

где a_i — амплитуды образующихся солитонов, а t_* и η_* соответствуют моменту отрыва солитонов от хвоста. Из (4.8), (3.13) и (4.9) следует, что отбрасываемые члены будут порядка μ^* для любых $t \rightarrow \infty$.

Отметим, что аналогичное рассмотрение сферических волн ($k = 2$), которые имеют место, например, в невязкой жидкости с пузырьками газа, приводит к уравнению

$$(4.10) \quad U_t + UU_\eta + U_{\eta\eta\eta} - \mu^* \tau \left(U + \frac{1}{2} \eta U_\eta \right) = 0,$$

из которого следует, что волны типа солитонов могут существовать только для $\tau < 1/\mu^*$. С математической точки зрения это является следствием того факта, что в отличие от осесимметричного случая, для которого автомодельное решение (4.5), (4.6) удовлетворяет закону сохранения энергии (4.7), имеющему место для плоского уравнения КДВ, такое соответствие для сферического случая не существует. Требование того, чтобы уравнение нулевого приближения было уравнением КДВ и закон сохранения энергии для U_0 имел вид (4.7), приводит в сферическом случае к замене

$$h_0(\tau, x) = \frac{1}{(\mu^* \tau)^{4/3}} U \left(\frac{x}{(\mu^* \tau)^{2/3}}, t(\tau) \right),$$

следствием которой и является уравнение (4.10).

В заключение отметим, что асимптотика расходящихся осесимметричных волн, полученная в работах [5, 6], является неверной, поскольку для нее энергия в волне не сохраняется, а растет как $\tau^{1/4}$.

Поступила 8 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Луговцов А. А., Луговцов Б. А. Исследование осесимметричных длинных волн в приближении КДВ. — В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 1. Новосибирск, Наука, 1969.
2. Карман В. А. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., Наука, 1973.
3. Островский Л. А. Приближенные методы в теории нелинейных волн. — Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1974, т. 17, № 4.
4. Whitham G. B. A general approach to linear and nonlinear dispersive waves using a Lagrangian. — J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, N 2.
5. Иорданский С. В. Об асимптотике осесимметричной расходящейся волны в тяжелой жидкости. — ДАН СССР, 1959, т. 125, № 6.
6. Дорфман А. А. Осесимметричная задача о неустановившихся длинных волнах конечной амплитуды, вызванных перемещениями дна бассейна. — В кн.: Теоретические и экспериментальные исследования по проблеме цунами. М., Наука, 1977.

УДК 532.593

ПРИБЛИЖЕНИЕ «МЕЛКОЙ ВОДЫ» ДЛЯ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В. Ю. Ляпидевский
(Новосибирск)

Введение. В работе производится моделирование системы уравнений, описывающей плоские нестационарные движения идеальной несжимаемой жидкости в канале. Для определенного класса течений, например с симметричным профилем скорости, уравнения сведены к одномерной нестационарной системе. Следует отметить, что полученная нелинейная система уравнений

в зависимости от решения может иметь как эллиптический, так и гиперболический тип. Возникает вопрос о корректности задачи Коши для рассматриваемых уравнений [1].

Показано, что течение, соответствующее случаю эллиптичности, неустойчиво по отношению к малым возмущениям. Под устойчивостью понимаем устойчивость линеаризованной системы на установившемся течении с прямолинейными линиями тока. Развитие неустойчивости Кельвина — Гельмгольца приводит к перемешиванию слоев жидкости и переходу к устойчивому профилю скорости.

На основе указанного механизма перемешивания в работе предлагается модель потенциального движения двух слоев жидкости с вихревой областью между ними. Выбор профиля скорости в поперечном сечении канала основан на принципе минимизации потерь энергии при переходе к устойчивому течению и осуществляется при помощи законов сохранения массы и импульса. В качестве примера возможности однозначной перестройки профиля скорости рассмотрено течение жидкости над уступом. Учет сдвиговой неустойчивости запрещает появление в рассматриваемых решениях областей эллиптичности и приводит к необходимости изучения задачи Коши для гиперболических систем уравнений с ограничениями.

