ПМТФ, № 6, 1969

# ДИССИПАТИВНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПЕРЕКАЧКИ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ПЛАЗМЫ

*В. Г. Маханьков, В. Н. Цытович*

*(Дубна)*

Обсуждается вопрос о возбуждении низкочастотных ($\omega^s \ll \nu_e m_e / m_i$) акустических колебаний пучком поперечных (в. ч.) волн. Оказывается, что в определенных условиях дисперсия (а не только инкремент возбуждения) низкочастотных акустических колебаний однозначно связана с плотностью энергий в. ч. волн.

1. Известно, что спектры турбулентности плазмы определяются интенсивностью трансформации вдоль спектра энергии турбулентных пульсаций, возбуждаемых вследствие неустойчивости плазмы. Если турбулентность будет квазистационарной и характерное время существования стационарной турбулентности много больше частот парных соударений, то взаимодействие турбулентных пульсаций может весьма существенно зависеть от парных соударений частиц. В [1] дан расчет эффективности таких взаимодействий в условиях, когда разность частот двух взаимодействующих пульсаций много больше $\nu_e m_e / m_i$ ($m_e$, $m_i$ — соответственно массы электронов и ионов; плазма полностью ионизирована; $\nu_e$ — частота соударений электронов с электронами и ионами плазмы). Более точно необходимые критерии применимости результатов [1] имеют вид [1]

$$\left|\frac{\omega_1 - \omega_2}{k - v_{Te}}\right|^2 \gg \frac{m_e}{m_i}, \qquad |\omega_1 - \omega_2| \gg \nu_e \frac{m_e}{m_i} \tag{1.1}$$

Цель данной работы — анализ нелинейных взаимодействий и характерных времен спектральных перекачек в условиях, когда (1.1) нарушено. При этом будет показано, что в этих условиях кинетическое возбуждение низкочастотных колебаний высокочастотными (из-за процессов типа распадных) оказывается невозможным, а гидродинамическое возбуждение возникает лишь в условиях очень узких спектров высокочастотных колебаний. Однако в этой области частот возможен новый специфический вид неустойчивости, связанный с диссипативным характером процесса.

В отличие от перекачек высокочастотных волн в условиях (1.1) рассматриваемые ниже спектральные перекачки являются диссипативными, т. е. действительные нелинейные поправки к частоте могут быть существенно меньшими мнимых поправок.

В рассматриваемой области тепловое движение частиц сказывается лишь на спектрах частот турбулентных пульсаций (но не на их взаимодействии), поэтому оказывается возможным использовать двухжидкостные гидродинамические уравнения [2] для описания такого взаимодействия. При этом будет показано, что гидродинамические уравнения позволяют получить результаты работы [1] в условиях (1.1), если силу трения между электронами и ионами для высокочастотных колебаний считать равной ($-m_e n_e \nu_e \mathbf{U}$) вместо ($-0.51 m_e n_e \nu_e \mathbf{U}$). Последнее легко понять, если учесть, что коэффициент 0.51 возникает лишь в условиях частых соударений $\omega \ll$

[1] Нарушение первого из условий (1.1) не приводит к существенному изменению результатов [1], оставляя их справедливыми по порядку величины.

$\ll \nu_e$, тогда как в условиях слабых соударений непосредственный расчет силы трения дает $(-m_e n_e \nu_e \mathbf{U})$. Выписываемая ниже система уравнений, учитывающая это обстоятельство, может рассматриваться как полуфеноменологическая. Обоснованность ее использования подтверждается кинетическим расчетом [1].

