

ЛУЧИСТО-КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛОБМЕН В ПЛОСКОМ СЛОЕ  
ПОГЛОЩАЮЩЕЙ ЗАВЕСЫ

С. С. Кутателадзе, Н. А. Рубцов

(Новосибирск)

Рассматривается тепловое состояние плоского слоя серого газа, вдуваемого в турбулентный поток высокотемпературного газа, обтекающего проницаемую пластину.

С подобными рода постановками задач приходится сталкиваться как при рассмотрении течения в окрестности лобовой точки, так и при анализе отеснения пограничного слоя интенсивным вдувом через пористую пластину [1]. Предлагаемое рассмотрение дается применительно к следующей идеализированной постановке задачи (фиг. 1, а).

В плоском слое серой поглощающей среды, образованном плоско-параллельными диффузно-излучающими поверхностями (1 — пористая пластина, 2 — граница высокотемпературного турбулентного потока газов), перенос тепла осуществляется излучением, конвекцией, нормально ориентированной к поверхностям слоя, и молекулярной теплопроводностью. Все физические и оптические свойства среды и граничных поверхностей предполагаются постоянными, независимыми от температуры.

Температура обтекаемой поверхности образца, равно как и некоторой фиктивной поверхности, определяющей верхнюю границу зоны отеснения, задана.

Предполагается заданной также скорость движения вдуваемой среды, которая на протяжении всего слоя отеснения считается постоянной. Подобная идеализация существенно облегчает рассмотрение задачи, не нарушая ее принципиальных особенностей.

Весьма упрощенно рассмотрение такой задачи дано в работе [2]. Частный случай среды с малыми значениями оптической плотности представлен в [3, 4].

В предположении, что молекулярная теплопроводность среды пренебрежимо мала, задача рассматривалась в работе [5].

В рассматриваемой постановке обобщенное уравнение энергии имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{q}_r + \operatorname{div} \mathbf{q}_k + \operatorname{div} \mathbf{E}_{4\pi} = 0 \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{q}_r$ ,  $\mathbf{q}_k$  — векторы потока тепла молекулярной теплопроводностью и конвекцией,  $\mathbf{E}_{4\pi}$  — сферический вектор потока тепла излучением

$$\operatorname{div} \mathbf{q}_r = -\lambda \nabla^2 T, \operatorname{div} \mathbf{q}_k = \rho c_p (W, \operatorname{grad} T), \operatorname{div} \mathbf{E}_{4\pi} = -\eta$$

где  $\eta$  — результирующая плотность объемного излучения.

Принимая во внимание одномерный характер переноса тепла, а также учитывая, что в этом случае  $-\eta = dE/dy$ , имеем

$$\rho_1 c_{p_1} w_1 \frac{dT}{dy} = \lambda \frac{d^2 T}{dy^2} - \frac{dE}{dy} \quad (2)$$

при граничных условиях

$$T = T_1, y = 0; T = T_2, y = \delta \quad (3)$$

Здесь  $E$  — результирующая плотность полусферического излучения. Заметим, что в уравнении (2)  $w_1 = \text{const}$  в пределах слоя отеснения. Это утверждение достаточно хорошо подтверждается экспериментальным материалом. Поставленная краевая задача приводится к сложному функ-

циональному уравнению для безразмерного температурного поля  $\theta = f(h)$  с характерными параметрами  $N_{B0}$  и  $N_{\lambda\kappa}$

$$N_{B0} \frac{d\theta}{dh} = N_{\lambda\kappa} \frac{d^2\theta}{dh^2} - \frac{1}{4} \frac{d\Phi}{dh} \quad (4)$$

$$\theta = \theta_1, \quad h = 0; \quad \theta = \theta_2, \quad h = h_0 \quad (h = \kappa y, \quad h_0 = \kappa \delta) \quad (5)$$

$$\left( \theta = \theta(h) = \frac{T}{T_*}, \quad \Phi = \frac{E}{\sigma_0 T_*^4}, \quad N_{B0} = \frac{c_{\mu i}^{0,1} w_1}{4\sigma_0 T_*^3}, \quad N_{\lambda\kappa} = \frac{\lambda\kappa}{4\sigma_0 T_*^3}, \quad \xi = \frac{y}{\delta} = \frac{h}{h_0} \right)$$

