

ОДИН КЛАСС ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

М. А. Гольдштик (Новосибирск)

Рассмотрим установившееся осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости. В цилиндрической системе координат оно описывается уравнениями

$$\begin{aligned} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \\ \frac{v_r}{r} \frac{\partial r v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_z}{r} \frac{\partial r v_\varphi}{\partial z} &= \nu \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial r v_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \right) \\ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{\partial r v_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Будем искать решение этой системы вида $v_\varphi = v_\varphi(r) \neq 0$; тогда $v_r = v_r(r)$, $v_z = z w(r)$. Подставив эти выражения в (1), получим

$$v_r \frac{d v_r}{d r} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \frac{d}{d r} \frac{1}{r} \frac{d r v_r}{d r} \quad (2)$$

$$\frac{v_r}{r} \frac{d r v_\varphi}{d r} = \nu \frac{d}{d r} \frac{1}{r} \frac{d r v_\varphi}{d r} \quad (3)$$

$$z v_r \frac{d w}{d r} + z w^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + z \frac{\nu}{r} \frac{d}{d r} r \frac{d w}{d r} \quad (4)$$

$$\frac{d r v_r}{d r} + r w = 0 \quad (5)$$

Из уравнений (2) и (4) следует, что $\rho^{-1} \partial p / \partial r = F(r)$, а $\rho^{-1} \partial p / \partial z = z f(r)$. Отсюда находим, что необходимо положить

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -4\delta a^2 z, \quad \delta = \pm 1, \quad a = \text{const} \quad (6)$$

Подставив (6) в (4), получим

$$v_r \frac{d w}{d r} + w^2 = 4\delta a^2 + \frac{\nu}{r} \frac{d}{d r} r \frac{d w}{d r} \quad (7)$$

Уравнения (5) и (7) образуют замкнутую систему, которая может быть решена независимо от уравнений (2) и (3). Последние будут служить для определения функций $p(r, z)$ и $v_\varphi(r)$ после нахождения $v_r(r)$. Таким образом, v_r и w не зависят от того, закручен поток или нет. Положим

$$r v_r = -\nu u, \quad x = a r^2 / 2\nu$$

Тогда уравнение (5) легко привести к виду

$$w = a d u / d x \quad (8)$$

После несложных преобразований уравнения (7) с учетом (8) получим одно уравнение третьего порядка, не содержащее параметров

$$2(x u'')' = u'^2 - u u'' - 4\delta \quad (9)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по x . Уравнение (3) после введения функции $\Phi = r v_\varphi$ преобразуется к виду

$$2x \Phi'' + u \Phi' = 0 \quad (10)$$

Будем искать однопараметрическое семейство решений уравнения (9), зависящее от параметра m и удовлетворяющее условиям

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = -m, \quad u''(0) \text{ — ограничено}$$

Нетрудно видеть, что для выполнения последнего условия необходимо положить

$$u''(0) = 1/2 (m^2 - 4\delta) \quad (11)$$

Рассмотрим два случая.

Первый случай $\delta = 1$. Для пяти значений m найдены точные решения¹

$$u \mp x = 2x \quad (m = \pm 2)$$

$$u = \pm 2x - 6(1 - e^{\mp x}) \quad (m = \pm 4)$$

$$u(\xi) = \xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{2^k n!}, \quad k = \frac{6n-1+(-1)^n}{4} \quad (m = \infty)$$

Для решения при $m \rightarrow \infty$ вводилась замена $\xi = mx$. Уравнение (9) принимает вид

$$2(\xi u'')' = u'^2 - uu'' - \frac{4}{m^2}$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = -1, \quad u''(0) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4}{m^2}\right)$$

Для остальных значений m решения получены численно на электронной машине М-20. Семейство интегральных кривых показано на фиг. 1. Кривые построены до значения x^* , соответствующего последнему корню функции $u(x)$. При $x > x^*$ во всех случаях наблюдался резкий рост функции $u(x)$ до значений, превышающих 10^{19} . Расчеты, проведенные для функции $s(x) = u^{-1}$, показали, что при некотором $x^{**} > x^*$ функция $s(x)$ изменяет знак. Это означает, что в окрестности точки x^{**} функция $u(x)$ становится неограниченной.