2. Выпишем эту систему

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div}(n_e \mathbf{V}_e) = 0, \qquad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div}(n_i \mathbf{V}_i) = 0 \tag{2.1}$$

$$m_e n_e \left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(\mathbf{V}_e \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\right] V_{e,\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} n_e T_e - \frac{\partial \pi_{e,\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - $$
$$- e n_e \left(E_\alpha + \frac{1}{c}[\mathbf{V}_e \mathbf{H}]_\alpha\right) + R_\alpha \tag{2.2}$$

$$m_i n_i \left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(\mathbf{V}_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\right] V_{i,\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} n_i T_i - \frac{\partial \pi_{i,\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + $$
$$+ e n_i \left(E_\alpha + \frac{1}{c}[\mathbf{V}_i \mathbf{H}]_\alpha\right) - R_\alpha \tag{2.3}$$

$$\frac{3}{2} n_e \left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(\mathbf{V}_e \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\right] T_e + n_e T_e \operatorname{div} \mathbf{V}_e = -\operatorname{div} \mathbf{q}_e - \pi_{e,\alpha\beta} \frac{\partial V_{e,\alpha}}{\partial x_\beta} + Q_e \tag{2.4}$$

$$\frac{3}{2} n_i \left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(\mathbf{V}_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\right] T_i + n_i T_i \operatorname{div} \mathbf{V}_i = -\operatorname{div} \mathbf{q}_i - \pi_{i,\alpha\beta} \frac{\partial V_{i,\alpha}}{\partial x_\beta} + Q_i \tag{2.5}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_U + \mathbf{R}_T, \qquad \mathbf{q}_e = \mathbf{q}_U{}^e + \mathbf{q}_T{}^e, \qquad \mathbf{U} = \mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i$$

Здесь $\mathbf{R}_U$ — сила трения, $\mathbf{R}_T$ — термосила, $m_e$, $m_i$ — массы, $n_e$, $n_i$ — концентрации, $T_e$, $T_i$ — температуры электронов и ионов соответственно

$$\mathbf{R}_T = -0.71\, n_e \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{r}}, \qquad \mathbf{R}_U = -n_e m_e \nu_e \mathbf{U} \begin{cases} 0.51 & \text{при } \omega \ll \nu_e \\ 1.0 & \text{при } \omega \gg \nu_e \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\mathbf{q}_U{}^e = 0.71\, n_e T_e \mathbf{U}, \qquad \mathbf{q}_T{}^e = -3.16 \frac{n_e T_e}{m_e \nu_e} \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{r}}, \qquad \mathbf{q}_i = -3.9 \frac{n_i T_i}{m_i \nu_i} \frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{r}}$$

$$Q_e = -(\mathbf{RU}) - Q_i, \qquad Q_i = 3 \frac{m_e}{m_i} n_e \nu_e (T_e - T_i)$$

$$\pi_{e,\alpha\beta} = -0.73 \frac{n_e T_e}{\nu_e} W_{\alpha\beta}^{(e)}, \qquad \pi_{i,\alpha\beta} = -0.96 \frac{n_i T_i}{\nu_i} W_{\alpha\beta}^{(i)}$$

$$W_{\alpha\beta} = \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{V}$$

Величины $\nu_e$ и $\nu_i$ суть характерные частоты соударений электронов и ионов с остальными частицами (электронами и ионами) плазмы, зависящие известным образом от температуры $(\sim T_\alpha^{-3/2})$ и плотности плазмы.

Используем выписанную систему уравнений для исследования нелинейных взаимодействий пульсаций высоких частот

$$\omega^+ \gtrsim \omega_{0e}, \qquad \omega_{0e} = (4\pi n_e e^2 / m_e)^{1/2}$$

В нелинейных поляризуемостях плазмы будем учитывать члены, содержащие не более чем вторую степень $\omega^+$ в знаменателе. Разложим все величины по степеням напряженности электрического поля вплоть до членов третьего порядка по $E$

$$V = \sum_{j=1} V^{(j)}, \qquad n = n_0 + \sum_{j=1} n^{(j)}, \qquad T = T_0 + \sum_{j=1} T^{(j)} \tag{2.7}$$

$$V^{(j)} \sim (E)^j, \qquad n^{(j)} \sim (E)^j, \qquad T^{(j)} \sim (E)^j$$

Здесь $n_0 = \langle n \rangle$, $T_0 = \langle T \rangle$ — средние значения температуры и плотности в турбулентной плазме. Использовать разложение (2.7) можно, если