Здесь  $\theta$  — безразмерная температура;  $\Phi$  — безразмерная плотность результирующего потока тепла;  $h, h_0$  — оптическая глубина и толщина слоя;  $N_{B0}$  — безразмерный параметр, характеризующий лучисто-конвективное соотношение в суммарном потоке тепла (критерий Больцмана);  $N_{\lambda\kappa}$  — безразмерный параметр, характеризующий лучисто-кондуктивное соотношение в суммарном потоке тепла;  $T_*$  — некоторая характерная определяющая температура;  $\kappa$  — коэффициент поглощения излучения;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности среды.

Полусферическая плотность результирующего излучения  $E(h)$  применительно к рассматриваемому слою серой нерассеивающей среды определяется интегральным соотношением [6]

$$E(h) = 2A_1(h)E_{0,1} - 2A_2(h)E_{0,2} + 2 \int_0^h E_0(\xi) \Psi(h, \xi) d\xi - 2 \int_h^{h_0} E_0(\xi) \Psi(\xi, h) d\xi$$

$$\Psi(h, \xi) = K_2(h - \xi) + 2A_1(h) \frac{R_1}{A_1} K_2(\xi) - 2A_2(h) \frac{R_2}{A_2} K_2(h_0 - \xi) \quad (7)$$

$$\Psi(\xi, h) = K_2(\xi - h) - 2A_1(h) \frac{R_1}{A_1} K_2(\xi) + 2A_2(h) \frac{R_2}{A_2} K_2(h_0 - \xi) \quad (8)$$

$$A_1(h) = \frac{A_1}{D} (K_3(h) - 2R_2 K_3(h_0) K_3(h_0 - h))$$

$$A_2(h) = \frac{A_2}{D} (K_3(h_0 - h) - 2R_1 K_3(h_0) K_3(h)) \quad (9)$$

$$\left( K_n(x) = \int_0^1 \exp \frac{-x}{\mu} \mu^{n-1} \frac{d\mu}{\mu}, \quad D = 1 - 4R_1 R_2 K_3^2(h_0), \quad E_{0,i} = \sigma_0 T_i^4 \right)$$

Здесь  $A_i = 1 - R_i$  — поглощательная ( $R_i$  — отражательная) способность граничных поверхностей слоя вдуваемого газа;  $E_{0,i}$  — полусферическая плотность равновесного (черного) излучения;  $i = 1, 2$ .

В реальных условиях поверхность 2, представляющая собой воображаемую, фиктивную, поверхность раздела некоторого полубесконечного слоя высокотемпературного газа и вдуваемого слоя оптически плотного газа, ближе по своим оптическим свойствам к неотражающей поверхности абсолютно черного тела (турбулентное ядро).

Эти обстоятельства будут учтены ниже в конкретных анализах, где предполагается, что  $R_2 \equiv 0$ ,  $A_2 = 1$ , либо  $A_2 = \varepsilon_2$ , где  $\varepsilon_2$  — степень черноты набегающего потока газов. Тем не менее, для общности рассуждений оставляем в силе ранее принятую схему излучающей системы с серыми граничными поверхностями. В связи с этим, в дальнейшем принимается во внимание выражение для  $E(h)$ , представленное в форме интегрального соотношения (6).

