

## ГЕОМЕХАНИКА

УДК 539.3

### О НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ ГЕОМЕХАНИКИ

**В. Е. Миренков**

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,  
E-mail: mirenikov@misd.nsc.ru, Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Проведен анализ классического решения задачи теории упругости о деформировании плоскости, ослабленной прямолинейным математическим разрезом, расклиниваемым постоянными усилиями. Показана некорректность положений классической механики разрушения для задач, имеющих угловые точки. Построено приближенное решение для деформирования сплошной среды в окрестности разреза в рамках малых деформаций.

*Трещина, решение, бесконечные напряжения, некорректность, ограниченность, нелинейность, метод*

DOI: 10.15372/FTPRPI20180301

Классическое моделирование деформирования тел с угловыми точками дает бесконечные значения напряжений в вершинах [1, 2], т. е. такой подход некорректен вблизи угловых точек, представляющих собой в механическом смысле точки наибольшего интереса. Если считать, что напряжения в окрестности трещины ограничены, то ключевые для механики разрушения понятия коэффициентов интенсивности, высвобожденной энергии,  $j$ -интеграла и др. оказываются лишены содержания, выясняется их надуманность, связанная с некорректными решениями, предположениями, лежащими в основе трактовки описания разрушения.

Поскольку в основе линейной механики разрушения, как утверждается в [1–8], лежит упругое решение, то суждения о том, что для металлов допускается бесконечное решение, а для неметаллических материалов — ограниченное [3], лишены смысла. Введение в рассмотрение некоторой зоны перед вершиной трещины (зона процесса, фиктивная трещина, псевдопластическая зона, переходная зона, размягченная зона и т. п.) не объясняет существа дела [4–7]. Можно утверждать, что ни одна из упомянутых работ не дает теоретическое объяснение проблемы разрушения материалов в рамках упругой модели. Задача о плоскости, ослабленной астроидой, обсуждалась в [8], но никакого решения не приведено. Автор отобразил астроиду на круг, но конформность отображения при этом была нарушена, т. е. не были выполнены положения упругой теории.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-05-00533).

Рассмотрим пластину, ослабленную отверстием, в виде астроиды (рис. 1). Положим, что усилия  $\sigma_0 = \text{const}$  обеспечивают симметрию деформирования. Контур астроиды  $\Gamma_1$  свободен от нагружения, а вырезы на  $\Gamma_2$  с плавным смыканием несут. Эта или любая другая граничная задача для представленной пластины, согласно концепции сингулярности [1–8], имеет бесконечные напряжения в вершинах  $\Gamma_1$  (в вершинах вырезов  $\Gamma_2$ ). На рис. 1б показаны смещения контура  $\Gamma_1$  в окрестности вершины (штриховая линия  $v_1$ ). Если изменить знак  $\sigma_0 = \text{const}$  на противоположный, тогда по той же концепции смещения точек  $\Gamma_1$  будут иметь вид  $v_2$  (рис. 1в).

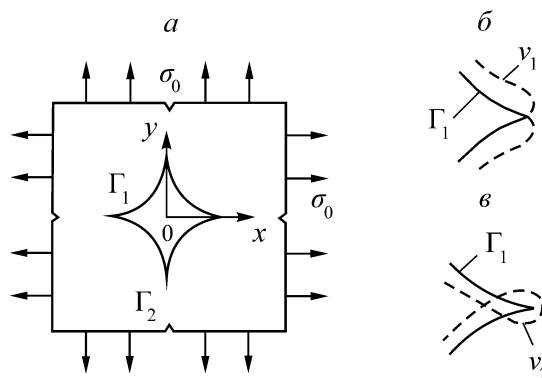


Рис. 1. Схема пластины, ослабленной астройдой (а) и смещения в окрестности вершины (б, в) для различных направлений  $\sigma_0$

**АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ**

Рассмотрим задачу о вдавливании области  $\Omega$  (рис. 2а) в абсолютно жесткую матрицу без трения. Контур области  $\Omega$  будем трактовать как четвертую часть пластины (рис. 1а). Тогда на участках  $ab$  приходим к контактной задаче, где эпюра нормальных напряжений имеет вид, приведенный на рис. 2б, с искомой зоной контакта. Это решение существует, единственно и всюду определено. Сравнение рис. 1б, в и рис. 2б еще раз подчеркивает некорректность классических неопределенных решений. Обратим внимание на то, что для исключения проникновения материала в материал (рис. 1в) необходимо приложить на этом участке некоторые усилия, приводящие к случаю рис. 2б. Область проникновения может служить приближением, оценивающим смещения вершин, которые в рамках малых деформаций, т. е. без отнесения к деформированному состоянию, получить нельзя. На рис. 1б угол, бывший до деформации равным  $2\pi$ , в результате деформации становится равным  $\pi$ , что противоречит основам теории упругости.

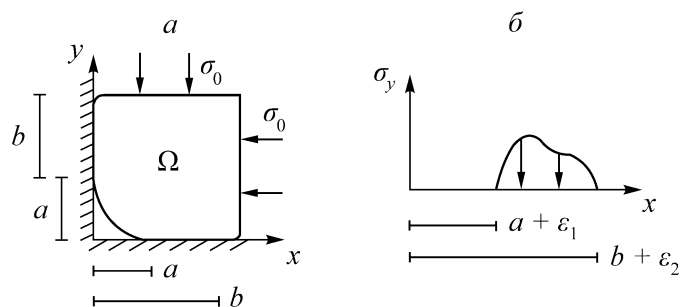


Рис. 2. Схема распределения напряжений на контакте области  $\Omega$  с жесткой границей

Впервые аналитическое решение трех основных задач плоской теории упругости в квадратурах для произвольных областей получено в [9]. Их решение сводится к системе сингулярных интегральных уравнений, связывающих граничные значения компонент напряжений и смещений:

$$\begin{aligned} f(t_0) + 2\mu g(t_0) &= \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) + 2\mu g(t)}{t - t_0} dt, \\ \overline{\kappa f(t_0)} - 2\mu \overline{g(t_0)} &= \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{\kappa f(t)} - 2\mu \overline{g(t)}}{t - t_0} dt - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} [f(t) + 2\mu g(t)] d \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\kappa = 3 - 4\beta$ ;  $\mu = E[2(1 + \beta)]^{-1}$ ,  $\beta$  — коэффициент Пуассона,  $E$  — модуль Юнга;  $t_0$  — аффикс точки границы  $\Gamma$ ;  $i$  — мнимая единица;  $g = u + iv$  ( $u, v$  — компоненты смещений);

$$f(t) = i \int_0^t (X_n + iY_n) ds = f_1 + i f_2, \quad (2)$$

$X_n, Y_n$  — компоненты напряжений в направлении осей  $x$  и  $y$ ; черта над функцией обозначает комплексно-сопряженное значение. Система уравнений (1), (2) единообразно характеризует три основные задачи теории упругости.

Качественный анализ задач для областей с угловыми точками позволил вскрыть причины появления бесконечных решений и дать уверенность в построении ограниченного решения. Такое решение будем строить исходя из новой модели. Под этим понимаем учет минимума условий, которые необходимы для того, чтобы по схеме теории упругости малых деформаций построить приближенное решение. Главным в новой модели является учет подхода, аналогичного для контактной задачи с неизвестной границей, реализуемого в классической схеме расчета (рис. 2б).

Моделирование контактного взаимодействия для задачи Герца — простейший вариант задачи, когда решение относится к деформированному состоянию. Проблема угловых точек — более сложный вариант, когда нужно относить решение к деформированному состоянию. Действительно, угловая точка, как правило, не становится внутренней и определять ее смещения нужно специально. Напряжения в неизвестной зоне определяются более сложно, и влияние граничных условий на них также не связано с главным вектором внешних усилий, как в задаче Герца. Проблема усложняется отсутствием решения контактных задач близкого класса даже при ограничениях на форму контактирующих тел.