1. Рассмотрим плоскопараллельное течение идеальной несжимаемой жидкости в канале, ограниченном сверху и снизу горизонтальными непроницаемыми стенками. Жидкость заполняет весь канал, поэтому движение определяется начальным распределением скорости. Течение описывается системой уравнений Эйлера

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u_t + uu_x + wu_y + p_x^* &= 0, & -\infty < x < \infty, \\ w_t + ww_x + ww_y + p_y^* &= 0, & -H < y < H, \\ u_x + w_y &= 0, & t > 0, \end{aligned}$$

где u, w — координаты вектора скорости; $p^* = p + gy$ — «модифицированное» давление; g — ускорение силы тяжести. На границах $y = \pm H$ заданы условия непротекания

$$(1.2) \quad w|_{y=-H} = w|_{y=H} = 0.$$

При описании «плавных» течений, в которых существенное изменение параметров движения происходит на расстояниях, значительно превышающих толщину канала, большое распространение получило приближение «мелкой воды». Это приближение состоит в отбрасывании из уравнений Эйлера членов, описывающих вертикальные ускорения, что приводит к гидростатическому распределению давления. Формально уравнения можно получить при помощи следующего растяжения зависимых и независимых переменных в системе (1.1) [2]:

$$x \rightarrow x, \quad y \rightarrow \varepsilon y, \quad t \rightarrow \varepsilon^{-1/2} t, \quad u \rightarrow \varepsilon u, \quad v \rightarrow \varepsilon^{3/2} v, \quad p \rightarrow \varepsilon p.$$

Удерживая в (1.1) члены одного порядка по ε , приходим к системе

$$(1.3) \quad \begin{aligned} u_t + uu_x + wu_y + p_x^* &= 0, \\ u_x + w_y &= 0, \quad p_y^* = 0. \end{aligned}$$

Без ограничения общности будем считать, что $H = 1$. Условия непротекания (1.2) остаются без изменений $w|_{y=-1} = w|_{y=1} = 0$. Из (1.3) следует, что давление не зависит от y , т. е. $p^* = p^*(t, x)$, и функция $\omega = u_y$ удовлетворяет уравнению

$$(1.4) \quad \omega_t + u\omega_x + w\omega_y = 0.$$

Таким образом, величина ω сохраняется вдоль траекторий решения (1.3) аналогично ненулевой компоненте вихря в решениях системы (1.1). Воспользуемся этим свойством для упрощения системы (1.3).

Рассмотрим непрерывное решение (1.3) с линиями слабого разрыва $y = h \pm \eta$, где $\eta \geq 0$, h, η — гладкие функции от t, x . Пусть $\omega(t, x, y) = 0$ вне слоя $h - \eta \leq y \leq h + \eta$. Это соответствует потенциальности течения в окрестности стенок $y = \pm 1$. Заметим, что в области потенциальности течения $u = u(t, x)$. Для средней скорости и интенсивности вихревого слоя введем следующие обозначения: $v = 1/2(u|_{y=h-\eta} + u|_{y=h+\eta})$, $\gamma = 1/2(u|_{y=h+\eta} - u|_{y=h-\eta})$. Величины v, γ, h, η в силу (1.3) удовлетворяют уравнениям

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \gamma_t + (\gamma v)_x &= 0, \\ \omega^+[(1 - h - \eta)_t + ((1 - h - \eta)(v + \gamma))_x] &= 0, \\ \omega^-[(1 + h - \eta)_t + ((1 + h - \eta)(v - \gamma))_x] &= 0, \end{aligned}$$

где ω^\pm — скачки функции ω на линиях $y = h \pm \eta$. Первое уравнение представляет собой разность импульсов для функций $u = u|_{y=\pm 1}$. Два других уравнения возникают из условий на слабом разрыве и на стенках интегрированием уравнения неразрывности. Для того чтобы замкнуть систему уравнений (1.5), введем среднюю завихренность $\bar{\omega} = \gamma/\eta$. Используя условие постоянства расхода по сечению канала

$$\int_{-1}^1 u(t, x, y) dy = q(t),$$

получаем уравнение

$$\bar{\omega}_t + v\bar{\omega}_x + \frac{\bar{\omega}}{\eta} \left(\eta v - \frac{1}{2} \int_{h-\eta}^{h+\eta} u dy \right)_x = 0.$$