Интегрируя (4) почленно и принимая во внимание стационарный характер процессов теплообмена, получаем

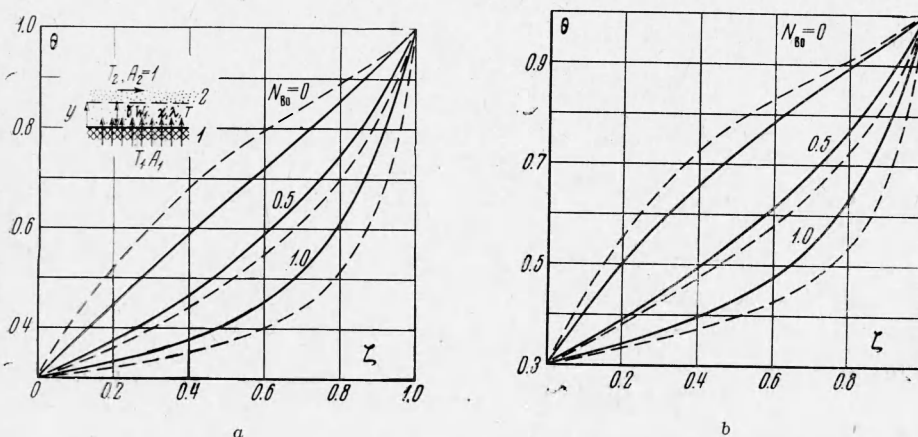
$$q = 4N_{B0}\theta - 4N_{\lambda\kappa} \frac{d\theta}{dh} + \Phi(h) \quad \left( q = \frac{q^\circ}{\sigma_0 T_*^4} \right) \quad (10)$$

Здесь  $q$  — безразмерный суммарный тепловой поток.

Интегрируя (10) по  $h$  в пределах от 0 до  $h_0$ , а также принимая во внимание граничные условия (5), получаем выражение для определения суммарного значения безразмерного потока тепла

$$q = \frac{4}{h_0} \left\{ N_{\lambda x} (\theta_1 - \theta_2) + N_{B0} \int_0^{h_0} \theta(h) dh + \frac{1}{4} \int_0^{h_0} \Phi(h) dh \right\} \quad (11)$$

При вычислении второго интеграла следует иметь в виду соотношение (6) и соответствующее правило интегрирования под знаком интеграла.



Фиг. 1. Безразмерное температурное распределение в слое завесы для различных значений  $N_{B0}$  с  $\theta_1 = 0.3$ ,  $\theta_2 = 1.0$ ,  $N_{\lambda x} = 0.1$ ,  $A_1 = A_2 = 1.0$  и при оптической плотности (а)  $h_0 = 0.5$  (сплошные кривые),  $h_0 = 1.0$  (штриховые кривые), (б)  $h_0 = 2.0$  (сплошные кривые),  $h_0 = 3.0$

После ряда преобразований уравнение (11) записывается в следующем виде:

$$q = b(h_0) + \frac{2}{h_0} \int_0^{h_0} (2N_{B0}\theta(h) + \Psi(h_0 h)\theta^4(h)) dh \quad (12)$$

$$(b(h_0) = 4h_0^{-1}(N_{\lambda x}(\theta_1 - \theta_2) + 1/2(A_1(h_0)\theta_1^4 - A_2(h_0)\theta_2^4)))$$

Здесь

$$\Psi(h_0, h) = K_3(h) - K_3(h_0 - h) + 2A_1(h_0) \frac{R_1}{A_1} K_2(h) - 2A_2(h_0) \frac{R_2}{A_2} K_2(h_0 - h) \quad (13)$$

$$A_1(h_0) = \frac{A_1}{D} \left( \frac{1}{3} - K_4(h_0) \right) (1 - 2R_2 K_3(h_0)),$$

$$A_2(h_0) = \frac{A_2}{D} \left( \frac{1}{3} - K_4(h_0) \right) (1 - 2R_1 K_3(h_0)) \quad (14)$$

Уравнение (12) позволяет вычислять суммарное значение теплового потока по поверхности проницаемой пластины, обтекаемой турбулентным потоком высокотемпературного излучающего газа, в случае когда известно температурное распределение в слое вдуваемого газа.