Интегральные кривые, отвечающие значениям $m = \pm 2$ и $m = 4$, являются в некотором смысле особыми: при стремлении к этим значениям соответствующие кривые хотя и приближаются к предельным, но неравномерно. Например, каково бы ни было $\epsilon > 0$ при $m = 2 \pm \epsilon$, начиная с некоторого x , будет $u(x) > 0$, хотя $u(x) = -2x$ при $m = 2$. При $m \ll -2$ интегральные кривые корней не имеют. Важно отметить, что при $3.782 < m < 4$ кривые имеют по три корня, не считая $x = 0$; при $-2 < m < 0$ — по два корня, в остальных случаях — по одному.

Второй случай $\delta = -1$. Интегральные кривые образуют монотонное семейство $u_k(x) > u_l(x)$, если $k < l$, где k и l — соответствующие значения параметра m . При $m > 0$ все кривые имеют по одному корню; при $m < 0$ корней нет.

Обратимся к уравнению (10). Его решение, удовлетворяющее условию $\Phi(0) = 0$, имеет вид

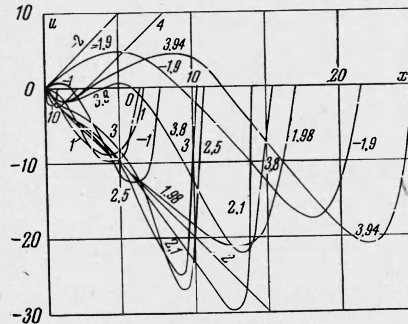
$$\Phi(x) = \Phi'(0) \int_0^x \exp\left(-\int_0^x \frac{u dx}{2x}\right) dx \quad (12)$$

$$\Phi = \pm \Phi'(0)(e^{\pm x} - 1) \quad \text{при } \delta = 1, \quad m = \pm 2$$

Для других значений m функция $I(x) = \Phi / \Phi'(0)$ вычислялась одновременно с $u(x)$.

Для гидродинамической интерпретации найденного класса решений уравнений Навье—Стокса рассмотрим две следующие задачи.

Задача А. Данная работа возникла в результате попытки создать модель течения в приосевой зоне вихревой камеры. Последняя представляет цилиндр с коаксиальным отверстием в одном из днищ. Вдоль нескольких образующих цилиндра прорезаны щели, сквозь которые в камеру подводится жидкость по тангенциальному направлению. Установлено [3], что в окрестности оси камеры образуется почти цилиндрическая зона радиуса r_0 , в которую первично подаваемая жидкость не проникает. При истечении капельной жидкости в воздух поверхность $r = r_0$ представляет собой поверхность разрыва, внутри которой возникает «воздушный вихрь». При истечении воздуха в воздух поверхность $r = r_0$ остается непроницаемой для основного потока. Если в области $r > r_0$ течение допускает приближенное описание при помощи схемы идеальной жидкости, то для зоны $r < r_0$, где имеют место сложные вторичные течения, в настоящее время теоретической модели несоздано.



Фиг. 1

¹ Для случаев $m = 2$ и $m = 4$ решения известны [1, 2].

Как установлено в [3] вдоль поверхности $r = r_0$, на которой $v_r = 0$, осевая скорость v_z изменяется практически линейно; $v_z = kz$, тангенциальная скорость остается приблизительно постоянной: $v_\varphi = v_0$.

Эти особенности потока в вихревой камере дают основание попытаться построить следующую модель течения в зоне $r < r_0$. Рассматривается полубесконечная труба радиуса r_0 и разыскивается движение вязкой жидкости, удовлетворяющее условиям

$$v_r = 0, \quad v_z = kz, \quad v_\varphi = v_0$$

$$\text{при } r = r_0; \quad v_z = 0 \quad \text{при } z = 0$$

$$v_r = v_\varphi = 0, \quad v_z < \text{const} \quad \text{при } r = 0 \quad (13)$$

