

ЛАМИНАРНАЯ СОВМЕСТНАЯ КОНВЕКЦИЯ БИНАРНОЙ СМЕСИ  
ОКОЛО ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

П. М. Брдлик, В. И. Дубовик

(Москва)

Исследуется совместная (свободная и вынужденная) конвекция около вертикальной поверхности. Одновременный тепло- и массообмен бинарной смеси описывается системой дифференциальных уравнений ламинарного пограничного слоя с учетом диффузионной теплопроводности. Подход к решению поставленных задач различен в зависимости от того, какое течение берется за основное.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

$x, y$ — координаты,	$R_1$ — газовая постоянная,
$g$ — ускорение силы тяжести,	$c_p$ — удельная теплоемкость,
$T$ — температура,	$\lambda$ — коэффициент теплопроводности,
$\nu$ — кинематическая вязкость,	$f_{wc}, f_{wg}$ — параметры вдува,
$\beta_T, \beta_m$ — коэффициенты термического и концентрационного расширения,	$G$ — число Грасгофа,
$a$ — коэффициент температуропроводности,	$R$ — число Рейнольдса,
$M$ — молекулярный вес,	$N$ — число Нуссельта,
$D$ — коэффициент диффузии,	$N_D$ — массообменное число Нуссельта,
$h$ — коэффициент массоотдачи,	$P$ — число Прандтля,
$a_T$ — термодиффузионная постоянная,	$S$ — число Шмидта

$$f_{wc} = -\frac{1}{3} R_w \left( \frac{G}{4} \right)^{-1/4}, \quad G = \frac{g \beta_T (T_w - T_\infty) x^3}{\nu^2}, \quad R = \frac{U_\infty x}{\nu}, \quad R_w = \frac{v_w x}{\nu}$$

$$N = \frac{\alpha x}{\lambda}, \quad N_D = \frac{hx}{D}, \quad P = \frac{\nu}{a}, \quad S = \frac{\nu}{D}$$

Индексы  $w$  — значения на поверхности,  $\infty$  — значения на большом удалении от поверхности, 1—вдуваемый газ, 2—воздух.

Экспериментальное исследование массообмена в двухкомпонентном пограничном слое на вертикальной поверхности [1], обтекаемой вынужденным потоком, указывает на влияние свободной конвекции на процессы тепло- и массоотдачи.

В общем случае диффузионный поток массы  $i$ -компоненты в бинарной газовой смеси зависит от градиентов концентрации и температуры

$$j_i = -\rho D \left[ \frac{\partial m_i}{\partial y} + a_T \frac{m_i (1 - m_i)}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{i=1,2} \quad (0.1)$$

Первый член в (0.1) описывает массовую диффузию, второй — термическую диффузию. Концентрации компонент смеси связаны с плотностью смеси так:

$$m_i = \rho_i / \rho, \quad m_1 + m_2 = 1$$

Тепловой поток в бинарных смесях включает в себя тепло, передаваемое теплопроводностью и диффузией

$$q = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} + a_T \frac{R_1 M^2 T}{M_1 M_2} j_i \quad (0.2)$$

Здесь второй член характеризует диффузионный перенос энергии (диффузионную теплопроводность).

Рассмотрим конвективное движение бинарной смеси около вертикальной пористой пластины, обтекаемой потоком со скоростью  $U_\infty$  и температурой  $T_\infty$ . Через пористую поверхность пластины вдувается инородный газ в пограничный слой.

Одновременный перенос тепла, массы и количества движения при совместной конвекции описывается уравнениями бинарного ламинарного пограничного слоя

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta_T (T - T_\infty) + g\beta_m (m_1 - m_{1\infty}) \quad (0.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (0.4)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial}{\partial y} (q) - \frac{c_{p1} - c_{p2}}{\rho c_p} j_1 \frac{\partial T}{\partial y} \quad (0.5)$$

$$u \frac{\partial m_1}{\partial x} + v \frac{\partial m_1}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (j_1) \quad (0.6)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u = 0, \quad v = v_w, \quad T = T_w, \quad m_1 = m_{1w} \quad \text{при} \quad y = 0 \\ u = U_\infty, \quad T = T_\infty, \quad m_1 = m_{1\infty} \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (0.7)$$

Положим, что  $T_w > T_\infty$  (при  $T_w < T_\infty$  ход рассуждений не изменится). Система координат выбрана так, что ось  $x$  направлена вдоль поверхности вверх, а ось  $y$  перпендикулярна к ней.