$$(n^{(j)} / n_0),\ (T^{(j)} / T_0),\ \ldots \ll 1$$

Отметим сразу, что наличие высокочастотных турбулентных пульсаций сказывается на усредненной функции распределения частиц плазмы и приводит к так называемому столкновительному нагреву [3]. Уравнение для изменения средней температуры плазмы в поле высокочастотных пульсаций имеет вид, аналогичный использованному в [3] для нагрева монохроматической волной

$$\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial t} T_{0e} = \frac{e^2}{m_e} \nu_e \int \frac{|E_{\mathbf{k}}|^2 d\mathbf{k}}{(\omega^+)^2} - 3\frac{m_e}{m_i}\nu_e (T_{0e} - T_{0i}) \tag{2.8}$$

$$\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial t} T_{0i} = 3\frac{m_e}{m_i}\nu_e (T_{0e} - T_{0i}) \tag{2.9}$$

Согласно [3] (это следует также из (2.8), (2.9)) за время $\tau \sim (1 / \nu_e)$ температура электронов увеличится лишь на

$$\Delta T_{0e} \approx T_{0e}\left(\frac{\omega_{0e}}{\omega^+}\right)^2 \frac{W}{n_0 T_{0e}} \ll T_{0e}$$

так как по предположению

$$(W / n_0 T_{0e}) \ll 1,\quad \omega^+ \gtrsim \omega_{0e}$$

Увеличение температуры ионов есть

$$\Delta T_{0i} \approx 3\frac{m_e}{m_i}\Delta T_{0e}$$

За время $\tau = \tau_1 = (m_i / m_e \nu_e)$ разность средних температур электронов и ионов выходит на плато

$$\frac{T_{0e} - T_{0i}}{T_{0e}} \approx \frac{1}{3}\frac{m_i}{m_e}\left(\frac{\omega_{0e}}{\omega^+}\right)^2 \frac{W}{n_0 T_{0e}}$$

а температура ионов увеличится на

$$\frac{\Delta T_{0i}}{T_{0e}} \approx \frac{m_i}{m_e}\left(\frac{\omega_{0e}}{\omega^+}\right)^2 \frac{W}{n_0 T_{0e}}$$

Обозначим

$$W_p = \frac{m_e}{m_i} n_0 T_{0e}\left(\frac{\omega^+}{\omega_{0e}}\right)^2 = \frac{E_p{}^2}{4\pi}$$

Здесь $E_p$ — так называемое плазменное поле, $W_p$ — плотность энергии плазменного поля. Таким образом, если $W \ll W_p$, то эффектом нагрева электронов и ионов можно пренебречь. Если плазма слабо ионизирована, то столкновения ионов с нейтралами могут не позволить им поднять температуру достаточно высоко, и тогда температуру ионов можно считать постоянной и равной $T$, а температуру электронов (если $\tau \gtrsim \tau_1$) — равной $T(1 + W / W_p)$. При $W \gg W_p$ имеем $T_{0e} \gg T_{0i}$. В такой системе возможен турбулентный нагрев вследствие нелинейного возбуждения ионного звука.

Вернемся к системе уравнений (2.1) — (2.5). Найдем ее решение для $V^{(2)}$, $n^{(2)}$, $T^{(2)}$ и $V^{(1)}$, $n^{(1)}$, $T^{(1)}$, при помощи которых можно определить нелинейную поляризуемость второго порядка по полю $S_1$ $(k, k_1, k_2)$, определяемую равенством

$$j_k{}^* = \int S_1(k, k_1, k_2)\, E_{k_1}{}^+ E_{k_2}{}^+ \delta(k_1 + k_2 - k)\, dk_1 dk_2 \qquad (2.10)$$