Если мгновенный профиль скорости удовлетворяет условию

$$(1.6) \quad v = \frac{1}{2\eta} \int_{h-\eta}^{h+\eta} u dy,$$

то к системе (1.5) добавляется уравнение

$$(1.7) \quad \bar{\omega}_t + v\bar{\omega}_x = 0.$$

В частности, если $\bar{\omega} \equiv \text{const}$ при $|y - h| < \eta$, то (1.6) выполнено и $\omega = \bar{\omega}$. Заметим, что в силу (1.4) достаточно потребовать, чтобы $\bar{\omega} \equiv \text{const}$ при $t = 0$, и это свойство будет выполнено для всех $t > 0$.

Рассмотрим систему (1.5), (1.7) с $\omega(t, x) = \bar{\omega}(t, x)$. Тогда $q(t) = 2(v - \gamma h)$ и система принимает вид

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \eta_t + (1/2\eta q + \omega\eta^2 h)_x &= 0, \\ h_t + (1/2 h q + \omega\eta(\eta + h^2 - 1))_x &= 0, \quad \omega_t + v\omega_x = 0. \end{aligned}$$

Характеристиками системы являются линии

$$dx/dt = \lambda_i(t, x), \quad i = 0, 1, 2,$$

где $\lambda_0 = v$, $\lambda_{1,2} = v + \gamma h \pm \gamma \sqrt{2\eta + h^2 - 1}$. Условие гиперболичности системы (1.8) выражается неравенством

$$(1.9) \quad \eta \geq 1/2(1 - h^2).$$

Для уравнений (1.8) разумной задачей является задача Коши, и, таким образом, возникает необходимость исследования корректности задачи Коши для нелинейной системы уравнений, меняющей свой тип в зависимости от решения.

Выход из создавшегося затруднительного положения намечен ниже. Будет показано, что неравенство (1.9) характеризует устойчивость течения с соответствующим профилем скорости по отношению к малым возмущениям. Развитие сдвиговой неустойчивости течения при нарушении условия (1.9) моделируется переходом к устойчивому профилю на основе законов сохранения массы, полного импульса, постоянных Бернулли. При таком подходе решение все время остается в области гиперболичности. Конечно, вопрос о разрешимости задачи Коши для системы уравнений (1.8) с ограничениями такого рода также требует основательного исследования.

З а м е ч а н и е 1. Система (1.8) в области гиперболичности напоминает уравнения газовой динамики. Роль энтропии играет завихренность. Если в начальный момент завихренность постоянна, то система сводится к двум уравнениям, однако только до момента образования ударных волн или действия ограничения (1.9).

2. Для определения решения в области гиперболичности нужно указать законы сохранения, которые определяют линии разрыва в решении. Если рассматривать разрывы в решениях, имеющие только небольшую амплитуду, то обобщенное решение можно определить на основе следующей дивергентной формы системы (1.5), (1.7):

$$(2.1) \quad \begin{aligned} (1 + h - \eta)_t + ((1 + h - \eta)(v - \gamma))_x &= 0, \\ (1 - h - \eta)_t + ((1 - h - \eta)(v + \gamma))_x &= 0, \\ \eta_t + (\eta v)_x = 0, \quad \gamma_t + (\gamma v)_x &= 0. \end{aligned}$$

Пусть v — скорость распространения линии разрыва $x = x(t)$ решения системы (2.1). На линии разрыва выполнены соотношения Гюгонио

$$(2.2) \quad \begin{aligned} v[h - \eta] &= [(1 + h - \eta)(v - \gamma)], \quad v[h + \eta] = [(h + \eta - 1)(v + \\ &+ \gamma)], \quad v[\gamma] = [\gamma v], \quad v[\eta] = [\eta v]. \end{aligned}$$

Линии разрывов в решении системы (2.1) соответствуют математическому описанию внутренних гидравлических прыжков, т. е. области течения с резким изменением параметров, для которой рассмотренное в п. 1 приближение «мелкой воды» не годится.