При составлении уравнений (0.3) — (0.6) физические свойства среды принимались постоянными, за исключением членов, выражающих подъемную силу, в которых плотность зависит от температуры и концентрации. Пренебрегаем в данном случае диссипацией энергии и термодиффузией, т. е. вторым членом в выражении (0.1).

**1. Влияние вынужденного потока на свободную конвекцию.** Примем за основное течение свободную конвекцию и исследуем влияние на нее вынужденного течения. Для этого введем функцию тока  $\Psi$ , такую что

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = - \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

удовлетворяют уравнению (0.4); новые зависимые и независимые переменные подобия

$$\eta = \frac{c_1 y}{x^{1/4}}, \quad \Psi = 4\nu c_1 x^{3/4} f(\eta), \quad c_1 = \left[ \frac{g\beta_T (T_w - T_\infty)}{4\nu^2} \right]^{1/4} \quad (1.1)$$

тогда вместо (0.3) — (0.6) получим систему

$$f''''(\eta) + 3f(\eta) f''(\eta) - 2f'^2(\eta) + \theta(\eta) + e \varphi(\eta) = 0 \quad (1.2)$$

$$\theta''(\eta) + [3Pf(\eta) + a\varphi'(\eta)] \theta'(\eta) + 3cSf(\eta) \varphi'(\eta) = 0 \quad (1.3)$$

$$\varphi''(\eta) + 3Sf(\eta) \varphi'(\eta) = 0 \quad (1.4)$$

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad \varphi(\eta) = \frac{m_1 - m_{1\infty}}{m_{1w} - m_{1\infty}}$$

$$a = \frac{c_{p1} - c_{p2}}{c_p} (m_{1w} - m_{1\infty}) \frac{P}{S}, \quad c_p = \sum_i c_{pi} m_{iw}$$

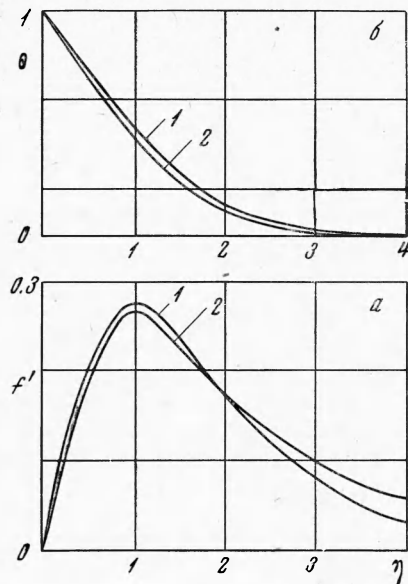
$$c = \frac{a_T R_1 M^2 T_w (m_{1w} - m_{1\infty})}{c_p M_1 M_2 (T_w - T_\infty)} \frac{P}{S} \quad (1.5)$$

$$e = \frac{\beta_m (m_{1w} - m_{1\infty})}{\beta_T (T_w - T_\infty)}, \quad \beta_m = \frac{M_2 / M_1 - 1}{1 + (M_2 / M_1 - 1) m_{1w}}$$

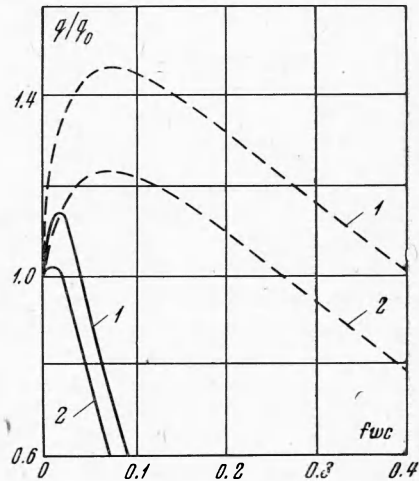
при следующих граничных условиях в новых переменных:

$$\begin{aligned} f'' = 0, f_w = \text{const}, \theta = 1, \varphi = 1 \text{ при } \eta = 0 \\ f'' = 1/2 R G^{-1/2}, \theta = 0, \varphi = 0 \text{ при } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1.6)$$

Неавтономное граничное условие на бесконечности для  $f''$  не оказывает существенного влияния на результаты решения. Так, на фиг. 1 дано сравнение профилей скорости (а) и температуры (б) для простейшего случая смешанной конвекции при  $P = 0,72$  и  $B = 0.1$ , когда отсутствует массообмен и пористая подача вещества на стенке, с решением А.