Оценим члены, входящие в уравнение переноса импульса (2.2). Так как для нахождения $S_1$ необходимо знать $V^{(1)}$, $n^{(1)}$, $T^{(1)}$, соответствующие высокой частоте $\omega^+$, то выбрасывая диссипативные члены для высокой частоты, можно получить

$$n_{k_1}^{(1)} = n_0 \frac{k_1 V_{k_1}^{(1)}}{\omega_1}, \qquad V_{k_1}^{(1)} = -i \frac{eE_{k_1}}{m_e \omega_1}, \qquad T_{k_1}^{(1)} = 1.14 \frac{T_{0e} k_1 V_{k_1}^{(1)}}{\omega_1} \qquad (2.11)$$

Здесь, простоты ради, поле $E_k$ считается продольным. Используя (2.11), нетрудно показать, что сумма

$$m_e n_e \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_{e,\alpha}^{(1)} + e n_e^{(1)} E_\alpha = 0$$

Член $\partial n_e^{(1)} T_e^{(1)} / \partial x_\alpha$, входящий в уравнение (2.2) с помощью (2.11) может быть оценен как $\sim E^2/(\omega^+)^4$, и поэтому им можно пренебречь. Аналогично, учитывая разложение (2.7) и формулы (2.11), легко показать, что с требуемой точностью

$$\pi_{e,\alpha\beta} = -0.73 \frac{n_0 T_{0e}}{\nu_e(T_{0e})} W_{\alpha\beta}^{(e)(2)}, \qquad W_{\alpha\beta}^{(e)(2)} \sim V_e^{(2)}$$

а величину силы трения необходимо считать равной

$$\mathbf{R} = -0.51\, m_e n_0 \nu_e \mathbf{U}^{(2)} - 0.71\, n_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} T_e^{(2)}$$

Точно так же могут быть оценены члены в уравнении переноса энергии (2.4)

$$n_e^{(1)} T_{0e} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} V_e^{(1)} \sim \frac{E^2}{(\omega^+)^3}, \qquad \mathbf{V}_e^{(1)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} T_e^{(1)} \sim \frac{E^2}{(\omega^+)^3}, \qquad n_0 T_e^{(1)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{V}_e^{(1)} \sim \frac{E^3}{(\omega^+)^3}$$

$$\mathbf{q}_e = 0.71\, n_0 T_{0e} \mathbf{U}^{(2)} - 3.16 \frac{n_0 T_{0e}}{m_e \nu_e} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} T_e^{(2)}, \qquad \frac{V_e^{(1)}}{V_i^{(1)}} = \frac{m_i}{m_e}$$

$$Q_e = -(\mathbf{R}^{(1)} \mathbf{U}^{(1)}) - 3 \frac{m_e}{m_i} n_0 \nu_e (T_e^{(2)} - T_i^{(2)}) =$$

$$= m_e n_0 \nu_e \mathbf{V}_e^{(1)} \mathbf{V}_e^{(1)} - 3 \frac{m_e}{m_i} n_0 \nu_e (T_e^{(2)} - T_i^{(2)})$$

Наконец, величина

$$\pi_{e,\alpha\beta}^{(1)} \frac{\partial V_{e,\alpha}^{(1)}}{\partial x_\beta} \sim \frac{k_1^2 v_{Te}^2}{\nu_e^2} Q_e \quad \text{при} \quad k_1 v_{Te} \ll \nu_e$$

будет малой.

Оценивая аналогично члены, входящие в уравнение переноса для ионов, получаем окончательно уравнения для поправок второго порядка по $E$

$$\left(-i\omega + i \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega}\right) V_{ke}^{(2)} = -0.51\, \nu_e U_k^{(2)} - 1.71 ikv_{Te}^2 \frac{T_{ke}^{(2)}}{T_{0e}} - \frac{eE_k}{m_e} \qquad (2.12)$$

$$\left(-\frac{3}{2} i\omega + 3.16 \frac{k^2 v_{Te}^2}{\nu_e} + 3 \frac{m_e}{m_i} \nu_e\right) \frac{T_{ke}^{(2)}}{T_{0e}} = -ikV_{ke}^{(2)} - 0.71 ikU_k^{(2)} +$$