Определение последнего составляет основное содержание краевой задачи (4), (5), решение которой сводится к последующему формальному

интегрированию (10) по  $h$  в пределах от 0 до  $h$

$$4N_{B0} \int_0^h \theta(\zeta) d\zeta - 4N_{\lambda x} (\theta(h) - \theta_1) + \int_0^h \Phi(\zeta) d\zeta = qh \quad (15)$$

Используя (12), а также проводя серию аналогичных преобразований, сводим (15) к сложному нелинейному интегральному уравнению относительно безразмерной температуры

$$\theta(h) = a(h) + \frac{1}{2N_{\lambda x}} \int_0^{h_0} \left( 2N_{B0} \left( \delta - \frac{h}{h_0} \right) \theta(\zeta) + G(h, \zeta) \theta^4(\zeta) \right) d\zeta \quad (16)$$

Здесь

$$\delta = 1 \quad (\zeta < h), \quad \delta = 0 \quad (\zeta > h)$$

$$a(h) = \theta_1 + \frac{\theta_2 - \theta_1}{h_0} h + \frac{1}{2N_{\lambda x}} \left( \frac{A_1}{D} \theta_1^4 \chi_1(h) + \frac{A_2}{D} \theta_2^4 \chi_2(h) \right) \quad (17)$$

$$G(h, \zeta) = K_3(\zeta) - K_3|h - \zeta| + \frac{h}{h_0} (K_3(h_0 - \zeta) - K_3(\zeta)) + \\ + 2 \frac{R_1}{D} \chi_1(h) K_2(\zeta) + 2 \frac{R_2}{D} \chi_2(h) K_2(h_0 - \zeta) \quad (18)$$

$$\chi_1(h) = \frac{1}{3} - K_4(h) - h_0^{-1} h \left( \frac{1}{3} - K_4(h_0) \right) + 2R_2 K_3(h_0) [K_4(h_0) - \\ - K_4(h_0 - h) + h_0^{-1} h \left( \frac{1}{3} - K_4(h_0) \right)] \quad (19)$$

$$\chi_2(h) = K_4(h_0) - K_4(h_0 - h) + h_0^{-1} h \left( \frac{1}{3} - K_4(h_0) \right) + 2R_1 K_3(h_0) \times \\ \times \left[ \frac{1}{3} - K_4(h) - h_0^{-1} h \left( \frac{1}{3} - K_4(h_0) \right) \right] \quad (20)$$

Совершенно очевидно, что аналитическое рассмотрение решения интегрального уравнения (16), равно как и вычисление соответствующих квадратур в (12) весьма затруднительно. В этой связи весь дальнейший анализ задачи проводится с привлечением численных методов решения, а также некоторых упрощенных приемов, касающихся определения наиболее консервативной интегральной функции суммарного теплового потока.

Интегральное уравнение (16) аппроксимируется системой нелинейных алгебраических уравнений, которая решается численно методом Ньютона. При этом соответствующие интегралы аппроксимируются при помощи квадратурной формулы Гаусса.

В связи с характерными особенностями подынтегральных выражений в (16), проявляющихся при их дискретном представлении в граничных областях, интегральное уравнение (16) представляется целесообразным записывать в следующем виде:

$$\theta(h) = \left\{ a(h) + \frac{N_{B0}}{N_{\lambda x}} \int_0^{h_0} \left[ \delta (\theta(\zeta) - \theta(h)) - \frac{h}{h_0} \theta(\zeta) \right] d\zeta + \right. \\ \left. + \frac{1}{2N_{\lambda x}} \int_0^{h_0} \theta^4(\zeta) G(h, \zeta) d\zeta \right\} \left( 1 - h \frac{N_{B0}}{N_{\lambda x}} \right)^{-1} \quad (21)$$

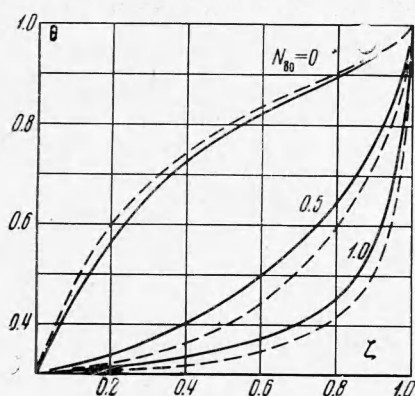
Некоторые результаты решения (21), применительно к разнообразным вариантам значений параметров, характеризующих оптические свойства пористой пластины  $R_1$  (при  $R_2 = 0$ ), оптические свойства среды  $h_0$ , интенсивность  $N_{B0}$  вдува поглощающего газа, а также лучисто-кондуктивное соотношение  $N_{\lambda x}$  в суммарном переносе тепла, представлены ниже.