Условия на бесконечности, равно как и условия прилипания на торце $z = 0$, не ставятся. Последнее обстоятельство может быть оправдано тем, что рассматривается либо течение вне торцевого пограничного слоя, либо симметричная конструкция вихревой камеры с выходными отверстиями в обоих днищах в такой камере срединная плоскость будет непроницаемой, но «абсолютно гладкой», и условия прилипания заменятся на условия симметрии

$$v_r(r, z) = v_r(r, -z), \quad v_\varphi(r, z) = v_\varphi(r, -z)$$

$$(r, -z), \quad v_z(r, z) = -v_z(r, -z) \quad (14)$$

Путем надлежащего выбора параметра m условия, кроме $w(r_0) = k$ и $v_\varphi(r_0) = v_0$, выполняются автоматически. Пусть $x_0 = \frac{1}{2} ar_0^2/v$ — какой-нибудь корень функции $u(x)$ и $N = u'(x_0)$. Условие $w(r_0) = k$ совместно с (8) приводит к соотношению $aN = k$, следовательно,

$$a = \frac{2vx_0}{r_0^2}, \quad R_1 = \frac{kr_0^2}{v} = 2x_0N \quad (15)$$

Здесь R_1 — число Рейнольдса, характерное для задачи А. Правая часть (15) зависит только от номера корня N и m . Поэтому можно построить зависимость $R_1(m)$, каковая и представлена на фиг. 2. Функция $R_1(m)$ состоит из семи ветвей, которым соответствуют следующие значения параметров:

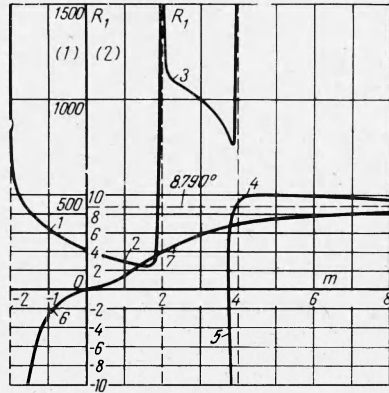
ветви	1	2	3	4	5	6	7
$\delta =$	1	1	1	1	1	1	-1
$N =$	2	1	3	1	2	1	1
интервал	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 4)$	$(3.782, \infty)$	$(3.782, 4)$	$(-2, 0)$	$(0, \infty)$

Ветви 1, 2 и 3 построены на фигуре в масштабе (1), остальные — в масштабе (2). Отрицательные значения R_1 соответствуют значениям $k < 0$. Из фиг. 2 можно усмотреть наиболее характерное свойство построенных решений — их неединственность. При значениях $-\infty < R_1 < 10.2$ число решений равно двум, в интервале $10.2 < R_1 < 142$ задача А решений данного класса не имеет. При $142 < R_1 < 731$ решений снова два, и, наконец, при $R_1 > 731$ число решений достигает четырех. На фиг. 3 представлены графики безразмерной функции $W = wr_0^2/v$ от r/r_0 , соответствующие значению $R_1 = 775$, когда задача имеет четыре решения. Расчеты производились на основе равенств

$$r/r_0 = \sqrt{x/x_0}, \quad wr_0^2/v = 2x_0u$$

Последнее является следствием (8).

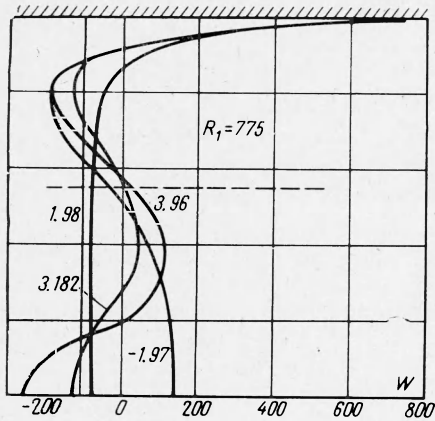
Наличие двух решений при $R_1 = 0$, с физической точки зрения, вполне закономерно, если учесть способ вычисления R_1 . Дело в том, что движению с $N = 0$ можно дать двойную интерпретацию. Его, во-первых, можно рассматривать как самостоятельное движение в трубе с неподвижной стенкой. Этот случай соответствует значению $m = 0$ и характеризуется покоем жидкости. Во-вторых, данный поток можно рассматривать как представляющий составную часть течения с $m = 3.782$ и $R_1 = 775$ и развивающийся внутри зоны $r < r_*$ (пунктир на фиг. 3). Если поверхность $r = r_*$, на которой $v_r = v_z = 0$, заменить твердой стенкой, то внутри зоны $r \leq r_*$ физически должен быть покой; если этого не делать, то там должно быть движение, так как $dw/dr \neq 0$ при $r = r_*$, и на жидкость в области $r \leq r_*$ будут действовать касательные усилия со стороны внешней части течения.