Фиг. 1



Фиг. 2

Шевчика [2] (кривые 1), выполненным для этого случая, но другим методом — разложением в ряд по параметру  $R / G^{1/2}$ .

В уравнениях (1.2) — (1.4) штрих означает дифференцирование по  $\eta$ . Параметр  $B = R / 2G^{1/2}$  характеризует влияние вынужденного течения на свободную конвекцию. Составляющие скорости  $u, v$  выражаются соотношениями

$$u = 4\nu c_1^2 x^{1/2} f''(\eta), \quad v = \nu c_1 x^{-1/2} [\eta f''(\eta) - 3f(\eta)] \quad (1.7)$$

Граничное условие  $f_w = \text{const}$  означает, что

$$v_w = -3\nu c_1 x^{-1/2} f_w, \text{ или } v_w \sim x^{-1/2}.$$

Как показано в работах [3,4], закон изменения  $v_w$  при свободной и вынужденной конвекции оказывает сравнительно слабое влияние на пограничный слой и теплообмен.

Для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (1.2) — (1.4) с граничными условиями (1.6) применен следующий итерационный процесс:

- 1) выбираются нулевые приближения для функций  $f(\eta)$  и  $\theta(\eta)$ ;
- 2) в коэффициенты уравнения (1.4) подставляется нулевое приближение  $f^{(0)}(\eta)$  и решается краевая задача. Находится нулевое приближение для функции  $\varphi(\eta)$ ;
- 3) подставляя в уравнения (1.2), (1.3) вместо функций  $f(\eta)$ ,  $\theta(\eta)$ ,  $\varphi(\eta)$  и их производных нулевые приближения, получаем  $f^{(1)}(\eta)$ ,  $\theta^{(1)}(\eta)$ . Затем находим по уравнению (1.4)  $\varphi^{(1)}(\eta)$  и т. д.

Указанная операция продолжается до тех пор, пока разность между двумя последовательными приближениями искомых функций для всех значений  $\eta$  не станет меньше заранее заданного  $\varepsilon > 0$ . Линейные краевые задачи, возникающие при каждой итерации, решались методом прогонки [5]. Величина  $a_T$  вычислялась по формулам (2-44) — (2-50) работы [6] при  $T_w = 328$  °К. В результате проведенных расчетов на ЭВМ М-220 представляется возможным подсчитать профили температуры, скорости и распределение концентрации компоненты 1 в пограничном слое при совместной конвекции при вдуве водорода, гелия, водяного пара и углекислого газа.

Локальный коэффициент теплообмена рассчитывается по формуле

$$N = - \left( \frac{G}{4} \right)^{1/4} \left[ \theta'(0) + \frac{P}{S} \frac{a_T R_1 M^2 T_w}{c_D M_1 M_2} \frac{(m_{1w} - m_{1\infty})}{(T_w - T_\infty)} \varphi'(0) \right] \quad (1.8)$$

Для потока массы компоненты 1 (без учета термодиффузии) из выражения (0.1) находим массообменное число Нуссельта

$$N_D = - \left( \frac{G}{4} \right)^{1/4} \varphi'(0) \quad (1.9)$$

На фиг. 2 представлены отношения тепловых потоков для вдува гелия при температурном режиме, характеризуемом отношением  $T_w / T_\infty = 1.1$ . Видно, что диффузионная теплопроводность оказывает существенное влияние на теплообмен. При малых вдувах интенсивность теплообмена возрастает; кривые имеют максимум. В случае свободной конвекции при учете диффузионной теплопроводности максимум достигается при параметре вдува (сплошная кривая 1)

$${}^{1/3}R_w ({}^{1/4}G)^{-1/4} = 0.015$$

а без учета диффузионной теплопроводности (пунктирная кривая) при

$${}^{1/3}R_w ({}^{1/4}G)^{-1/4} = 0.076$$

Для параметра вдува, равного 0.05, разница между величинами  $q / q_0$ , подсчитанными с учетом диффузионной теплопроводности и без нее составляет 60%. При больших вдувах, следствием чего является утолщение пограничного слоя, теплообмен уменьшается, причем при учете диффузионной теплопроводности  $q$  становится меньше  $q_0$  (без вдува). В случае, когда диффузионный эффект не учитывается,  $q$  становится равным  $q_0$  при параметре вдува, равном 0.41.

