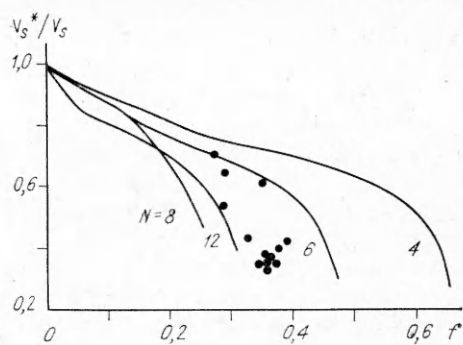


Р и с. 3



Р и с. 4

Для сравнения с расчетами приведем значения коэффициентов из (2):  $A_1 = 0,76$ ,  $A_2 = 0,089$ ,  $A_3 = 0,7$ ,  $A_4 = 0,057$ . Различия достаточно существенны, однако прослеживается более сильное влияние структуры порового пространства на скорости продольных волн. Количественные расхождения коэффициентов, если оставить в стороне допущения, положенные в основу теоретических построений, могут быть вызваны тем, что для определения удельной поверхности использовалась модель цилиндрических пор.

Таким образом, получены уравнения, связывающие скорости упругих волн в сухих консолидированных зернистых средах с коэффициентом Пуассона твердой фазы и параметрами структуры порового пространства — пористостью и произведением удельной поверхности на средний размер зерна. Показана возможность существования отрицательных значений коэффициента Пуассона для таких сред. На моделях зернистой среды из гранулированного ПММК экспериментально построены функциональные связи скоростей упругих волн с параметрами структуры порового пространства, качественно соответствующие расчетным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Заикин А. Д. Эффективные упругие модули зернистых сред // ПМТФ.— 1990.— № 1.
2. Gregory A. R. Fluid saturation effect on dynamic elastic properties of sedimentary rocks // Geophysics.— 1976.— V. 41, N 5.
3. Сибиряков Б. П. Об уравнениях движения зернистых сред // ПМТФ.— 1985.— № 5.
4. Панасенко Г. П. Осреднение процессов в сильно неоднородных структурах // ДАН СССР.— 1988.— Т. 298, № 1.
5. Грег С., Синг К. Адсорбция, удельная поверхность, пористость.— М.: Мир, 1984.
6. Заграфская Р. В., Карнаухов А. П., Фенелонов В. Б. Глобулярная модель пористых тел корпускулярного строения. III. Исследование случайных и частично упорядоченных упаковок шаров // Кинетика и катализ.— 1975.— Т. 16, вып. 6.

г. Новосибирск

Поступила 23/1 1990 г.,  
в окончательном варианте — 12/III 1991 г.

УДК 669.15 : 539.43

Г. В. Встовский

#### МОДЕЛЬ ФРАКТАЛЬНОГО ПРОФИЛЯ УСТАЛОСТНОЙ ТРЕЩИНЫ

Усталостное разрушение (УР) на сегодняшний день описывается с помощью эмпирически установленных закономерностей (например, закон Пэриса [1, 2]), и отсутствие универсальных физических моделей процесса УР затрудняет постановку экспериментов с целью выяснения влияния микро- и мезоскопических характеристик материалов на УР. В данной работе предпринята попытка описать УР как агрегацию, ограничен-

ную диффузией (АОД) [3, 4], микроповреждений в пластической зоне у вершины трещины, что дает возможность построить модель распространения усталостной трещины на основе итераций дискретного хаотического отображения. Такого рода подход к описанию УР требует привлечения нетрадиционных для механики разрушения характеристик (например, фрактальная размерность (ФР) поверхностей УР, характеризующая их геометрическое самоподобие [5]).

**1. Локальность процесса УР.** УР макроскопических образцов (деталей и т. п.) протекает при напряжениях, намного меньших предела текучести  $\sigma_T$ , ввиду сингулярного поведения напряжений вблизи вершины трещины, подчиняющихся в упругой области решениям Ирвина [1]. Обычно границу пластической зоны около вершины трещины определяют по критерию Мизеса

$$(1.1) \quad 3J_2 = \sigma_T^2$$

( $J_2$  — второй инвариант девиатора напряжений). В предлагаемой модели принимается, что все процессы УР происходят внутри пластической зоны с границей, определяемой формулой (1.1).