Таким образом, задача моделирования контактного взаимодействия для областей с угловыми точками представляется нелинейной и может быть реализована любым доступным методом. Существенным является учет условия непроникновения материала в материал через неизвестную границу (штриховая линия на рис. 1б). Всегда можно выбрать схему решения, связанную с необходимостью учета непроникновения, показать несостоятельность классического подхода и выявить основные факторы, исключаяющие это положение.

### КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ТРЕЩИНЫ

Прежде чем переходить к алгоритму деформирования массива пород с трещиной, необходимо провести анализ классического решения, которое некорректно из-за бесконечных напряжений. Рассмотрим конечный прямолинейный математический разрез длиной  $2a$ , расклиниваемый постоянными усилиями  $\sigma_y = -\sigma_0$ . В силу симметрии деформирования можно исследовать одну полуплоскость, например верхнюю с граничными условиями

$$\sigma_y = -\sigma_0, \quad \tau = 0, \quad 0 \leq |x| \leq a, \quad v(x) = 0, \quad \tau(x) = 0, \quad ax \leq |x| \leq \infty. \quad (3)$$

Для границы области, представляющей полуплоскость, из (1), (2) имеем

$$\sigma_y = -\frac{\kappa-1}{\kappa} \mu u' + \frac{\mu}{\pi} \frac{\kappa+1}{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v'}{t-x} dt, \quad (4)$$

$$\mu u' = \frac{\kappa-1}{4} \sigma_y + \frac{\kappa+1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{t-x} dt, \quad (5)$$

где  $u'$ ,  $v'$  — производные от смещений.

Горизонтальная и вертикальная составляющие граничных условий могут быть также записаны в виде

$$X_n = \sigma_y \cos \alpha + \tau \sin \alpha, \quad Y_n = \tau \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha, \quad (6)$$

где  $\cos \alpha = v' / \sqrt{1+(v')^2}$ ,  $\sin \alpha = 1 / \sqrt{1+(v')^2}$ .

Подставляя (5) в (4) с учетом (3), получим

$$\sigma_y = -\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau}{t-x} dt + \frac{\mu}{\pi} \frac{4}{\kappa+1} \int_{-a}^a \frac{v'}{t-x} dt, \quad (7)$$

т. е.  $\tau(x) = v(x) = 0$  для  $|x| \geq a$ . Частный случай решения задачи для плоскости с разрезом, на берегах которого формулируются граничные условия, имеет вид

$$\sigma_y = -\sigma_0 = \text{const}, \quad \tau = 0. \quad (8)$$

В результате обращения (7) это решение примет вид

$$v'(x) = \sigma_0 \frac{\kappa+1}{4\mu} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad v(x) = -\frac{\kappa+1}{4\mu} \sigma_0 \sqrt{a^2-x^2}. \quad (9)$$

Тогда на деформированном контуре разреза из (6) находим

$$X_n = -\frac{\sigma_0 v'}{\sqrt{1+(v')^2}}, \quad Y_n = -\frac{\sigma_0}{\sqrt{1+(v')^2}}, \quad (10)$$

а главные векторы этих составляющих будут равны

$$X = -\int_0^a \frac{\sigma_0 v'}{\sqrt{1+(v')^2}} \sqrt{1+(v')^2} dx = \sigma_0 v(0), \quad Y = -\int_{-a}^a \frac{\sigma_0}{\sqrt{1+(v')^2}} \sqrt{1+(v')^2} dx = -2a\sigma_0. \quad (11)$$

Таким образом, классическое решение, согласно (11), определяет на деформированном контуре главный вектор, направленный вертикально и равный сформулированному при постановке, т. е.  $-2a\sigma_0$ , но закон распределения по длине разреза, полученный из (10), дает

$$Y_n = -\frac{\sigma_0 \sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2 + \left[ \left( \frac{\kappa+1}{4\mu} \sigma_0 \right)^2 - 1 \right] x^2}}, \quad (12)$$

что существенно отличается от заданного (8)  $\sigma_y = -\sigma_0 = \text{const}$ . Если вертикальная составляющая (12) убывает от значения  $-\sigma_0$  в середине разреза до нуля в вершинах, то горизонтальная составляющая, которой не было при формулировке в классическом решении, возрастает от нуля при

$x=0$  до  $-\sigma_0$  в точке  $x=a$ . Тогда главный вектор горизонтальных усилий (11), действующий на деформированном контуре разреза, не дает угловым точкам сместиться из исходного положения  $x = \pm a$  в новое  $x = \pm b$ , ( $a > b$ ). Необходимо устранить действие этих горизонтальных усилий (10) на точки  $x = \pm a$ , т. е. найти эквивалентное усилие на разрезе.