Перейдем в систему координат, движущуюся со скоростью $v = dx/dt \equiv \text{const}$ линии разрыва. Пусть по обе стороны разрыва течение имеет кусочно-линейные профили скорости $(u_0(y), 0)$, $(u(y), 0)$. Величины h , η , v , γ , характеризующие профили $u(y)$, $u_0(y)$, связаны соотношениями (2.2) ($v = 0$ в этой системе координат). Эти соотношения выражают свойства сохранения постоянных Бернулли в областях безвихревого движения, полного расхода, энергии при переходе через линию разрыва. Кроме того, из (2.2) следует сохранение завихренности $[\omega] = 0$ и массы жидкости в каждом из слоев $-1 \leq y \leq h - \eta$, $h - \eta \leq y \leq h + \eta$, $h + \eta \leq y \leq 1$, т. е. при переходе через зону гидравлического прыжка смещения слоев не происходит. Однако закон сохранения полного импульса не выполнен, и поэтому соотношения (2.2) можно рассматривать как удобное приближение, описывающее скачки умеренной интенсивности. В газовой динамике аналогичный подход состоит в замене закона сохранения энергии условием постоянства энтропии при переходе через линию разрыва.

3. Перейдем к вопросу об устойчивости течения с параллельными линиями тока и его связи с условием (1.9). Частными решениями задачи (1.1), (1.2) являются функции $u = u(y)$, $w = 0$, $p^* = \text{const}$. Однако установившееся течение с профилем скорости $u = u(y)$, $w = 0$ может оказаться неустойчивым по отношению к малым нестационарным возмущениям. Развитие сдвиговой неустойчивости, которая получила название неустой-

чивости Кельвина — Гельмгольца, приводит к интенсивному перемешиванию слоев жидкости. В результате вырабатывается новый устойчивый профиль скорости. При этом неявно учитывается влияние вязкости, вызывающее потерю энергии в жидкости на образование вихрей.

Рассмотрим возможные способы перехода от неустойчивого профиля скорости к устойчивому с сохранением таких интегральных характеристик потока, как расход, импульс. Неустойчивый профиль скорости может возникнуть, например, в силу граничных условий. Так, при слиянии двух равномерных потоков с различными скоростями профиль скорости сильно неустойчив. Это обстоятельство приводит к разваливанию контактного разрыва и образованию некоторого монотонного профиля скорости на достаточно большом удалении от начала перемешивания.

Ограничимся рассмотрением устойчивых профилей $u(y)$ из класса Λ со следующими свойствами:

а) функция $u(y)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[-1, 1]$;

б) функция $u(y)$ монотонно возрастает (убывает);

в) существует единственная точка перегиба \bar{y}

$$\bar{y} \in (-1, 1), u'(\bar{y}) = \max_{y \in (-1, 1)} u'(y) \quad (u'(\bar{y}) = \min_{y \in (-1, 1)} u'(y));$$

г) справедливо неравенство

$$(3.1) \quad \Delta = \frac{1}{u'(y)(u(y) - u(\bar{y}))} \int_{-1}^1 \frac{u''(y) dy}{(u'(y))^2 (u(y) - u(\bar{y}))} > 0.$$

Условие «г» является необходимым и достаточным условием устойчивости профиля $u(y)$ со свойствами «а» — «в» по отношению к нестационарным гармоническим возмущениям произвольной длины волны [3].

Будем считать, что в некоторой системе координат, движущейся с постоянной скоростью вдоль канала, процесс перехода от неустойчивого профиля к устойчивому установившийся. Мы пренебрегаем влиянием пограничного слоя вблизи жестких стенок. Поэтому при $y = \pm 1$ из интеграла Бернулли следует, что величина $\frac{1}{2}u^2 + p^* = \text{const}$. Пусть $u_0(y)$ — некоторый неустойчивый профиль, переходящий в $u(y) \in \Lambda$. Тогда справедливы соотношения

$$(3.2) \quad \int_{-1}^1 u(y) dy = \int_{-1}^1 u_0^*(y) dy, \int_{-1}^1 (u^2(y) + p^*) dy = \int_{-1}^1 (u_0^2(y) + p_0^*) dy,$$

$$\frac{1}{2} u^2(1) + p^* = \frac{1}{2} u_0^2(1) + p_0^*, \frac{1}{2} u^2(-1) + p^* = \frac{1}{2} u_0^2(-1) + p_0^*.$$