$$+ 3 \frac{m_e}{m_i} \nu_e \frac{T_{ki}^{(2)}}{T_{0e}} + \frac{m_e \nu_e}{T_{0e}} \int \mathbf{V}_{k_1}^{(1)} \mathbf{V}_{k_2}^{(1)} d\lambda$$

$$\left(-i\omega + 1.28\frac{k^2v_{Ti}^2}{\nu_i} + i\frac{k^2v_{Ti}^2}{\omega}\right)V_{ki}^{(2)} = -ikv_{Ti}^2\frac{T_{ki}^{(2)}}{T_{0i}} + 0.71ikv_{Ti}^2\frac{T_{ke}^{(2)}}{T_{0i}} + $$
$$+ 0.51\frac{m_e}{m_i}\nu_e U_k^{(2)} + \frac{eE_k}{m_i}$$

$$\left(-\frac{3}{2}i\omega + 3.9\frac{k^2v_{Ti}^2}{\nu_i} + 3\frac{m_e}{m_i}\nu_e\right)\frac{T_{ki}^{(2)}}{T_{0i}} = -ikV_{ki}^{(2)} + 3\frac{m_e}{m_i}\nu_e\frac{T_{ke}^{(2)}}{T_{0i}}$$
$$d\lambda = \delta(k - k_1 - k_2)\,dk_1dk_2, \qquad k = \{\mathbf{k}, \omega\}$$

Решая эту систему, получаем

$$V_{ke}^{(2)} = -\frac{ik\nu_eA_e}{\varkappa\Omega_e\omega_e}\int V_{k_1}^{(1)}V_{k_2}^{(1)}d\lambda, \qquad V_{ki}^{(2)} = \frac{ik\nu_eA_im_e}{\varkappa\Omega_e\omega_im_i}\int V_{k_1}^{(1)}V_{k_2}^{(1)}d\lambda \tag{2.13}$$

Здесь

$$\omega_i = -i\omega + i\frac{k^2v_{Ti}^2}{\omega} + 1.28\frac{k^2v_{Ti}^2}{\nu_i} + \frac{k^2v_{Ti}^2}{\Omega_i} -$$
$$-\left(0.71 - \frac{\delta\nu}{\Omega_i}\right)\left(1 + \frac{\delta\nu}{\Omega_i}\right)\frac{T_{0e}}{T_{0i}}\frac{k^2v_{Ti}^2}{\Omega_e} \tag{2.14}$$
$$\omega_e = -i\omega + i\frac{k^2v_{Te}^2}{\omega} + 1.71\frac{k^2v_{Te}^2}{\Omega_e}\left(1 + \frac{\delta\nu}{\Omega_i}\right), \qquad \delta\nu = 3\frac{m_e}{m_i}\nu_e$$
$$\Omega_i = -\frac{3}{2}i\omega + \delta\nu + 3.9\frac{k^2v_{Ti}^2}{\nu_i},$$
$$\Omega_e = -\frac{3}{2}i\omega + \delta\nu + 3.16\frac{k^2v_{Te}^2}{\nu_e} - \frac{(\delta\nu)^2}{\Omega_i}$$
$$\varkappa = 1 + \varkappa^\circ\left(\frac{1}{\omega_e} + \frac{m_e}{m_i}\frac{1}{\omega_i}\right), \quad \varkappa^\circ = 0.51\nu_e + 1.71\left(0.71 - \frac{\delta\nu}{\Omega_i}\right)\frac{k^2v_{Te}^2}{\Omega_e}$$
$$A_e = 1.71 + \frac{m_e}{m_i}\frac{\varkappa^\circ}{\omega_i}\left(1 + \frac{\delta\nu}{\Omega_i}\right), \qquad A_i = 0.71 - \frac{\delta\nu}{\Omega_i} - \frac{\varkappa^\circ}{\omega_e}\left(1 + \frac{\delta\nu}{\Omega_i}\right)$$