Отметим, что упругая модель, приводящая к (9), должна быть уточнена. Уточнения могут быть связаны с различными подходами, усложняющими модель. Известные попытки в этом направлении не привели к положительному результату. Рассмотрение структуры материала в окрестности вершин разреза при наличии там пор — сложная и нерешенная проблема. Не вносит ясности и суждение о малости главного вектора  $X$ , определяемого (11), хотя бы потому, что он действует на точку  $x = a$ . Возникает вопрос: какую же задачу моделирует классическое решение? По всей видимости — никакую. Вот такими, не имеющими физического смысла решениями, в интерпретации известных работ, и оперирует, в частности, механика разрушения. Представление разреза эллипсом обеспечивает восприятие бесконечных напряжений, полученных классикой. Если это исключить, точка возврата теряет свое исключительное значение и становится рядовой точкой контура или, точнее, точкой, фиксирующей отрезок на границе полуплоскости. Отметим, что в недеформированном состоянии разрез занимает отрезок  $|x| \leq a$ , в результате деформации, согласно (9), вершины остались на месте  $v(\pm a) = 0$ , т. е. можно считать, что они просто закреплены в точках  $x = \pm a$ . Но если вершины закреплены согласно (9), то в них возникают реакции (такого понятия в теории упругости нет) и они будут бесконечно большими. Деформирование разреза с закрепленными вершинами представляет сложную конструкцию и не может моделировать плоскость с математическим разрезом, раскрываемым нормальными усилиями (8).

### ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ

Построим простое ограниченное всюду решение в рамках малых деформаций, обеспечивающее ту же доступность реализации, как и в [1–8]. Сделаем разрезы по  $b \leq |x| \leq a$ . Под действием эпюры напряжений (рис. 3б) берега трещины разойдутся (штриховая линия на рис. 3а). Действительно, в рамках модели, позволяющей относить деформированное состояние к недеформированному, невозможно снова закрыть разрез на участках  $b \leq |x| \leq a$ , меняя как угодно  $\sigma_y$  и  $a$  за счет горизонтальной составляющей для разреза  $|x| \leq b$ , аналогичной (10). Закрыть разрез можно только при условии задания тех или иных силовых воздействий, например некоторым вариантом аналога контактной задачи. Последнее наиболее просто осуществить, образуя на деформированном контуре (штриховая кривая на рис. 3а) касательные напряжения  $\tau(x)$ , относя их к недеформированному состоянию для  $b \leq |x| \leq a$ . Эти значения  $\tau(x)$  должны нейтрализовать горизонтальные напряжения типа (10). В таком приближении задача реализуема.

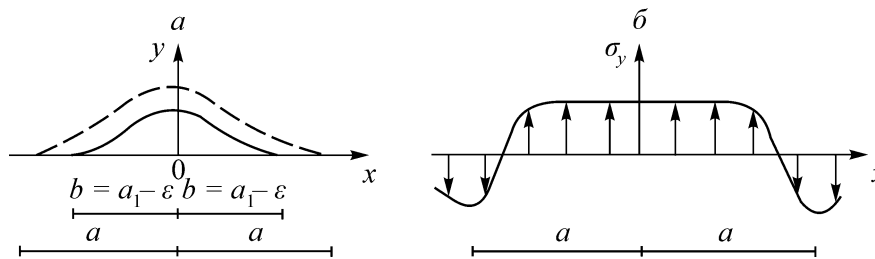


Рис. 3. Схема деформирования контура разреза и эпюра напряжений

Обозначим искомые напряжения  $\sigma_y = \alpha_0 \sigma_0(x-b)$ ,  $\alpha_0 = \text{const}$  для  $b \leq |x| \leq a$ , а на участке  $|x| \leq b$  возьмем их распределение в виде (12), что обеспечит при закрытии разреза непрерывность напряжений и их нулевые значения при  $|x| = \pm b$  (аналог контактных напряжений). Тогда, обращая (7) в предположении  $\tau = 0$ , получим

