

СМЕШЕНИЕ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ СТРУЙ
НЕОДНОРОДНЫХ ГАЗОВ

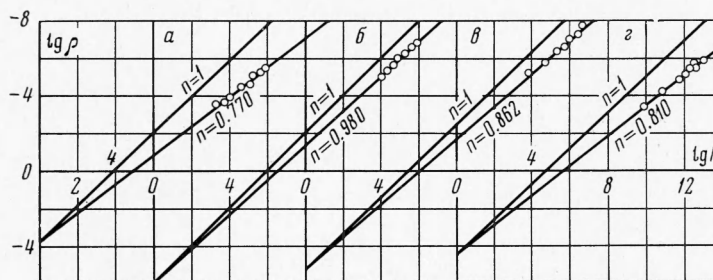
А. Л. Моссэ

(Минск)

Рассматривается задача о смешении двух плоскопараллельных (спутных или встречных) высокотемпературных струй неоднородных сжимаемых газов. Получены частные решения.

В работе [1] на основе дифференциальных уравнений пограничного слоя была рассмотрена задача о смешении двух плоских (спутных или встречных) струй неоднородных сжимаемых газов при условии линейного закона связи коэффициента вязкости и энтальпии ($\mu = h, k = 1$), справедливость которого не вызывает сомнений в области сравнительно невысоких температур. При переходе к струям, нагретым до высоких температур, этот сравнительно простой закон уступает место степенному закону $\mu = h^k$, где k с возрастанием температуры стремится к 0.5. С использованием последнего получаема система дифференциальных уравнений даже для однородных газов становится настолько сложной [2], что для конкретной задачи может быть проинтегрирована только численно. Использование закона связи, предложенного Чепменом и Рубезиным [3] для исследования высокотемпературных струй, позволяет получить те же вычислительные выгоды, что и [1] случай $k = 1$, и одновременно удовлетворительно описать связь между коэффициентом вязкости и энтальпии в широком диапазоне температур.

Переход к высоким температурам делает невозможным использование уравнения состояния, так как процессы диссоциации и ионизации, происходящие в газах при высоких температурах, приводят к существенному изменению газовой постоянной R . В этом случае связь $\rho = \text{const} / T$, вытекающая из уравнения состояния, становится несправедливой. На основании термодинамических расчетов (использовались данные [4,5]) и уравнения состояния были получены зависимости между плотностью и энтальпией для следующих газов: азот, водород, кислород, воздух и для воды.

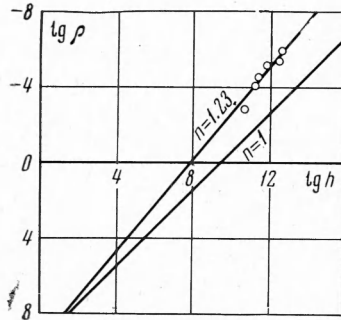


Фиг. 1

Полученные зависимости плотности ρ от энтальпии h по термодинамическому расчету (точки) и по приближенной аппроксимации $\rho = A / h^n$ представлены на фиг. 1: а — для H_2 , б — для O_2 , в — для N_2 , г — для воздуха — и на фиг. 2 для водяного пара (плазма). Очевидно, что все они с достаточной степенью точности аппроксимируются выражением $\rho = A/h^n$, которое представляет собой простое аналитическое приближение к уравнению состояния, где коэффициенты A и n постоянны и зависят от рода га-

за: для H_2 — $\lg A = 4$; $n = 0,77$; для O_2 соответственно 6.1 и 0.98; для N_2 — 5,3 и 0.862 и для воздуха — 4.6 и 0.810. Аналогичные зависимости для воздуха и водяного пара получены в [6].