Можно попытаться решить задачу о нахождении функции $u(y)$ из класса Λ , минимизирующей скачок энергии $[E] = E_0 - E$, где

$$E = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} u^3(y) + p^* u(y) \right) dy$$

при условиях (3.2) и ограничении (3.1). Это задача классического вариационного исчисления. Нетрудно убедиться, что в классе Λ экстремум функционала не достигается. Перейдем к более широкому классу $\bar{\Lambda}$, включив в него пределы функций из Λ . Под сходимостью понимаем равномерную сходимость на промежутке $[-1, 1]$ и сходимость в C^2 на некотором ин-

тервале, содержащем точки перегиба рассматриваемой последовательности. В классе $\bar{\Lambda}$ подозрительными на экстремум будут непрерывные кусочно-линейные функции, состоящие из двух участков $u \equiv \text{const}$ (экстремали в Λ) и соединяющего их прямолинейного участка (односторонний экстремум). Обозначим этот класс через Λ_0 . Не будем пытаться доказать, что минимум функционала $[E]$ в классе $\bar{\Lambda}$ достигается на элементах из Λ_0 . Класс Λ введен из тех соображений, что в него, во-первых, попадают функции, наиболее часто используемые для аппроксимации распределения скоростей в слое перемешивания, например гиперболический тангенс, и, во-вторых, известно необходимое и достаточное условие устойчивости (3.1) течения с профилем скоростей из этого класса. Поэтому предыдущие рассуждения будем рассматривать как наводящие для выбора класса Λ_0 и остановимся на возможности однозначного определения из условий (3.2) профиля $u(y)$ из класса Λ_0 .

Л е м м а 1. Для функции $u(y)$ из класса Λ_0 выполнено неравенство (3.3)

$$(b - a)^2 - 4(1 + a)(1 - b) \geq 0,$$

где точки $y = a$, $y = b$ являются точками излома кусочно-линейной функции $u(y)$ ($-1 \leq a \leq b \leq 1$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $u(y)$ является пределом устойчивых профилей $u_n(y)$ из Λ в следующем смысле:

А) $\sup_{y \in (-1, 1)} |u(y) - u_n(y)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty;$

Б) существует $\bar{y} \in (-1, 1)$, $\bar{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{y}_n$, где $u''(\bar{y}_n) = 0$;

В) существует величина $\delta > 0$ такая, что $u_n(y) \rightarrow u(y)$ при $n \rightarrow \infty$ в пространстве $C^2_{[\bar{y}-\delta, \bar{y}+\delta]}$.

Из свойств «А» — «В» следует, что $\bar{y} \in (a, b)$ при $u(a) \neq u(b)$. Заметим, что выражение $\Delta(u_n)$ может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \Delta(u_n) = & \frac{1}{u'_n(u_n - \bar{u}_n)} \left| \int_{\bar{y}_n - \delta}^{\bar{y}_n + \delta} \frac{u''_n dz}{(u'_n)^2 (u_n - \bar{u}_n)} - \right. \\ & \left. - \int_{-1}^{\bar{y}_n - \delta} \frac{dz}{(u_n - \bar{u}_n)^2} - \int_{\bar{y}_n + \delta}^1 \frac{dz}{(u_n - \bar{u}_n)^2} \right| > 0, \end{aligned}$$

где $\bar{u}_n = u_n(\bar{y}_n)$. Переходя в выражении $\Delta(u_n)$ к пределу, получаем неравенство

$$\Delta(u) = \frac{1}{u'(u - \bar{u})} \left| \int_{\bar{y} - \delta}^{\bar{y} + \delta} \frac{dz}{(u - \bar{u})^2} - \int_{-1}^{\bar{y} - \delta} \frac{dz}{(u - \bar{u})^2} - \int_{\bar{y} + \delta}^1 \frac{dz}{(u - \bar{u})^2} \right| \geq 0.$$