$$\mu v^1(x) = \frac{\kappa+1}{4\pi} \sqrt{a^2-x^2} \left[ \int_{b \leq |t| \leq a} \frac{\alpha_0 \sigma_0 (t^2-b^2)}{\sqrt{a^2-t^2}} \frac{dt}{t-x} - \int_{-b}^b \frac{\sigma_y}{\sqrt{a^2-t^2}} \frac{dt}{t-x} \right] \quad (13)$$

при условии [10]

$$\int_{b \leq |t| \leq a} \frac{\alpha_0 (x^2-b^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} dx - \int_{-b}^b \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2} \left[ \left( \frac{\kappa+1}{\mu} \sigma_0 \right)^2 - 1 \right]} = 0. \quad (14)$$

Представим деформированный контур разреза, как на геометрию штампов, которые нужно привести в соприкосновение на участках  $b \leq |x| \leq a$ , прикладывая усилия только на этих участках. Из системы (1), (2) дополнительно к (4), (5) имеем

$$\mu v^1(x) = \frac{\kappa-1}{4} \tau(x) + \frac{\kappa+1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_y}{t-x} dt. \quad (15)$$

Рассмотрим плоскость с математическим разрезом, на который действуют только касательные напряжения  $\tau(x)$ , а  $\sigma_y = 0$ , тогда из (15) находим

$$\mu v^1(x) = \frac{\kappa-1}{4} \tau(x). \quad (16)$$

Если к берегам разреза приложить только касательные напряжения, то берега разойдутся. Тогда распределение напряжений, согласно соотношению (16), сможет закрыть разрез на этих участках в рамках малых деформаций.

Таким образом, касательные напряжения, введенные на участках  $b \leq |x| \leq a$ , могут моделировать нелинейность процесса деформирования в окрестности угловых точек и дают возможность использовать аппарат малых деформаций. Следуя классическому решению, на контуре разреза действуют горизонтальные усилия (10), вызывающие деформирование, определяемое (9).

Введем в рассмотрение касательные напряжения  $\tau(x)$ , ( $b \leq |x| \leq a$ ), которые нейтрализуют горизонтальную составляющую (11), препятствующую смещению точек  $x = \pm a$  вдоль оси  $x$ , в виде

$$\tau(x) = \alpha_1 x \sqrt{a^2-x^2}, \quad \alpha_1 = \text{const}, \quad (17)$$

и удовлетворяют равенству  $\int_b^a \tau(x) dx = \sigma_0 v(0)$ . В результате имеем  $\alpha_1 = \sigma_0 v(0) / (\sqrt{a^2-b^2})^3$ .

Из (1) для границы полуплоскости получим производную от горизонтальной составляющей смещений

$$u'(x) = -\frac{\kappa-1}{4\mu} \sigma_y(x) - \frac{\kappa+1}{4\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{t-x} dt.$$

Отсюда при условии (17) и  $\sigma_y = 0$  находим

$$u(x) = -\frac{\kappa-1}{4\pi\mu} \alpha_1 \left( a^2 \pi x + \frac{x^3}{3} \right),$$

тогда

$$u(\pm a) = \mp \frac{\kappa-1}{4\pi\mu} \alpha_1 a^3 \left( \pi + \frac{1}{3} \right),$$

что должно равняться  $a-b$ . В первом приближении примем, что  $v(0)$ , входящее в  $\alpha_1$ , равно  $v(0)$  из (9). Тогда

$$-\frac{\kappa-1}{4\pi\mu} \frac{\sigma_0}{(\sqrt{a^2-b^2})^3} \frac{\kappa+1}{4\mu} \sigma_0 a = a-b,$$