Ниже приводятся результаты теоретического исследования процессов переноса при смешении двух плоских ламинарных струй неоднородных сжимаемых газов при спутном или встречном их движении. Принимаем, как и в [3], что смешение осуществляется благодаря молекулярной



Фиг. 2

диффузии в пограничном слое (зоне смешения) на границе контакта струй, смешиваемые газы химически не взаимодействуют. Имеют место все физические допущения теории пограничного слоя, кроме того, предполагается, что число Прандтля $P \neq 1 = \text{const}$, число Шмидта $S \neq 1 = \text{const}$ и, кроме того, $P \neq S$. Последние допущения, очевидно, оправданы тем, что, как показали расчеты по кинетической теории газов [3], влияние энтальпии смеси газов на число P сравнительно невелико и с ростом энтальпии колеблется около некоторого среднего значения, которое можно принять приблизительно равным 0.7.

Систему дифференциальных уравнений стационарного движения неоднородных сжимаемых газов в ламинарном пограничном слое (зоне смешения) двух спутных или встречных высокотемпературных потоков с учетом закона связи [3] и аппроксимации $\rho = A/h^n$ без учета термодиффузии, принимая давление во всем поле течения постоянным, получаем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0, \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \rho = \frac{A}{h^n}, \quad \mu = hC \\ \rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{P} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 - \frac{1}{P} \right) \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right] \\ \rho u \frac{\partial C_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial C_i}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{S} \frac{\partial C_i}{\partial y} \right) \left(C = \frac{1 + h_s}{h_w + h_s} h_w^{0.5}, \quad h_s = \frac{T_s}{T_\infty} \right) \\ (T_s &= 102 \text{ }^\circ\text{C} \text{ — постоянная Саттерлэнда}) \end{aligned} \quad (1)$$

С граничными условиями в области $x > 0$ ($x = 0$, точка начала смешения струй)

$$\begin{aligned} u &= u_1, \quad h = h_1, \quad C_i = C_1 \quad \text{при } y = +\infty \\ u &= u_2, \quad h = h_2, \quad C_i = C_2 \quad \text{при } y = -\infty \end{aligned} \quad (2)$$

После преобразования системы уравнений (1) с граничными условиями (2) к безразмерной форме, принимая в качестве масштабов величины, связанные с невозмущенным потоком в области $y > 0$, и повторного преобразования в переменных Дородницына получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} &= 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial \xi} + V \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{h}{h_\infty} \right)^{1-n} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] \\ u \frac{\partial h}{\partial \xi} + V \frac{\partial h}{\partial \eta} &= \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{P} \left(\frac{h}{h_\infty} \right)^{1-n} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right] + (\sigma - 1) M_\infty^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} \times \\ &\quad \times \left[\left(1 - \frac{1}{P} \right) \left(\frac{h}{h_\infty} \right)^{1-n} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u}{2} \right)^2 \right] \\ u \frac{\partial C_i}{\partial \xi} + V \frac{\partial C_i}{\partial \eta} &= \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{S} \left(\frac{h}{h_\infty} \right)^{1-n} \frac{\partial C_i}{\partial \eta} \right] \quad V = \rho v + u \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \sigma = \frac{c_p}{c_v} \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$u = 1, \quad h = 1, \quad C_i = 1 \quad \text{при} \quad \eta = +\infty$$

$$u = u_m, \quad h = h_m, \quad C_i = C_m \quad \text{при} \quad \eta = -\infty$$

$$u_m = \frac{u_2}{u_1}, \quad h_m = \frac{h_2}{h_1}, \quad C_m = \frac{C_2}{C_1}$$

Для случая спутных струй значение скорости u_2 положительно и отрицательно для встречных струй, u_1 всегда больше 0.

Принимая далее, что продольная компонента скорости, энтальпия и концентрация являются функциями [2] одной лишь переменной ζ при условии постоянства чисел P и S , получим

$$\varphi''' + \varphi'' \left(\frac{H'}{H} + \frac{\varphi}{v_\infty H} \right) = 0$$

$$h'' + 2h' \left(\frac{H'}{H} + \frac{P\varphi}{v_\infty H} \right) + (\sigma - 1) \frac{M_\infty^2}{2} (P - 1) \left[\frac{H'}{H} (\varphi')^2 + (\varphi'')^2 \right] = 0 \quad (3)$$

$$C_i'' + C_i' \left(\frac{H'}{H} + \frac{S\varphi}{v_\infty H} \right) = 0 \quad \left(H = \left[\frac{h}{h_0} \right]^{1-n} \right)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \varphi' = 1, \quad h = 1, \quad C_i = 1 \quad \text{при} \quad \zeta = +\infty \\ \varphi' = u_m, \quad h = h_m, \quad C_i = C_m \quad \text{при} \quad \zeta = -\infty \end{aligned} \quad (4)$$

Полученная после преобразований система уравнений (3) оказывается настолько сложной, что может быть проинтегрирована только численно для какой-либо конкретной задачи. Для получения аналитического решения задачи рассмотрим случай, когда $n = 1$.