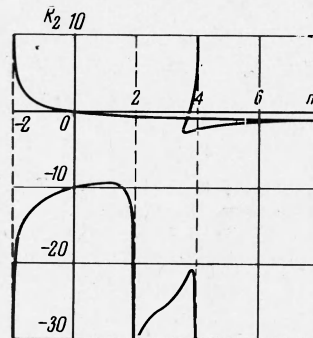
Фиг. 2

Движение жидкости в трубе обусловлено увлекающим действием стенки, поэтому только лишь те решения уравнения (9) могут иметь смысл решения задачи А, которые удовлетворяют условию $dw/dr > 0$ при $r = r_0$. Согласно этому требованию, часть ветви 4 на фиг. 2 для значений $3.782 < m < 3.92$ должна быть отброшена. Тогда на интервале $0 < R_1 < 8.5$ задача А будет иметь единственное решение, соответствующее ветви 7. Заметим, что этим решениям отвечают движения с положительным градиентом давления $\partial p / \partial z > 0$. Интересно отметить, что все четыре типа движений, представленных на фиг. 3, наблюдаются на опыте, правда, при различных условиях.

Задача Б. Рассмотрим полубесконечную трубу радиуса r_0 с неподвижной пористой стенкой. Пусть сквозь боковую поверхность трубы равномерно по всей ее длине вдувается жидкость со скоростью вдува $v_{r_0} = -\nu u_0 / r_0$. Если снова не ставить условия прилипания на торце, но потребовать, чтобы было $v_z(r, 0) = 0$, то задача све-



Фиг. 3



Фиг. 4

дется к отысканию таких решений уравнения (9), которые удовлетворяют условиям $u(0) = 0$; $u'(0)$ — ограничено; $u(x_0) = u_0$, где x_0 — корень функции $u'(x)$. Безразмерный параметр $u_0 = -r_0 v_{r_0} / \nu$ играет роль числа Рейнольдса, характерного для задачи Б. Положительным значениям u_0 соответствует вдув жидкости в трубу, отрицательным — отсос жидкости из трубы. Зависимость $R_2 = u_0(m)$ представлена на фиг. 4. Если потребовать, чтобы было $v_z \geq 0$, то при $R_2 \geq 0$ задача Б будет иметь единственное решение, отвечающее отрицательным значениям m .

Поступила 8 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Askereit J. Über exact Lösungen des Stokes-Navier-Gleichungen. Z. angew. Math. und Phys., 1952, No. 3.
2. Sullivan Roger D. A two-cell vortex colution of the Navier-Stokes equations. J. Aerospace Sci., 1959, vol. 26, No. 11, p. 767—768.
3. Гольдштик М. А., Леонтьев А. К., Палеев И. И. Аэродинамика вихревой камеры. Теплоэнергетика, 1961, № 2.

**ПОДЪЕМНАЯ СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА КОНТУР В ПЛОСКОМ
ОДНОРОДНО ЗАВИХРЕННОМ ПОТОКЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ИДЕАЛЬНОЙ
ЖИДКОСТИ**

И. Г. Друкер

(Новосибирск)

Рассматривается плоская задача обтекания контура однородно завихренным потоком несжимаемой невязкой жидкости. Для контуров, имеющих центр или ось симметрии, получен метод вычисления подъемной силы, действующей на контур, который сводит задачу об определении подъемной силы к обычной задаче обтекания данного контура потенциальным потоком жидкости.

В плоский бесконечный однородно завихренный поток несжимаемой невязкой жидкости помещен неподвижный контур (фиг. 1). Как показывает решение задачи для