Заметим, что

$$u'(z) = \begin{cases} 0, & -1 \leq y < a, \\ \omega, & a < y < b, \\ 0, & b < y \leq 1. \end{cases}$$

Поэтому выражение для $\Delta(u)$ перепишем в виде

$$\Delta(u) = \frac{1}{\omega^2} \left[\frac{1}{b - \bar{y}} - \frac{1}{a - \bar{y}} - \frac{1 + a}{(\bar{y} - a)^2} - \frac{1 - b}{(\bar{y} - b)^2} \right].$$

Так как $\Delta(u) \geq 0$, то приходим к неравенству

$$-2\bar{y}^2 + (2a - a^2 + 2b + b^2)\bar{y} + 2a^2b - a^2 - 2ab^2 - b^2 \geq 0,$$

т. е. $d^2 = (a - b)^2((a - b)^2 - 4(a + 1)(1 - b)) \geq 0$, что и требовалось доказать.

Л е м м а 2. Течение с профилем из Λ_0 устойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно непосредственно исследовать на устойчивость течение с профилем скорости $(u(y), 0)$ при $u(y) \in \Lambda_0$. В силу кусочной линейности функции $u(y)$ уравнения Рэлея принимают простой вид [4]. Решение ищется в виде комбинации экспонент. При этом коэффициенты определяются условиями непрерывности решения и условиями непротекания при $y = +1$. Ограниченный рост возмущений во времени для произвольной длины волны имеет место только при выполнении неравенства (3.3). В частном случае при $a = -b$ это условие выведено в [4].

Перейдем теперь к определению профиля u из Λ_0 по заданному профилю u_0 . Для удобства будем считать, что профиль u_0 устроен так же, как и профиль u , только не удовлетворяет условию устойчивости (3.3). Пусть $h = 1/2(a + b)$, $\eta = 1/2(b - a)$, $v = 1/2(u(-1) + u(1))$, $\gamma = 1/2(u(1) - u(-1))$.

З а м е ч а н и е 2. Условие устойчивости (3.3) совпадает с условием гиперболичности (1.9) системы (1.8), выведенной в предположении о кусочной линейности мгновенного профиля скоростей.

Соотношения (3.2) для функций u , u_0 из класса Λ_0 имеют вид

$$(3.4) \quad v - \gamma h = v_0 - \gamma_0 h_0, \quad \gamma v = \gamma_0 v_0, \\ v^2 - 4\gamma h v + \gamma^2 \left(1 - \frac{4}{3}\eta\right) = v_0^2 - 4\gamma_0 h_0 v_0 + \gamma_0^2 \left(1 - \frac{4}{3}\eta_0\right).$$

Для замыкания системы (3.4) добавим условие устойчивости (3.3) профиля $u(y)$

$$(3.5) \quad \eta = 1/2(1 - h^2).$$

Заметим, что в условии (3.5) поставлен знак равенства, так как при достижении устойчивого состояния дальнейшее перемешивание прекращается и далее вступают в силу соотношения (2.2). Приступим к анализу полученных соотношений.

Л е м м а 3. Для неустойчивого профиля $u_0(y)$ соотношения (3.4), (3.5) имеют решения с $v(v_0 - v) \geq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\gamma_0 v_0 \neq 0$. Тогда $v \neq 0$ и уравнение на величину v имеет вид

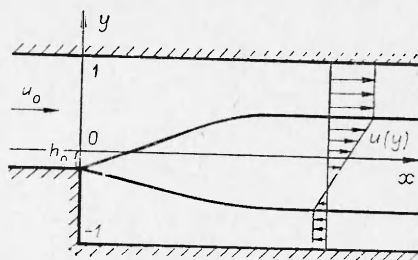
$$(3.6) \quad P(v) = -7v^4 + 8v^3(v_0 - \gamma_0 h_0) - v^2(v_0^2 - 8\gamma_0 h_0 v_0 + \\ + \gamma_0^2(3 - 4\eta_0 - 2h_0^2)) + \gamma_0^2 v_0^2 = 0.$$