Проведенный анализ величины степенного показателя аппроксимации $\rho = A / h^n$ показывает, что для рассмотренных газов, приведенных на фиг. 1—3, последний не сильно отличается от 1. Во всяком случае, рассматриваемый вариант для высокотемпературных условий значительно ближе к истинному положению, чем принятие линейного закона связи коэффициента вязкости и энтальпии $\mu = h$, где принятие $k = 1$ вместо $k = 0.5$ является значительно более грубым приближением.

При $n = 1$ система (3) сводится к системе автономных дифференциальных уравнений с граничными условиями (4)

$$\varphi''' + \frac{1}{v_\infty} \varphi \varphi'' = 0 \quad (5)$$

$$h'' + \frac{2P\varphi h'}{v_\infty} + (\sigma - 1) \frac{M_\infty^2}{2} (P - 1) (\varphi'')^2 = 0, \quad C_i'' + \frac{S\varphi C_i'}{v_\infty} = 0$$

Для решения динамической задачи, как и в [2], воспользуемся методом итерации [7], представляя искомую функцию в виде ряда

$$\varphi(\zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} (m-1)^i \varphi_i(\zeta)$$

Первое уравнение (5) отличается от решенного в [2] уравнения только постоянным множителем $1 / v_\infty$, поэтому можно привести здесь окончатель-

ные выражения для компонент скорости

$$u = \frac{1}{2} \cdot \varphi'(\zeta) = \frac{1}{2} \left[1 + (u_m - 1) \left(1 - \operatorname{erf} \frac{\zeta}{\sqrt{2\nu_\infty}} \right) \right] \quad (6)$$

$$V = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\xi}} (\zeta \varphi' - \varphi) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\xi}} (u_m - 1) \left[\zeta \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\nu_\infty}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{2\nu_\infty}} \int_0^\zeta \left(\operatorname{erf} \frac{\zeta}{\sqrt{2\nu_\infty}} \right) d\zeta + \rho \operatorname{erf} \frac{\zeta}{\sqrt{2\nu_\infty}} - C_1 \right] \quad (7)$$

Решение уравнения энергии (6), как и в [1], получаем с помощью метода вариации постоянных, используя при этом подстановку из первого уравнения (5)

$$\varphi = \nu_\infty \frac{\varphi'''}{\varphi''}, \quad \int_{-\infty}^{\zeta} \varphi d\zeta = -\nu_\infty \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{\varphi'''}{\varphi''} d\zeta = -\nu_\infty \ln \frac{\varphi''(\zeta)}{\varphi''(0)} \quad (8)$$

Окончательно общее решение второго уравнения (5) получим в виде

$$h = h_m + 0.5(1 - h_m) \left(1 + \operatorname{erf} \zeta \sqrt{2P} \right) + 0.25(\sigma - 1) M_\infty^2 (P - 1) \times \\ \times [0.5(1 + \operatorname{erf} \zeta \sqrt{2P}) R(-\infty, +\infty) - R(-\infty, \zeta)] \quad (9)$$

$$R(-\infty, +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi''(\zeta)]^{2P} \int_{-\infty}^{\zeta} (\varphi''')^2 [\varphi''(\zeta)]^{-2P} d\zeta d\zeta$$

$$R(-\infty, \zeta) = \int_{-\infty}^{\zeta} [\varphi''(\zeta)]^{2P} \int_{-\infty}^{\zeta} (\varphi''')^2 [\varphi''(\zeta)]^{-2P} d\zeta d\zeta$$