На фиг. 1, 2 изображены безразмерные значения температурных полей в слое завесы, когда поверхность пористой пластины является абсолютно черной,  $\theta_1 = 0.3$ ,  $\theta_2 = 1.0$ , а параметр лучисто-кондуктивного соотношения  $N_{\lambda x} = 0.1$  свидетельствует о том, что роль молекулярной теплопроводности в переносе тепла не является пренебрежимой.

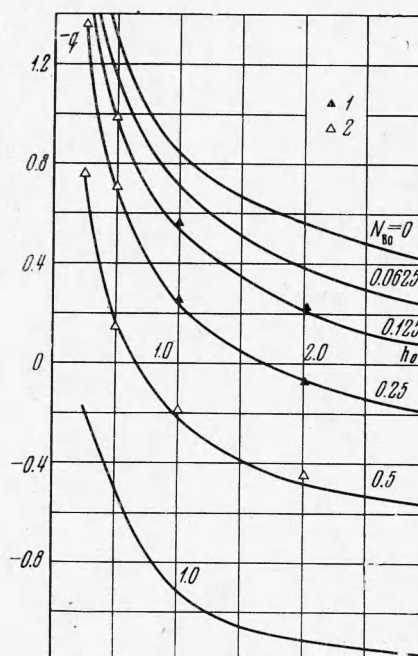
В случае малых значений критерия  $N_{B0}$ , отображающих слабые вдувы, характер температурного распределения во многом напоминает температурные поля в слое поглощающей среды, обладающей молекулярной теплопроводностью. Однако и в этом случае отмечается влияние слабого вдува на снижение температурного уровня завесы.

С ростом оптической плотности завесы отмечается некоторое повышение температуры в основной части слоя, примыкающей к охлаждаемой поверхности, а также соответствующее понижение в области, примыкающей к горячей поверхности (фиг. 1, в), по сравнению с тем распределением, которое устанавливается в слое слабо поглощающего газа.

При этом с ростом интенсивности вдува картина меняется с той существенной разницей, что область, примыкающая к горячему газу, настолько развивается, что температура оптически плотного газа (фиг. 1, в) оказывается ниже, чем в слое газа, поглощающего слабее, по всему слою завесы. Осуществляется своеобразное высвечи-



Фиг. 2. Безразмерное температурное распределение в слое завесы с  $\theta_1 = 0.3$ ,  $\theta_2 = 1.0$ ,  $N_{\lambda,ж} = 0.1$ ,  $A_1 = 0.2$ ,  $A_2 = 1.0$  и оптической плотностью  $h_0 = 0.5$  (сплошные кривые) и  $h_0 = 1.0$  (штриховые кривые) для различных значений  $N_{B0}$



Фиг. 3. Зависимость безразмерного значения суммарного потока тепла  $q$  от оптической плотности слоя для различных значений  $N_{B0}$  ( $\theta_1 = 0.3$ ,  $\theta_2 = 1.0$ ,  $N_{\lambda,ж} = 0.1$ ,  $A_1 = A_2 = 1.0$ ); точки 1 вычислены по формуле (27), точки 2 — по формуле (28)

вание газа в область холодного слоя. Это становится особенно заметным в слое газа с оптической плотностью  $h_0 \approx 1.0$ , когда эффекты взаимодействия в среде оказываются наибольшими.

В случае, когда поверхность пористой пластины обладает высокой отражательной способностью, общая картина температурного распределения сохраняется, однако уровень температур повышается за счет эффектов граничного отражения. При этом особый подъем температур отмечается в области, прилегающей к поверхности отражения (фиг. 2). Таким образом, постановка пористой пластины с высоким значением отражательной способности ее поверхности, помимо эффекта прямой тепловой защиты от излучения, сопровождается определенным повышением температуры продуваемого через слой оптически плотного газа.