а, если  $a-b = \varepsilon$ , то

$$\varepsilon = \sqrt[5]{\left[ \frac{\kappa-1}{\pi} \left( \frac{\sigma_0}{4\mu} \right)^2 \frac{\kappa+1}{2\sqrt{2}} \right]^2}. \quad (18)$$

Соотношение (18) позволяет, задав  $b$ , получить  $a$  или наоборот. Положим  $b=1$ ,  $\kappa = 3-4\beta$ , коэффициент Пуассона  $\beta = 0.25$ ,  $\sigma_0 / E = 0.01$ , тогда из (18) следует  $a = 1.002$ . По уравнению (14) можно вычислить  $\alpha_0 = 1100$ . Окончательно имеем  $\sigma_y = 1100\sigma_0(x^2-1)$ ,  $b \leq |x| \leq a$ . Концентрация напряжений  $\sigma_y$  при  $x = \pm a$  будет равна  $4.4\sigma_0$ .

Итак, в первом приближении построена эпюра напряжений на математическом разрезе, позволяющая вычислить смещения для  $|x| \leq a$ . Первый цикл приближений на этом заканчивается. Повторяя приведенные выше выкладки, можно получить, используя значения  $v(x)$  из (13), второе приближение для касательных напряжений, значения  $\alpha_1$ ,  $a$  и  $\alpha_0$ , вычислять смещения и т. д. до достижения заданной точности.

В отличие от классической формулировки задачи о деформировании прямолинейного разреза [1–8], когда напряжения на разрезе известны, в новой модели приходится строить первое приближение, используя разные предположения о процессе, но в рамках малых деформаций. Для любых предположений формулировка граничных условий  $\sigma_y(x)$  на разрезе вызовет на деформированном контуре горизонтальную составляющую, которая неизвестна, если неизвестны смещения  $v(x)$ . С этих позиций и построено приближенное решение в условиях малых деформаций. Аппроксимация напряжений  $\tau(x)$  не закроет точно разрез для  $b \leq |x| \leq a$ , но приведет к равенству главных векторов, обеспечивая смещение точек  $x = \pm a$ .

## ВЫВОДЫ

Доказано, что классическое решение задач теории упругости для трещин некорректно и необходимо рассматривать существенно нелинейную формулировку задачи. Исследованы причины возникновения бесконечных напряжений в классических решениях механики разрушения для трещин, что позволяет построить нелинейное решение в рамках малых деформаций и перейти к созданию алгоритма деформирования массива пород с трещиной гидроразрыва.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вычислительные методы** в механике разрушения / под ред. С. Атлури. — М.: Мир, 1990. — 392 с.
2. **Rice J. R.** A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, *J. Appl. Mech.*, 1968, Vol. 35. — P. 379–386.
3. **Duan S., Fujii K., and Nakagawa K.** Finite stress concentrations and  $j$ -integrals from normal loads on a penny-shaped crack, *Engineering Fracture Mechanics*, 1989, Vol. 32, No. 2. — P. 167–176.
4. **Dugdale D. S.** Yielding of steel sheets containing slits, *J. Mech. Phys. Solids*, 1960, Vol. 8. — P. 100–104.
5. **Tasi Y. M.** Ductile penny-shaped crack in a thick transversely isotropic plate, *Int. J. Mech. Sci.*, 1984, Vol. 26. — P. 245–252.
6. **Duan S. and Nakagawa K.** Stress functions with finite stress concentration at the crack tips for a central crack panel, *Eng. Fracture Mech.*, 1988, Vol. 29. — P. 517–526.
7. **Peinhardt H. W.** Plain concrete modeled as elastic strain softening material at fracture, *Eng. Fracture Mech.*, 1985, Vol. 22. — P. 787–796.
8. **Белоносов С. Н.** Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двусвязных областей. — Новосибирск: Наука, 1967. — 402 с.
9. **Миренков В. Е.** Связь напряжений и смещений на контуре выработки // ФТПРПИ. — 1978. — № 3. — С. 19–23.
10. **Мухелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1966. — 606 с.

*Поступила в редакцию 22/III 2018*