Из многочисленных фрактографических данных поверхностей УР [2] можно заключить, что продвижение усталостных трещин не является непрерывным процессом, а, скорее, дискретным, пошаговым, так как количество циклов в испытаниях на усталость, приходящихся на один характерный фрактографический размер, намного превышает единицу. Иными словами, продвижение усталостной трещины происходит после достижения в процессе циклирования в пластической зоне определенной степени повреждения материала. О долговечности пластической зоны можно судить, например, по данным [6], где показано, что в условиях этого эксперимента зависимость скорости продвижения усталостной трещины от числа циклов коррелирует с соответствующими зависимостями некоторых характеристик акустической эмиссии с опозданием на 5000 циклов (коэффициент корреляции больше 0,94), причем произведение этой величины на скорость продвижения трещины примерно равно размеру пластической зоны.

**2. Усталостное разрушение как АОД микроповреждений.** Накопление повреждений — один из каналов диссипации подводимой к образцу механической энергии. Представим себе, что этот процесс сродни АОД, и применим известную модель АОД [3] на основе эволюционных уравнений для концентраций кластеров микроповреждений  $C_M$  числа  $M$  соединившихся единичных повреждений (например, вакансий, но не обязательно):

$$(2.1) \quad \frac{dC_M}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M K(j, M-j) C_j C_{M-j} - C_M \sum_{i=1}^{\infty} K(M, i) C_i.$$

Напомним, что АОД — достаточно общая теория ввиду того, что радиус действия сил, связывающих «частицы» в агрегат, много меньше размера агрегата (не только из-за природы этих сил в случае близкого действия, но и вследствие эффекта экранирования), и поэтому свойства агрегата не должны зависеть от природы связывающих сил [7]. Кластер-кластерная модель АОД [3] аналогична описанию процессов рождения — гибели, а постановка задачи на основе уравнений для скоростей изменения концентраций подразумевает кинетический характер слияний микроповреждений.

Предлагаемая модель разрушения пластической зоны перед вершиной усталостной трещины состоит в следующем. В пластической зоне происходят накопление и слияние микроповреждений, эволюция которых описывается уравнениями (2.1) с мультипликативным ядром  $K(i, j) \sim (ij)^\omega$ . При  $\omega > 1/2$  из многочисленных кластеров различных размеров «выживает» один, который присоединяет к себе остальные [4]. Интуитив-

но этот случай отвечает вязкому УР. Решения уравнений (2.1) обладают свойствами:

$$(2.2) \quad \langle M \rangle \sim t^z, C_M \sim M^{-\tau} t^{-w}, z = 1/(1 - 2\omega), (2 - \tau)z = w$$

(угловые скобки означают статистическое усреднение).

Кроме того, учитывая, насколько конструктивным оказалось предположение о фрактальном характере как повреждения материала [8], так и агрегатов [4], положим

$$(2.3) \quad M \sim (R_M)^D$$

( $R_M$  — размер агрегата  $M$ ,  $D$  — ФР). Из свойств (2.2) находим  $(R_{(M)})^D \sim \langle M \rangle \sim t^z$ . Считая, что продвижение трещины происходит по достижении  $R_{(M)}$  критического размера, пропорционального, как и размер пластической зоны (см. ниже), длине трещины  $l$ , получим

$$dl/dN \sim R_{(M)}/t \sim (R_{(M)})^{1-D/z} \sim l^{1-D/z}$$

( $N$  — число циклов). Сравнение с законом Пэриса  $dl/dN \sim K_I^n \sim l^{n/2}$  ( $K_I$  — коэффициент интенсивности напряжений (КИН) [1]) дает

$$(2.4) \quad n = 2 + D2(2\omega - 1).$$

Известна также зависимость плотности общей энергии деформации в эксперименте по УР  $\Delta W_f$  от числа циклов до разрушения  $N_f$  [9]:

$$(2.5) \quad \Delta W_f = kN_f^\alpha + c$$

( $k, c, \alpha$  — константы материала), которую можно объяснить следующим образом. Пусть на некотором интервале длины трещины от  $l_0$  до  $l_c$ , при которой происходит разрушение, трещина продвигается равномерными шагами  $s$  и на каждом шаге плотность энергии деформации составляет  $W_1$ . В случае нагружения трещины по первой моде в приближении цилиндрической симметрии с осью симметрии вдоль фронта трещины имеем  $W_1 \sim s^2$ . Тогда общая плотность энергии деформации составит сумму по шагам продвижения. При частоте циклирования  $\nu$  с учетом (2.2), (2.3) получим

$$\sum_{N_s} W_1 \sim \sum_{N_s} s^2 \sim \sum_{t_1} t^{2z/D} \sim \sum_{N_1} (N_1 \nu)^{2z/D} \sim \sum_{N_s} (N_f \nu / N_s)^{2z/D}$$

( $N_s$  — число шагов продвижения,  $t_1$  и  $N_1$  — время и число циклов, затраченных на каждом шаге). Эта простейшая модель дает соотношение между ФР и показателем  $\alpha$ :

$$(2.6) \quad (2\omega - 1)D = -2/\alpha.$$

По данным [9],  $\alpha = -0,665$ , откуда для  $\omega = (1 - 2/(\alpha D))/2$  находим  $\omega \approx 1,5 > 1/2$ , что качественно отвечает сделанному выше предположению относительно  $\omega$  и вязкому характеру разрушения низколегированной стали ASTM A 516 Gr 70, для которой получена зависимость (2.5) [9]. Таким образом, предлагаемая модель дает качественную интерпретацию неочевидной отрицательности показателя  $\alpha$ .

Соотношения (2.4) и (2.6) можно трактовать как «однопоказательный» скейлинг, аналогичный двухпоказательному скейлингу в теории фазовых переходов, что предполагает взгляд на УР как на одно из критических явлений, для которых естественно образование фрактальных структур в критических условиях. Описанная модель УР также позволяет упрощенно считать, что трещина продвигается за равные промежутки времени на величину

$$(2.7) \quad s \sim l^\gamma, \gamma \cong n/2,$$

что можно использовать для моделирования макроскопической динамики УР. Случай  $\omega < 1/2$ , интуитивно отвечающий хрупкому разрушению,

требует существенного усложнения модели продвижения вершины трещины.

**3. Модель распространения усталостной трещины.** Для определенности рассмотрим усталостную трещину, нагружаемую по первой моде. Как известно [1], зарождение усталостных трещин происходит в плоскостях, не перпендикулярных направлению наибольших растягивающих напряжений, но макроскопическая трещина распространяется именно перпендикулярно растягивающим напряжениям. Поэтому, для того чтобы с помощью критерия Мизеса (1.1) выделить локальную зону УР, нужно записать напряжения в виде суперпозиции как минимум двух мод нагружения [1, 10]:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - A \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right], \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + A \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right], \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + A \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right], \\ \sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y), \quad A = K_{II}/K_I \end{aligned}$$

(все обозначения общеприняты). Тогда второй инвариант девиатора имеет вид

$$(3.2) \quad J_2 = \frac{\nu^2 - \nu + 1}{3} (\sigma_x + \sigma_y)^2 - \sigma_x \sigma_y + \tau_{xy}^2.$$

Подстановка (3.1), (3.2) в (1.1) дает уравнение границы локальной зоны УР  $r(\theta)$ . Внутри этой зоны упругие решения (3.1), как и критерии линейной механики разрушения, неверны. Но в условиях автомодельного роста трещины, соответствующих второй стадии УР, когда оно контролируется  $K_I$ , можно полагать, что течение процессов УР в пластической зоне определяется ее величиной и конфигурацией. Примем, что накопление повреждений в зоне происходит как АОД, описываемая уравнениями (2.1) с мультипликативным ядром ( $\omega > 1/2$ ), кластер повреждений разрушается в направлении максимума  $r(\theta)$  и шаг продвижения трещины подчиняется зависимости (2.7). Тогда продвижение трещины можно моделировать итерациями дискретного отображения:

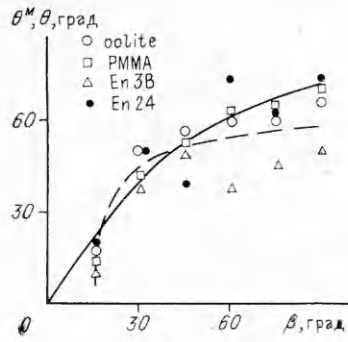
$$(3.3) \quad \begin{aligned} \varphi_{m+1} &= \varphi_m + \theta_m^M, \quad l_{m+1} = l_m + s_m \cos \varphi_m, \quad K_{I,m+1} = \sigma_\infty \sqrt{\pi l_{m+1}}, \\ K_{II}/K_I &= \lambda(l) \sin(-\varphi_m), \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Здесь  $\varphi_m$  — угол между перпендикуляром к растягивающим напряжениям на удалении от вершины трещины  $\sigma_\infty$  и отклонившимся кончиком трещины на шаге  $m$ ;  $\theta_m^M$  — угол, отвечающий максимуму  $r(\theta)$ ;  $\lambda(l)$  — функция, учитывающая соотношение первой и второй мод нагружения с изменением  $\varphi_m$  и длины трещины. Примем, что  $K_I$  не зависит от  $\varphi_m$  [11], а  $K_{II} \cong \sigma_\infty \sin(-\varphi_m) \sqrt{\pi s}$ . Например, можно принять  $\lambda(l) = \chi \sqrt{s/l}$ , где  $\chi$  учитывает усиление второй моды на включениях, границах зерен и прочих неоднородностях.

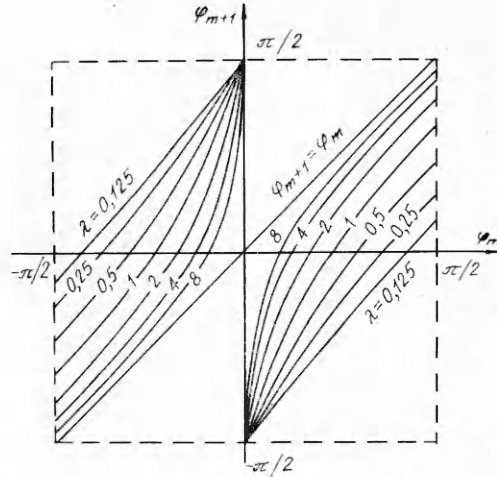
К сожалению, упростить (1.1) после подстановки (3.1), (3.2) так, чтобы можно было найти  $\theta^M$  аналитически, удастся только для несжимаемой среды ( $\nu = 1/2$ ), когда

$$J_2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2/4 + \tau_{xy}^2.$$

Такое же выражение для  $J_2$  получается, если считать тензор и девиатор напряжений четырехкомпонентными. При этом у функции  $r(\theta)$ , описывающей границу пластической зоны, есть два отличающихся на  $\pi$  максимума, из которых выберем один, соответствующий продвижению трещины в направлении, компенсирующем имеющееся отклонение от основной плоскости трещины. Такой выбор оправдан тем, что, как нетрудно ви-



Р и с. 1



Р и с. 2

деть, между отклонившимся кончиком трещины и основным ее направлением (перпендикулярно  $\sigma_\infty$ ) материал испытывает растяжение в двух направлениях  $x$  и  $y$ , а с другой стороны кончика — сжатие в одном направлении и растяжение в другом. С учетом вышеизложенного при  $\nu = 1/2$  находим

$$(3.4) \quad r(\theta) = \frac{3K_I^2}{2\pi\sigma_T^2} \left[ \frac{\sin^2 \theta}{4} (1 + A^2) + A \cos \theta (\sin \theta + A \cos \theta) \right],$$

$$\theta_m^M = \text{arctg} (\text{sign}(-\varphi_m) \sqrt{z^2 + 1} - z), \quad z = (3A^2 - 1)/(4A),$$

