другой стороны, для продуктов сгораний можно записать

$$U_b - U_{bi} = \frac{c_{vb}}{M_b}(T_b - T_{bi}),$$

где U_{vi} — удельная внутренняя энергия продуктов сгорания, образующихся при горении при постоянном давлении p_i, причем

$$U_{bi} - U_i = R\left(\frac{T_{bi}}{M_b} - \frac{T_i}{M_i}\right).$$

Следовательно,

$$U_b = U_i + \frac{c_{vb}}{M_b}(T_b - T_{bi}) - R\left(\frac{T_{bi}}{M_b} - \frac{T_i}{M_i}\right). \tag{6}$$

Подставляя выражения для U_u и $U_в$ в уравнение (5), получим

$$n\,c_{pb}\frac{T_{bi}}{M_b}-(1-n)\,c_{vu}\frac{T_u}{M_i}-nc_{pu}\frac{T_i}{M_i}+$$
$$+c_{vu}\frac{T_i}{M_i}=c_{vb}\int\limits_0^n\frac{T_b}{M_b}\,dn, \tag{7}$$

где c_p — мольная теплоемкость при постоянном давлении.

Интеграл в уравнении можно преобразовать

$$\int\limits_0^n\frac{T_b}{M_b}\,dn=n<\frac{T_b}{M_b}>_n=(\sigma+n-1)\,\sigma^{\gamma_u-1}\frac{T_i}{M_i},$$

принимая во внимание уравнение состояния продуктов сгорания — $\pi=p/p_i=<\sigma_b><\frac{T_b}{M_b}>_n/\frac{T_i}{M_i}$, соотношение адиабатического сжатия $\pi=\sigma^{\gamma_u}$ и уравнение (3).

После дальнейших преобразований уравнение (7) примет вид:

$$(\sigma+n-1)\,\sigma^{\gamma_u-1}=n\,\gamma_b\,E_i-(1-n)\frac{\gamma_b-1}{\gamma_u-1}\sigma^{\gamma_u-1}-\frac{\gamma_b-1}{\gamma_u-1}(\gamma_u n-1).$$

Откуда

$$n=\frac{\sigma+\dfrac{\gamma_b-1}{\gamma_u-1}(1-\sigma^{1-\gamma_u})-1}{G}, \tag{8}$$

где

$$G=\gamma_b\left[E_i-\frac{\gamma_u}{\gamma_b}\frac{(\gamma_b-1)}{(\gamma_u-1)}\right]\sigma^{1-\gamma_u}+\frac{\gamma_b-\gamma_u}{\gamma_u-1}; \tag{9}$$

$E_i=\dfrac{M_i\,T_{bi}}{M_b\,T_i}$ — коэффициент расширения продуктов сгорания при постоянном давлении p_i; $\gamma=\dfrac{c_p}{c_v}$ — отношение теплоемкостей при постоянных давлении и объеме. В дальнейшем потребуется производная $\dfrac{dn}{d\sigma}$; ее определим, дифференцируя уравнение (8)

$$\frac{dn}{d\sigma}=\frac{\gamma_u\sigma-(1-n)(\gamma_u-\gamma_b)}{\sigma G}. \tag{10}$$

На практике иногда удобно использовать выражения для доли продуктов сгорания в ином виде. Для этого из условия $n=1$ $\sigma=\sigma_e$, $\pi=\pi_e$ найдем соотношение между коэффициентом расширения E_i и конечным давлением π_e

$$\gamma_b\,(E_i-1)=\sigma_e^{\gamma_u}-1=\pi_e-1 \tag{11}$$

и, комбинируя уравнения (8) и (11), получим соотношение

$$1-n=\frac{\left(\dfrac{\sigma_e}{\sigma}\right)^{\gamma_u}-1}{\sigma G}, \tag{12}$$

известное в литературе как соотношение Фламма и Махе [7], а также

$$1-n=\frac{\sigma_e^{\gamma_u}-\sigma^{\gamma_u}}{\sigma_e^{\gamma_u}-\frac{\gamma_u-\gamma_b}{\gamma_u-1}\sigma^{\gamma_u-1}-\frac{\gamma_b-1}{\gamma_u-1}}, \tag{13}$$

не содержащее коэффициента расширения E_i.

В начале процесса горения, когда T_u близко к T_i, можно полагать $\sigma^{\gamma_u-1}\simeq 1$, и из уравнения (13) следует приближенное соотношение Льюиса и Эльбе [7]

$$n=\frac{\sigma^{\gamma_u}-1}{\sigma_e^{\gamma_u}-1}, \tag{14}$$

которое становится точным при $\gamma_u=\gamma_b$.

Уравнения (8), (12) и (13) можно получить иным путем [7], если считать, что на фронте пламени выполняется соотношение

$$\frac{c_{pb}}{M_b}(T_{bf}-T_{bi})=\frac{c_{pu}}{M_i}(T_u-T_i), \tag{15}$$

где T_{bf} — температура продуктов сгорания непосредственно на фронте пламени.