Искомое выражение для $S_1$ имеет вид

$$S_1(k, k_1, k_2) = -i\frac{en_0k\nu_e}{\varkappa\Omega_e}\left(\frac{A_e}{\omega_e} + \frac{m_e}{m_i}\frac{A_i}{\omega_i}\right)\frac{V_{k_1}^{(1)}V_{k_2}^{(1)}}{E_{k_1}E_{k_2}} \sim V_{ke}^{(2)} - V_{ki}^{(2)} \tag{2.15}$$

При $\omega \gg \delta\nu$, $kv_{Ti}$ результат (2.15) совпадает с тем, который был получен в [1]. Таким образом, (2.31) обобщает результаты [1] на случай $\omega \lessgtr \delta\nu$ и $\omega \lessgtr kv_{Ti}$.

Нелинейный ток $S_2$, определяемый соотношением

$$j_k^+ = \int S_2(k, k_1, k_2)\,E_{k_1}{}^+E_{k_2}{}^*d\lambda \tag{2.16}$$

имеет формально тот же вид, что и в работе [1]

$$S_2(k, k_1, k_2) = \frac{ie^3n_0k_2(\mathbf{kk}_1)}{m_e{}^2\omega\varkappa\omega_e\omega_2kk_1} \tag{2.17}$$

где, однако, $\varkappa$, $\omega_e$ определяются формулами (2.14). Наконец, нелинейный ток третьего порядка связан с током второго порядка соотношением, найденным в [1].

3. Приведем пример расчета спектральных перекачек ленгмюровских волн, если разность их частот меньше $\delta\nu$. Несложный расчет дает

$$\gamma_{\mathbf{k}} = \frac{1}{|E_{\mathbf{k}}|^2}\frac{\partial}{\partial t}|E_{\mathbf{k}}|^2 = \tag{3.1}$$
$$= -\frac{1.71\nu_en_0e^4}{m_im_e{}^2\omega_{0e}{}^3}\operatorname{Re}\int\frac{|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|^2(\mathbf{kk}_1)^2}{\omega_e\varkappa\Omega_ek^2k_1^2}\,\frac{\omega_e|E_{\mathbf{k}_1}|^2d\mathbf{k}_1}{\omega_i(\omega-\omega_1)[1 + m_e\omega_e/m_i\omega_i]}$$

Наиболее эффективным оказывается взаимодействие волн, разность частот которых близка к скорости звуковых колебаний $\omega_s = \sqrt{10/3}\, kv_{T_i}$ или точнее, если

$$\frac{\Delta\omega - \omega_s}{\Delta\omega} < \frac{|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|^2 v_{Te}^2}{\Delta\omega \nu_e}, \qquad |\Delta\omega - \omega_s| \gg \gamma_s \tag{3.2}$$

Здесь $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ — разность частот взаимодействующих волн. Получим оценку

$$\gamma_{\mathbf{k}} \approx -\frac{(\Delta\omega - \omega_s)\,\omega_{0e}}{(kv_{Te} / \nu_e)^4 \nu_e} \frac{W}{n_0 T_{0e}} \tag{3.3}$$

Если $\Delta\omega - \omega_s$ порядка $(k^2 v_{Te}^2 / \nu_e)$, то $\gamma_k$ порядка

$$\gamma_{\mathbf{k}} \approx \frac{\omega_{0e}\nu_e^2}{k^2 v_{Te}^2} \frac{W}{n_0 T_{0e}} \tag{3.4}$$

Формула (3.4) показывает, что такие взаимодействия очень эффективны. Однако при использовании этого соотношения необходимо иметь ввиду, что $(W / n_0 T_{0e}) \ll (m_e / m_i)$ и, кроме того, взаимодействуют интенсивно лишь волны, имеющие очень близкие частоты $\Delta\omega \sim \omega_s \ll (\nu_e m_e / m_i)$. Фактически спектры ленгмюровских колебаний в турбулентной плазме могут быть значительно шире. Поэтому здесь речь идет об «эстафетной» перекачке (см. [5]).