Так как в точках $v = 0$, $v = v_0$ полином $P(v)$ имеет разные знаки: $P(0) = \gamma_0^2 v_0^2 > 0$, $P(v_0) = 2(2\eta_0 - 1 + h_0^2)\gamma_0^2 v_0^2 < 0$, то существование корня v^* полинома $P(v)$ доказано. Остальные соотношения разрешаются однозначно. Для случая $\gamma_0 v_0 = 0$ решение можно найти в явном виде. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 3. Из уравнения (3.6) следует, что существует, по крайней мере, еще один корень v_* , причем $v^* v_* \leq 0$. Из предположения о том, что в окрестности стенок линии тока однозначно проектируются на ось x , вытекает выполнение неравенства

$$(3.7) \quad (v \pm \gamma)(v_0 \pm \gamma_0) \geq 0.$$

Из (3.4), (3.7) получаем условия $vv_0 \geq 0$, $\gamma\gamma_0 \geq 0$, которые устраняют корень v_* уравнения (3.6). Однако возможно появление еще двух действительных корней уравнения $P(v) = 0$. Кроме того, система (3.4), (3.5) нелинейна и ее решение удовлетворяет некоторым ограничениям, например $-1 \leq h \leq 1$, выполнение которых необходимо еще проверить.



4. Исследуем решение системы (3.4), (3.5) подробнее на примере задачи о течении жидкости над уступом (см. фигуру). Рассмотрим установившееся течение жидкости в области $x > 0$, $-1 < y < 1$. На отрезке $x = 0$, $y \in (h_0, 1)$ задан равномерный поток. На стенках канала выполнено условие непротекания. Задача состоит в определении профиля скорости $u(y) \in \Lambda_0$ при достаточно больших значениях $x > 0$ на основе соотношений (3.4), (3.5). Начальный профиль скорости $u_0(y)$ при $x = 0$ кусочно-постоянный ($\eta_0 = 0$)

$$u_0(y) = \begin{cases} 0, & -1 < y < h_0, \\ u_0, & h_0 < y < 1. \end{cases}$$

Поэтому $v_0 = \gamma_0 = 1/2 u_0 > 0$. Система (3.4), (3.5) принимает вид

$$(4.1) \quad v - \gamma h = v_0(1 - h_0), \quad \gamma v = v_0^2, \\ v^2 - 4\gamma v h + \gamma^2 \left(1 - \frac{4}{3} \eta\right) = 2v_0^2(1 - 2h_0), \quad 2\eta = 1 - h^2.$$

Л е м м а 4. Существует единственное решение системы (4.1), удовлетворяющее условию (3.7).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v = \alpha v_0$. Заметим, что только положительные значения α удовлетворяют условию (3.7). В самом деле, $v + \gamma = v_0(\alpha + \alpha^{-1}) > 0$ только при $\alpha > 0$. Покажем, что искомое значение $\alpha^* \in [0, 1]$. В этом случае ограничение $|h| = |\alpha^*(\alpha^* - 1 + h_0)| < 1$ выполнено. Получим из соотношений (4.1) уравнение на величину α , считая η параметром ($\eta = 1/2(1 - h^2)$, т. е. $0 \leq \eta \leq 1/2$):

$$(4.2) \quad Q(\alpha) = -3\alpha^4 + 4(1 - h_0)\alpha^3 - 2(1 - 2h_0)\alpha^2 + 1 - \frac{4}{3}\eta = 0.$$

Так как $Q(0) = 1 - 4/3\eta > 0$, $Q(1) = -4/3\eta \leq 0$, то существование корня α^* полинома $Q(\alpha)$ на отрезке $[0, 1]$ очевидно. Это значение α^* дает решение системы (4.1).