На фиг. 3 представлена зависимость безразмерного значения суммарного потока тепла от оптической плотности слоя для разнообразных значений критерия  $N_{B0}$ . Как и следовало ожидать с ростом критерия  $N_{B0}$ , характеризующего интенсивность вдува, суммарное значение безразмерного потока тепла, при определенных значениях  $h_0$  и  $N_{B0}$ , меняет знак на обратный. Другими словами поверхность пористой пластины из теплопринимающей превращается в теплоотдающую. При определенных условиях результирующий перенос тепла в слое оказывается тождественно равным нулю ( $q = 0$ ). На фиг. 4 построена зависимость  $N_{B0} = f(h_0)$ , характеризующая вдув поглощающего газа, потребный для поддержания указанного теплоизолированного состояния, в зависимости от его оптической плотности.

Следует обратить внимание на резко выраженный характер зависимости критерия  $N_{B0}$  от  $h_0$  в области относительно слабо поглощающего газа, когда незначительное присутствие в газе поглощающей компоненты позволяет весьма заметно понизить расход вдуваемого газа. Эффективной оказывается организация высокоотражающей поверхности (фиг. 4). при условии, что оптическая плотность вдуваемого газа  $h_0 < 1.0$ .

Практический интерес представляют упрощенные подходы, позволяющие проводить приближенные анализы теплообмена в области линии отнесения пограничного слоя от поверхности проницаемой пластины. Указанный подход основан на определении суммарного результирующего потока тепла  $q$ , который, будучи интегральной функцией температурного распределения, оказывается

в достаточной степени консервативным понятием, чтобы при его определении было использовано приближенное, но достаточно разумное, распределение температур.

Строго говоря, решение (12) определяет значения суммарного потока тепла  $q$  по поверхности пористой пластины. Будучи постоянным в любом сечении слоя поток  $q$ , составленный из кондуктивной, конвективной и лучистой составляющих, перераспределяет значения своих составляющих в полном соответствии с температурным распределением и ролью того или иного вида теплового переноса. Следует обратить внимание на аддитивную форму записи выражения (12) для  $q$ , где, в отличие от решения для вычисления локальных  $q$ , присутствует член, отображающий молекулярную теплопроводность в свободном виде. Это несколько снижает погрешность, связанную с привлечением приближенных температурных распределений.

Используя линейное распределение для равновесного излучения

$$\theta^4(h) = \theta_1^4 + (\theta_2^4 - \theta_1^4)h/h_0 \quad (22)$$

в определении лучистой составляющей суммарного потока тепла, выражение для  $q$  записывается в следующем виде:

$$q = -\frac{4N_{\lambda\kappa}}{h_0}(\theta_2 - \theta_1) + \frac{4N_{B0}}{h_0} \int_0^{h_0} \theta(h) dh - A_{12}(h_0)(\theta_2^4 - \theta_1^4) \quad (23)$$

Здесь  $A_{12}(h_0)$  — разрешающий оптико-геометрический функционал, который в общем случае серых граничных поверхностей имеет вид

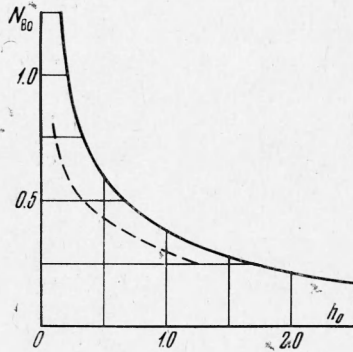
$$A_{12}(h_0) = 2h_0^{-1}(2/3 - h_0^{-1}(1/2 - 2K_5(h_0) + 2(1/3 - K_4(h_0))(A_1(h_0)R_1 + A_2(h_0)R_2))) \quad (24)$$

Определение конвективной составляющей потока во многом определяется аппроксимацией температурного распределения в слое. Использование в качестве аппроксимирующего решения (21) в диатермической среде

$$\theta(h) = \theta_1 + (\theta_2 - \theta_1) \frac{e^{Nh} - 1}{e^{Nh_0} - 1} \quad \left(N = \frac{N_{B0}}{N_{\lambda\kappa}}\right) \quad (25)$$

оказалось мало пригодным. Более эффективным представляется построение приближенных решений, работающих в определенных диапазонах значений  $N_{B0}$ .