4. Рассмотрим в качестве другого примера возможность распада высокочастотных волн (например, лазерных поперечных волн в условиях лазерной искры) на низкочастотный звук $\omega_s \ll (\nu_e m_e / m_i)$. Нетрудно проверить, что дисперсионное уравнение, описывающее такой процесс, имеет стандартный вид [4,5]

$$\omega' + i\gamma_s = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{u(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1)(N^t_{\mathbf{k}_1} - N^t_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}})}{\omega' + \Delta\omega_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1} + i\delta} d\mathbf{k}_1 \tag{4.1}$$

$$\Delta\omega_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1} = -\operatorname{Re}(\omega^t_{\mathbf{k}_1} - \omega^t_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}} - \omega^s_{\mathbf{k}})$$

Здесь $\omega'$ — нелинейная поправка к частоте звуковых колебаний, $u(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1)$, обычно являющаяся вероятностью рассматриваемого распадного процесса (в бессоударительном случае), в данном случае пропорциональна произведению нелинейных поляризуемостей $S_1$ и $S_2$

$$u(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) = (2\pi)^4 \frac{S_1(\mathbf{k}, \omega^t_{\mathbf{k}_1} - \omega^t_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}};\ \mathbf{k}_1, \omega^t_{\mathbf{k}_1};\ \mathbf{k} - \mathbf{k}_1, -\omega^t_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}})}{(\partial\omega\varepsilon^s(\omega, \mathbf{k}) / \partial\omega)_1 (\partial\omega^2\varepsilon^t(\omega, \mathbf{k}_1) / \partial\omega)_2} \times \tag{4.2}$$

$$\times\, 16(\omega^t_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}} + \operatorname{Re}\omega_{\mathbf{k}}^s) \frac{S_2(\mathbf{k}_1, \omega^t_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}} + \operatorname{Re}\omega^s_{\mathbf{k}};\ \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}, \omega^t_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}};\ \mathbf{k}, \operatorname{Re}\omega^s_{\mathbf{k}})}{(\partial\omega^2\varepsilon^t(\omega, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) / \partial\omega)_3}$$

Здесь нижние индексы у скобок 1, 2, 3 означают соответствующие подстановки значений $\omega$

$$\omega = \operatorname{Re}\omega_{\mathbf{k}}^s, \qquad \omega = \omega_{\mathbf{k}_1}^t, \qquad \omega = \omega^t_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}}$$

Обычно кинетическая нелинейная неустойчивость возникает, когда $\Delta\omega_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1} > \omega'$ (см. [4,5]), и подынтегральное выражение пропорционально $(-i\pi\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}))$. В случае $\omega_{\mathbf{k}}^s < (\nu_e m_e / m_i)$ из (2.15) и (2.17) следует:

$$u(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) = \frac{1.71\,(2\pi)^2 \nu_e \omega_{0e}^4}{8\omega^t_{\mathbf{k}_1}\omega^t_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}} 4\pi n_0 T_{0e}} \left(1 + \frac{(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k})^2}{k_1^2 |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}|^2}\right) \tag{4.3}$$

При получении (4.3) отбрасывались малые члены порядка $(k^2 v_{Te}{}^2 / \nu_e \omega_{\mathbf{k}}{}^s)$. Следовательно $(\mathrm{Re}\, u / \mathrm{Im}\, u) \sim (\gamma_s / \omega_{\mathbf{k}}{}^s)$, поэтому невозможно (см. [4]) возбуждение низкочастотных акустических колебаний распадного типа.