Кривые 2 на фиг. 2 получены при учете влияния вынужденного течения на свободную конвекцию ( $B = 2$ ). В этом случае для параметра вдува, равного 0.1, отношение  $q / q_0$  уменьшается за счет влияния вынужденной конвекции при учете диффузионной теплопроводности на 14%, а без учета — до 20%.

**2. Влияние свободной конвекции на вынужденную.** Для рассмотрения влияния свободной конвекции на вынужденную сведем систему (0.3) — (0.6) к обыкновенным дифференциальным уравнениям путем введения независимой переменной

$$\eta = y (U_\infty / \nu x)^{1/2}$$

и функции тока

$$\Psi = (U_{\infty} \nu x)^{1/2} f(\eta)$$

В новых переменных составляющие скорости выразятся следующим образом:

$$u = U_{\infty} f'(\eta), \quad v = -\frac{1}{2} \left( \frac{U_{\infty} \nu}{x} \right)^{1/2} [f(\eta) - \eta f'(\eta)] \quad (2.1)$$

и вместо системы (0.3) — (0.6) получаем

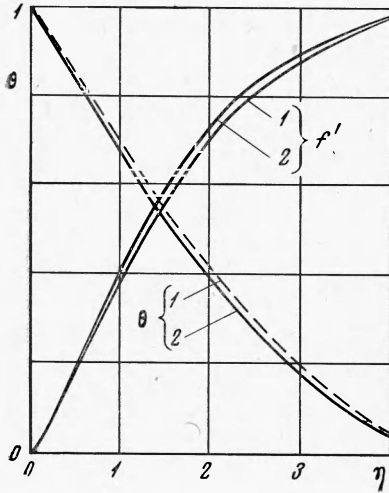
$$f'''(\eta) + \frac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) + [\theta(\eta) + \epsilon \varphi(\eta)] \frac{G}{R^2} = 0 \quad (2.2)$$

$$\theta''(\eta) + [\frac{1}{2} P f(\eta) + a \varphi'(\eta)] \theta'(\eta) - \frac{1}{2} c S f(\eta) \varphi'(\eta) = 0 \quad (2.3)$$

$$\varphi''(\eta) + \frac{1}{2} S f(\eta) \varphi'(\eta) = 0 \quad (2.4)$$

где  $\theta(\eta)$ ,  $\varphi'(\eta)$ ,  $a$ ,  $c$  и  $\epsilon$  определяются по формулам (1.5)

Переход к обыкновенным дифференциальным уравнениям возможен при условии, что  $A = G/R^2 = \text{const}$ . Это выполняется точно, если  $T_w - T_{\infty} = Cx^n$ ,  $n = \text{const}$ . Однако для нашего случая, т. е.  $T_w - T_{\infty} = \text{const}$ ,



Фиг. 3

для вынужденной конвекции; при больших значениях  $A$  процесс свободной конвекции будет оказывать влияние на вынужденное течение и теплообмен.

Граничные условия (0.7) для системы (2.2) — (2.4) в новых переменных для случая совпадающих по направлению потоков при совместной конвекции будут

$$\begin{aligned} f' = 0, \quad f_w = \text{const}, \quad \theta = 1, \quad \varphi = 1 \quad \text{при} \quad \eta = 0 \\ f' = 1, \quad \theta = 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.5)$$

В случае противоположных направлений свободной и вынужденной конвекции в граничных условиях (2.5) имеем  $f'(\infty) = -1$  для  $\eta \rightarrow \infty$ .

Система уравнений (2.2) — (2.4) решалась методом, описанным в п. 1 для совпадающих и противоположных по направлению потоков свободной и вынужденной конвекции.

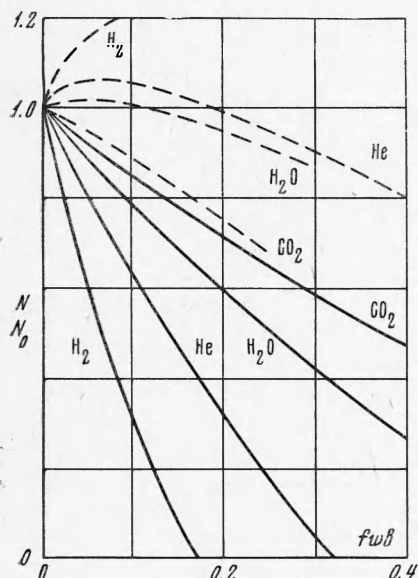
Результаты численных расчетов позволяют получить тепловые и массовые потоки на вертикальной поверхности при вдуве инородных газов для различных значений параметра  $G/R^2$ .