При  $N_{B0} \leq 0.25$ , когда динамические эффекты конвективного переноса оказываются одного порядка с лучисто-кондуктивными ( $N \sim 1.0$ ), температурное распределение в слое в значительной мере определяется интенсивно взаимодействующим со средой лучистым переносом тепла.



Фиг. 4. Зависимость  $N_{B0}$  от оптической плотности слоя  $h_0$  при  $q = 0$ ,  $\theta_1 = 0.3$ ,  $\theta_2 = 1.0$ ,  $N_{\lambda\kappa} = 0.1$  и соответственно  $A_1 = A_2 = 1.0$  (сплошная кривая) и  $A_1 = 0.2$ ,  $A_2 = 1.0$  (штриховая кривая)

В этом случае при определении конвективной составляющей  $q$  в (23) можно воспользоваться аппроксимацией температурного распределения, определяемого как среднее арифметическое распределений в неподвижной, интенсивно поглощающей

$$\theta(h) \approx \theta_1 + (\theta_2 - \theta_1) \frac{1 - K_2(h)}{1 - K_2(h_0)} \quad (26)$$

и движущейся, слабо поглощающей, (25), средах.

Получаемая при этом формула, будучи представленная в следующем виде:

$$q = 4N_{B0} \left\{ \theta_1 - \frac{1}{2} \left[ (e^{Nh_0} - 1)^{-1} + \frac{1}{h_0} \left( \frac{1}{N} - \frac{h_0 - (1/2 - K_2(h_0))}{1 - K_2(h_0)} \right) \right] (\theta_2 - \theta_1) \right\} - A_{12}(h_0) (\theta_2^4 - \theta_1^4) \quad (27)$$

справедлива при  $h_0 \geq 1.0$  и  $N_{B0} \leq 0.4$ .

При  $N_{B0} \geq 0.4$  и  $h_0 \leq 1.0$  лучше воспользоваться приближенным выражением, конвективная составляющая которого определена в приближении температурного распределения, определяемого как среднее арифметическое распределений неподвижной и движущейся слабо поглощающих сред

$$q = 4N_{B0} \left\{ \frac{1}{4} (\theta_2 + 3\theta_1) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Nh_0} + (e^{Nh_0} - 1)^{-1} \right) (\theta_2 - \theta_1) \right\} - A_{12}(h_0) (\theta_2^4 - \theta_1^4). \quad (28)$$

Результаты расчетов по формулам (27) и (28) хорошо согласуются с результатами численного решения (12) (погрешность не превышает 5%). В оптически слабых средах степень согласования расчетов по формуле (28) увеличивается (фиг. 3). Следует обратить внимание на то обстоятельство, что подобное построение приближенных решений, будучи тривиальным по своей идее, отличается достаточной сложностью в связи с одновременным рассмотрением трех составляющих результирующего переноса тепла.

Поступила 13 VIII 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое СО АН СССР, Новосибирск, Ин-т теплофизики, 1964.
2. Ш о р и н С. Н. Лучистый теплообмен в поглощающей среде. Изв. АН СССР, ОТН, 1951, № 3.
3. G o u l a r d R., G o u l a r d M. One-dimensional energy transfer in Radiant Media. Jnt. J. Heat Mass Transfer, 1960, vol. 1, No. 1.
4. G o u l a r d R. The coupling of radiation and convection in detached shock layer. J. Quantit. spectrosc. Radiat. Transfer, 1961, vol. 1, No 3—4.
5. А д р и а н о в В. Н. Лучистый теплообмен в плоском слое движущейся среды. В сб.: «Тепло- и массоперенос», Минск, «Наука и техника», 1965, т. 2.
6. Р у б ц о в Н. А. К переносу теплового излучения в плоском слое поглощающей среды. ПМТФ, 1965, № 5.