Иост [8], Льюис и Эльбе [7] полагают, что формула (15) является приближенной и вместо c_p записывают c_v.

Действительно, удельная внутренняя энергия сгоревшего газа складывается из энергии свежего газа U_i, прироста энергии в результате адиабатического сжатия свежего газа $c_{vu}(T_u-T_i)/M_i$, убыли энергии при горении при некотором давлении $p_f R\left(\frac{T_{bf}}{M_b}-\frac{T_u}{M_i}\right)$ и прироста энергии, обусловленного адиабатическим сжатием сгоревшего газа от давления p_f до p

$$U_b=U_i+\frac{c_{vu}}{M_i}(T_u-T_i)-R\left(\frac{T_{bf}}{M_b}-\frac{T_u}{M_i}\right)+\frac{c_{vb}}{M_b}(T_b-T_{bf}).$$

Сопоставляя полученное выражение с формулой (6), можно убедиться в правильности соотношения (15). Таким образом, в рамках сделанных предположений уравнения (8), (12) и (13) являются точными и идентичными.

УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ДВЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ПО ВРЕМЕНИ

Рассмотрим область свежего газа. Очевидно, что

$$n_u=\sigma\,\omega_u. \tag{16}$$

откуда

$$d\,n_u=\sigma\,d\,\omega_u+\omega_u\,d\,\sigma. \tag{17}$$

С другой стороны, масса свежего газа, сгорающего на фронте пламени за время dt, равна

$$d\,m_u=-4\pi r_b^2\rho_u S_u\,dt$$

или

$$d n_u = -3 \frac{r^2}{a} \sigma S_u d t, \tag{18}$$

где S_u — нормальная скорость пламени.

Подставляя dn_u из уравнения (18) в уравнение (17), заменяя ω_u на $1-\omega_b$ и $d\omega_u$ на $-d\omega_b$ в сооответствии с уравнением (2), после преобразования получим

$$S_u = S - \frac{a(1-r^3)}{3r^2\sigma} \frac{d\sigma}{dt}, \tag{19}$$

где $S = \frac{dr_b}{dt}$ — видимая скорость пламени.

Впервые это уравнение иным путем было получено Фиоком и др. [9] и содержит величины, определяемые только экспериментально. Однако для вычисления нормальной скорости по этому уравнению необходима высокая точность определения радиуса пламени, давления и их производных, особенно на ранней стадии процесса, так как S_u выражается в виде разности двух больших близких по величине членов.

Рассмотрим область продуктов сгорания. Аналогично уравнениям (16) и (17) для сгоревшего газа можно написать

$$n = \omega_b < \sigma_b >$$

и

$$dn = <\sigma_b> d\omega_b + \omega_b d < \sigma_b >.$$

Дифференциал dn заменим по уравнению (1) на $-dn_u$, а дифференциал dn_u выразим посредством уравнения (18). После преобразований получим

$$S_u = \frac{<\sigma_b>}{\sigma} S + \frac{ra}{3\sigma} \cdot \frac{d<\sigma_b>}{dt}. \tag{20}$$

Уравнение (20) было получено Роллисом и др. [6], а ранее в приближенной форме Фиоком и др. [9]. По этому уравнению, однако, нельзя прямо рассчитать нормальную скорость, поскольку оно содержит величину $<\sigma_b>$, требующую дополнительного выражения через экспериментально определяемые величины.

Среднюю плотность $<\sigma_b>$ запишем через σ и n по уравнению (3), а продифференцировав это уравнение, выразим производную $\frac{d<\sigma_b>}{dt}$ через производную $\frac{d\sigma}{dt}$

$$\frac{d<\sigma_b>}{dt} = \left[\sigma(\sigma-1)\frac{dn}{d\sigma} - n(1-n)\right] \cdot \frac{1}{(\sigma+n-1)^2} \cdot \frac{d\sigma}{dt}.$$

Получим

$$S_u = \frac{n}{\sigma+n-1} S + \frac{ra}{3(\sigma+n-1)^2}\left[(\sigma-1)\frac{dn}{\partial\sigma} - \frac{n}{\sigma}(1-n)\right]\frac{d\sigma}{dt}$$

или после подстановки производной $\frac{dn}{d\sigma}$ из уравнения (10)

$$S_u = \frac{n}{\sigma + n - 1} S + \frac{ra}{3(\sigma + n - 1)^2}\left[(\sigma - 1)\frac{\gamma_u \sigma - (\gamma_u - \gamma_b)(1-n)}{G} - \right.$$
$$\left. - n(1-n)\right]\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dt}. \tag{21}$$

УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ОДНУ ПРОИЗВОДНУЮ ПО ВРЕМЕНИ

Из уравнений (19) и (21) могут быть получены различные модификации в зависимости от используемых экспериментальных величин. Среди них практический интерес представляют уравнения, содержащие только одну производную по времени. В некоторых случаях это дает возможность значительно сократить объем измерений и вычислений.