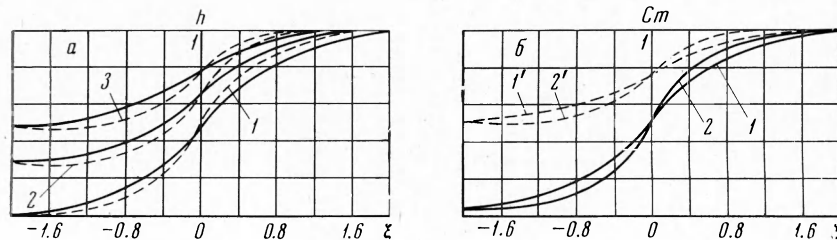
Решение уравнения диффузии с соответствующими граничными условиями (4) с учетом подстановки (8) получим в виде

$$C_i = \left[C_m \int_{\zeta}^{+\infty} (\varphi'')^{2S} d\zeta + \int_{-\infty}^{\zeta} (\varphi'')^{2S} d\zeta \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi'')^{2S} d\zeta \right]^{-1}$$

или окончательно с учетом выражения для функции $\varphi''(\zeta)$

$$C_i = 0.5 [(C_m + 1) - (C_m - 1) \operatorname{erf} \zeta \sqrt{2S}] \quad (10)$$

Характер движения газа, распределение энтальпий и концентраций в



Фиг. 3

области смешения двух встречных или спутных потоков, как видно из решений (6)—(10), аналогичен полученному в [1,2], где графически представлен и достаточно подробно анализируется.

В качестве примера на основании полученных результатов (9) и (10) сравним распределение энтальпий и концентраций в области смешения двух спутных (или встречных) потоков разнородных сжимаемых газов для случая линейного закона связи [1] коэффициента вязкости и энтальпии ($\mu = h, k = 1$) и для случая аппроксимационной связи $\rho = A / h^n$. На фиг. 3, а, б представлены результаты расчетов зависимости профиля полной энтальпии h и концентрации C_2 от обобщенного параметра $\xi = \eta / \sqrt{2} \sqrt{\xi}$ в случае $P = 1$ для обоих сравниваемых вариантов при различных значениях h_m и C_m . На фиг. 3, а кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям $h_m = 0, 0.3, 0.5$; причем сплошные линии приняты для $\mu = h, k = 1$, а штриховые — для $\rho = A / h^n$. На фиг. 3, б кривые 1 и 2 соответствуют значениям $C_m = 0, 0.5$.

Характер представленной зависимости показывает, что эффективная ширина зоны смешения при использовании в решении связи $\rho = A / h^n$ меньше, чем при использовании линейного закона. Надо полагать, это обстоятельство является следствием дополнительной турбулизации потока, возможно, за счет диссоциации и ионизации при высоких температурах. Таким образом, более быстрое выравнивание профиля энтальпии свидетельствует о более интенсивном протекании процессов в области смешения.

Поступила 5 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Моссе А. Л., Эльперин И. Т. Процессы переноса при смешении струй неоднородных газов. Инж. физ. ж., 1967, т. 13, № 6.
2. Вулис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. М., «Наука», 1965.
3. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
4. Burhorn F., Wienecke R. Plasmazusammensetzung, Plasmadichte, Enthalpie und Spezifische Wärme von Wasserstoff und Wasser bei 1,3,10 und 30 atm. in Temperaturbereich zwischen 1000 und 30 000° K. Z. Phys. Chem., 1960, Bd 215, H. 5/6.
5. Burhorn F., Wienecke R. Plasmazusammensetzung, Plasmadichte, Enthalpie und Spezifische Wärme von Sauerstoff bei 1, 3, 10, 30 atm. in Temperaturbereich Zwischen 1000 und 30000° K. Z. Phys. Chem., 1960, Bd 213, H. 1/2.
6. Голубев В. А. Теоретическое исследование турбулентной плоскопараллельной струи высокой температуры с учетом диссоциации и ионизации. Инж. физ. ж., 1961, т. 4, № 6.
7. Görtler H. Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes. ZAMM, 1942, Bd. 22, S. 244.