Если пучок поперечных волн имеет некий разброс по частотам $\Delta\omega_1$ и по углам $\Delta\mathbf{k}_1$, то пусть при изменении $\omega_1$ и $\mathbf{k}_1$ в указанных интервалах максимальное значение $\Delta\omega_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}$, есть $\Delta_1$, а $\max(\Delta\omega_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1+k}) = \Delta_2$. Соответствующие минимальные значения обозначим $\delta_1$ и $\delta_2$. Если $\delta_1$, $\Delta_1$ и $\delta_2$, $\Delta_2$ больше $\mathrm{Re}\, \omega_{\mathbf{k}}{}^s \lambda$, то возникает рассматриваемый новый вид нелинейной диссипативной неустойчивости.

Пусть $\delta_2, \Delta_2 > \delta_1, \Delta_1$, тогда

$$\omega' + i\gamma_s = i \frac{1.71 \nu_e \omega_{0e}{}^4}{(2\pi)^2 32\pi n_0 T_{0e}} \int a(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) \frac{N^t_{\mathbf{k}_1}}{\Delta\omega_{d\mathbf{k}_1}} d\mathbf{k}_1 \tag{4.4}$$

$$a(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) = \frac{1}{\omega^t_{\mathbf{k}_1} \omega^t_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}}} \left(1 + \frac{(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k})^2}{\mathbf{k}_1{}^2 |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}|^2}\right), \quad \Delta\omega_{\mathbf{k}_1} = \omega^t_{\mathbf{k}_1} - \omega^t_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}}$$

или

$$\omega' + i\gamma_s = -i \frac{1.71 \nu_e \omega_{0e}{}^4}{(2\pi)^2 32\pi n_0 T_{0e}} \int \left\{ \left( \mathbf{k} \frac{\partial a(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1)}{\partial \mathbf{k}_1} \right) - \frac{a(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1)}{\Delta\omega_{\mathbf{k}_1}} \left( \mathbf{k} \frac{\partial \Delta\omega_{\mathbf{k}_1}}{\partial \mathbf{k}_1} \right) \right\} N^t_{\mathbf{k}_1} \frac{d\mathbf{k}_1}{\Delta\omega_{\mathbf{k}_1}} \tag{4.5}$$

при $\delta_2, \Delta_2 \sim \delta_1, \Delta_1, k_1 \gg k$.

Формулы (4.4) и (4.5) позволяют оценить инкременты нелинейного возбуждения низкочастотных акустических волн, распространяющихся под острым углом к пучку поперечных волн. Оценка по формуле (4.4) дает

$$\gamma \sim \frac{\omega_{0e}}{16} \left( \frac{\omega_{0e}}{\omega^t} \right)^3 \frac{\nu_e}{kc} \frac{W^i}{n_0 T_{0e}} \qquad \text{при } \frac{k}{k_1} \gg \frac{v_{Ti}}{c} \tag{4.6}$$

учитывая, что $\nu_e m_e / m_i$, $\omega_{\mathbf{k}}{}^s > \gamma > \gamma_s$, получаем условия, при которых возможно возбуждение (4.6)

$$\left\{ \frac{m_e}{m_i}, \frac{k v_{Ti}}{\nu_e} \right\} > \frac{\omega_{0e}}{kc} \left( \frac{\omega_{0e}}{\omega^t} \right)^3 \frac{W^t}{n_0 T_{0e}} > \frac{k^2 v_{Te}{}^2}{\nu_e{}^2}$$

Аналогично могут быть получены оценки из (4.5).

Поступила 4 IX 1968

## ЛИТЕРАТУРА

1. Маханьков В. Г., Цытович В. Н. Кулоновские соударения частиц в турбулентной плазме. ЖЭТФ, 1967, т. 53, № 11.
2. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. В сб.: «Вопросы теории плазмы», М., Госатомиздат, 1963, т. 1.
3. Гинзбург В. Л., Гуревич А. В. Нелинейные явления в плазме, находящейся в переменном электромагнитном поле. Усп. физ. н., 1960, т. 70, вып. 2.
4. Маханьков В. Г., Цытович В. Н. Нелинейная генерация плазменных волн пучком поперечных волн. Препринт ОИЯИ, 1968, Р9-3980.
5. Цытович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме. М., «Наука», 1967.