Тепловой поток бинарной смеси находим по выражению (0.2), из которого получаем

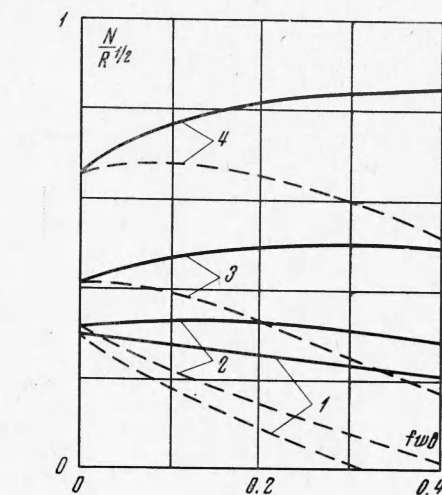
$$N = -R^{1/2} \left[ \theta'(0) + \frac{P}{S} \frac{a_T R_1 M^2 T_w (m_{1w} - m_{1\infty})}{c_p M_1 M_2 (T_w - T_{\infty})} \varphi'(0) \right] \quad (2.6)$$

Массообменное число Нуссельта в данном случае будет  $N_D = -R^{1/2} \varphi'(0)$ .

Для более ясного понимания физики рассматриваемого процесса приводятся фиг. 4, на которой построены зависимости  $N/N_0$  от интенсивности вдува ( $N_0$  без массообмена на поверхности) для различных газов и параметра  $A = 0.10$ . Ознакомление с этими графиками показывает, что более легкие газы эффективнее снижают теплообмен чем тяжелые, при чисто вынужденном течении (сплошные кривые). При увеличении



Фиг. 4



Фиг. 5

влияния свободной конвекции кривые (пунктирные) располагаются выше, т. е. теплообмен увеличивается по мере уменьшения молекулярного веса вдуваемого газа. За счет влияния свободной конвекции отношение  $N/N_0$  увеличивается при параметре вдува, равном 0.1, для углекислого газа на 3%, а для гелия на 70%. Влияние диффузионной теплопроводности при вдуве гелия при совместной конвекции для значений параметра  $A = 0, 0.1, 1$  и 10 показано на фиг. 5, где пунктирные линии представляют собой  $N/R^{1/2}$  без учета диффузионного эффекта.

При вдуве гелия для  $f_{w\delta} = -0.02$  свободную конвекцию можно не учитывать до значения  $G/R^2 = 0.09$ .

Поступила 14 I 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. El-Wakil M. M., Myers G. E., Schilling R. J. An Interferometric Study of Mass Transfer From a Vertical Plate at Low Reynolds Numbers. Trans. ASME, Ser. C, J. Heat Trans., 1966, vol. 88, No. 4. (Рус. перев. Исследование массообмена на вертикальной пластине при малых числах Рейнольдса с помощью интерферометра. Теплопередача, Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер. C, 1966, № 4.)
2. Szeuwczuk A. A. Combined forced and free-convection laminar flow. Trans. EASM, Ser. C, J. Heat Trans., 1964, No. 4. (Рус. перев. Совместное действие вынужденной и свободной конвекции при ламинарном течении. Теплопередача, Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер. C, 1964, № 4.)
3. Эккерт Э. Р. Г., Дрейк Р. М. Теория тепло- и массообмена. М.—Л., Госэнергоиздат, 1961.
4. Брдлик П. М., Мочалов В. А. Экспериментальное изучение свободной конвекции с пористым вдувом и отсосом на вертикальной поверхности. Инж.-физ. ж., 1966, т. 10, № 1.
5. Брдлик П. М., Мочалов В. А., Дубовик В. И. Ламинарная свободная конвекция на вертикальной поверхности, осложненная конденсацией или испарением. Научн. тр. научн.-исслед. ин-та строит. физики Госстроя СССР, 1967, вып. 2.
6. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория жидкостей и газов., М., Изд-во иностр. лит., 1961.