Получим уравнение с производной $\frac{d\sigma}{dt}$. Для этого уравнение (18) перепишем в виде

$$S_u = \frac{a}{3r^2\sigma}\cdot\frac{dn}{dt} = \frac{a}{3r^2\sigma}\cdot\frac{dn}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{dt}.$$

Исключая радиус пламени r по уравнению (4) и подставляя выражение для $\frac{dn}{d\sigma}$ из уравнения (10), получим уравнение для определения нормальной скорости только по записи давления

$$S_u = \frac{a}{3G}\left(\frac{\sigma + n - 1}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\gamma_u + \gamma_b\frac{1-n}{\sigma + n - 1}\right)\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dt}. \tag{22}$$

Уравнение (22) особенно удобно для расчета нормальной скорости в опытах при высоких давлениях, когда возникают трудности с применением оптических окон для фотографирования пламени, а также с измерениями радиуса пламени из-за сильного свечения продуктов сгорания.

Чтобы получить уравнение, содержащее только производную $\frac{dr_b}{dt}$ уравнение (17) перепишем в виде

$$\sigma\frac{d\omega_u}{dn_u} = 1 - \omega_u\frac{d\sigma}{dn_u}$$

и преобразуем его, принимая во внимание уравнения (1), (2) и (18)

$$S/S_u = 1 + \frac{1-n}{\sigma}\frac{d\sigma}{dn}$$

или

$$S_u = S\left[1 - \frac{d\ln\sigma}{d\ln(1-n)}\right]^{-1}. \tag{23}$$

Подстановка производной из уравнения (10) в уравнение (23) приводит к окончательному результату

$$S_u = S\left[1 + \frac{(1-n)G}{\gamma_u\sigma - (\gamma_u - \gamma_b)(1-n)}\right]^{-1}. \tag{24}$$

В начале процесса горения $n=0$, $\sigma=1$ и уравнение (24) можно записать в виде $S_u = S/E_i$, а в конце процесса при $n=1$ $S_u = S$ в соответствии с простым физическим смыслом.

Наконец, поскольку имеются строгие соотношения между n и π (уравнения (8), (12), (13), а следовательно, и между r_b и π (уравнение (4)), то можно определить нормальную скорость пламени только на основе измерений радиуса пламени. Для этого необходимо совместно решить уравнения (4), (24) и одно из уравнений (8), (12) или (13), причем уравнение (24) удобно предварительно преобразовать, исключив n по уравнению (4)

$$S_u = S\left[1 + \frac{G}{\gamma_b + \gamma_u\left(\frac{r^3}{1-r^3}\right)}\right]^{-1}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнения для нормальной скорости пламени, полученные в настоящей работе, для простоты записи представлены в зависимости от параметров σ, E_i, G и n, кроме непосредственно определяемых — r и π. Для перехода от σ к π и от $\frac{d\sigma}{dt}$ к $\frac{d\pi}{dt}$ можно воспользоваться законом адиабатического сжатия свежего газа

$$\pi = \sigma^{\gamma_u}$$

и его дифференциальной формой

$$\frac{1}{\pi}\frac{d\pi}{dt} = \frac{\gamma_u}{\sigma}\frac{d\sigma}{dt}.$$

Коэффициент расширения E_i может быть вычислен или по термодинамическим данным или определен экспериментально по конечному давлению π_e и соотношению (11).

Параметр G рассчитывается по формуле (9). Что касается доли продуктов сгорания n, то кроме соотношений (8), (12) или (13) могут быть использованы приближенные соотношения, имеющиеся в литературе, например, соотношение Льюиса и Эльбе (14), тем более, что уравнения, полученные в настоящей работе, не содержат производных типа $\frac{dn}{dt}$.

Особенность метода бомбы постоянного объема, как известно, состоит в том, что имеется возможность проверки действительности сделанных предложений или точности экспериментальных данных. Если в опыте регистрируется как давление, так и радиус пламени, то для проверки можно использовать уравнение (4) или равенство нормальных скоростей, определенным по независимым параметрам π и r.

Поступила в редакцию
18/XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. R. C. Eschenbach and J. T. Agnew. Combustion and Flame, 1958, **2**, 3.
2. K. H. O'Donovan and C. J. Rallis. Combustion and Flame, 1959, **3**, 2.
3. J. Grumer, E. B. Cook and T. A. Kubala. Combustion and Flame, 1959, **3**, 4.
4. S. D. Raezer. Combustion and Flame, 1961, **5**, 1.
5. C. J. Rallis and G. E. B. Tremeer. Combustion and Flame, 1963, **7**, 1.
6. C. J. Rallis, A. M. Garforth and J. A. Steinz. Combustion and Flame, 1965, **9**, 4.
7. B. Lewis and G. von Elbe. Combustion, Flames and Explosions of Gases, New York and London. Academic Press., INC, 1961.
8. В. Йост. Взрывы и горение в газах, М., ИЛ., 1952.
9. E. F. Fiock and C. F. Marvin. Chem. Rew., 1937, **21**, 3.