Перейдем к доказательству единственности положительного корня в уравнении (4.2). Экстремумы функции $Q(\alpha)$ расположены в точках $\alpha_0 = 0$ и

$$(4.3) \quad \alpha^\pm = \frac{3(1 - h_0) \pm \sqrt{3(3h_0^2 + 2h_0 - 1)}}{6}.$$

Поэтому при $-1 \leq h_0 \leq 1/3$ дискриминант в (4.3) отрицателен и при $\alpha > 0$ функция $Q(\alpha)$ монотонна. При $h_0 \in [1/2, 1]$ в точке $\alpha = 0$ имеет место локальный минимум и на отрезке $[0, 1]$ достигается максимум. Следовательно, корень уравнения (4.2) при $\alpha > 0$ единственный. Осталось рассмотреть случай $h_0 \in (1/3, 1/2)$. При этом $0 < \alpha^- < \alpha^+ < 1$. В точке α^- достигается минимум, в точке α^+ — максимум функции $Q(\alpha)$. Так как $\partial Q / \partial h_0 = 4\alpha^2(1 - \alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, 1)$, то функция $Q(\alpha^-(h_0))$ монотонно возрастает при $h_0 \in (1/3, 1/2)$ и достигает минимума в точке $h_0 = 1/3$. При этом

$Q\left(\alpha^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right) = Q\left(\frac{1}{3}\right)\Big|_{h_0=1/3} = 1 - \frac{4}{3}\eta - 3^{-4} > 0$ для $0 \leq \eta \leq 1/2$. Лемма доказана.

Заметим, что рассмотренная в п. 4 задача возникает при изучении обтекания решетки профилей конечной толщины потоком идеальной жидкости.

Предлагаемая модель является попыткой математического описания развития сдвиговой неустойчивости движения идеальной жидкости в длинно-волновом приближении. Условие устойчивости (1.9) приводит к гиперболичности полученной системы уравнений и позволяет надеяться на корректность постановки задачи Коши для этой системы.

Поступила 2 XII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Модели двухслойной «мелкой воды». — ПМТФ, 1979, № 2.
2. Friedrichs K. O. On the derivation of the shallow water theory. Appendix to «The formation of breakers and bores» by J. J. Stoker. — Comm. Pure Appl. Math., 1948, vol. 1, p. 81—85.
3. Rosenbluth M. N., Simon A. Necessary and sufficient condition for the stability of plane parallel inviscid flow. — Phys. Fluids, 1964, vol. 7, N 4.
4. Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей). Теория звука. М., ГИТТЛ, 1955.

УДК 532.527

АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ ТЭЙЛОРА — ПРАУДМЕНА В ТЕЧЕНИЯХ СО СДВИГОМ СКОРОСТИ

В. А. Владимиров
(Новосибирск)

Широко известен ряд свойств малых возмущений твердотельно вращающейся жидкости, которые можно квалифицировать как проявление своеобразной «упругости» потока. Такими свойствами являются волновой характер развития возмущений и явление образования «столбов Тэйлора». Последний результат называется также теоремой Тэйлора — Праудмена и состоит в том, что при медленном движении твердого тела во вращающейся жидкости течение в первом приближении оказывается двумерным (не зависит от координаты z вдоль оси вращения). Существование такой структуры течения, вначале предсказанной теоретически, было подтверждено затем в ряде экспериментов [1]. Как свойства волновых движений [1, 2], так и явления типа «столбов Тэйлора» говорят о сильной анизотропии «упругих» свойств среды. «Упругость» оказывается связанной с искривлениями вихревых линий и проявляется тем слабее, чем меньше эти искривления. Если поля возмущений являются двумерными, так что движение происходит без изгиба вихревых линий, то «упругость» вовсе не проявляется и имеется течение типа «столбов Тэйлора». Причиной этих свойств жидкости является гироскопическое поведение вращающихся жидких частиц (см. [3—5]). Основываясь на таком качественном представлении, можно ожидать, что «упругими» свойствами обладает любое устойчивое вихревое течение. Однако жидкие частицы в общем случае подвержены также и деформациям. Последние могут играть дестабилизирующую роль в потоке, уменьшая его «упругость» и даже приводя к неустойчивости [5—7]. Примеры того, как наличие деформаций изменяет свойства волнового движения в устойчивых потоках, даны в [8, 9]. Возникает вопрос: возможны ли в вихревых течениях, отличных от твердотельного вращения, явления типа «столбов Тэйлора»? Ниже построены три примера, которые показывают теоретическую возможность таких явлений. Способ доказательства в каждом случае практически повторяет доказательство теоремы Тэйлора — Праудмена. Во всех примерах рассматривается модель идеальной несжимаемой жидкости с постоянной плотностью.