$$A = K_{II}/K_I = \lambda(l) \sin(-\varphi_m).$$

На рис. 1 воспроизведены данные [11] по четырехточечному изгибу брусков из различных материалов,  $\beta = \pi/2 - \varphi$ . Сплошная линия — зависимость угла продвижения трещины  $\theta$ , отвечающая критерию Эрдогана — Си [11], штриховая соответствует (3.4) с отношением  $K_{II}/K_I$ , вычисленным применительно к условиям эксперимента [11]. Удовлетворительное согласие, особенно при малых  $\beta$  (больших  $\varphi$ ), оправдывает использование (3.4). Для завершения построения модели нужно задать величину  $s$ , которую будем вычислять согласно (2.7) по формуле  $s = \xi(r(\theta^M))^{\nu}$ . Примем, что трещина продвигается на максимальный размер  $r_c(\theta^M)$  при  $K_I = K_{Ifc}$  или

$$r_c(\theta^M) = r_c^M = \frac{3K_{Ifc}^2}{2\pi\sigma_T^2},$$

откуда

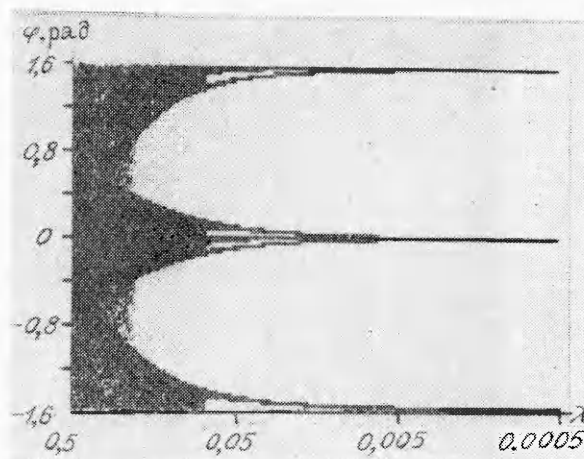
$$(3.5) \quad s = r_c^M [r(\theta^M)/r_c^M]^{\nu}$$

( $r_c^M$  можно рассчитывать через критическую длину трещины  $l_c$ , отвечающую  $K_{Ifc} = \sigma_\infty \sqrt{\pi l_c}$ ).

Численное итерирование (3.3)—(3.5) с регистрацией продвижения трещины через 100 шагов при  $(\sigma_\infty/\sigma_T)^2 = 9,26 \cdot 10^{-4}$ ,  $l_c = 50$  мм, начальной длине трещины  $l_0 = 5$  или 15 мм,  $\nu = 1 \div 3$  дает линейный график в координатах  $\lg(dl/dN) - \lg(K_I)$  (кинетическая диаграмма усталостного разрушения [2]) с наклоном (показателем Пэриса)  $n = 2\nu$  с точностью лучше 0,2 %, что говорит о «хороших» хаотических свойствах отображения, подробно описанных ниже.

**4. Хаотические свойства отображения  $\varphi_{m+1}(\varphi_m)$ .** Для исследования свойств данного отображения упростим (3.3)—(3.5), фиксировав величину  $\lambda$ . На рис. 2 приведена функция  $\varphi_{m+1}(\varphi_m)$  при различных  $\lambda$ . Разрыв при  $\varphi_m = 0$ , обусловленный симметрией пластической зоны, делает отображение похожим на так называемый сдвиг Бернулли [12] — ку-

сочно-линейное хаотическое отображение, итерации которого эквивалентны некоторой реализации последовательности бросаний монеты. На рис. 3 представлена бифуркационная диаграмма отображения  $\varphi_{m+1}(\varphi_m)$  с фиксированным  $\lambda$ , дающая представление о его инвариантной плотности, неоднородной даже при значениях  $\lambda > 0,3$ , отвечающих «хорошим» хаотическим режимам. Но и при меньших  $\lambda$ , когда на диаграмме отчетливо видны «рукава», показатель Ляпунова этого отображения остается хотя и малым, но положительным, примерно равным  $\lambda$ , т. е. отображение  $\varphi_{m+1}(\varphi_m)$  хаотическое, что уже само по себе оправдывает критерий выбора  $\theta^M$ , а также позволяет надеяться на возможность статистического учета влияния тех или иных особенностей материала на УР введением дополнительных параметров в модель.



Р и с. 3

Отображение  $\varphi_{m+1}(\varphi_m)$ , построенное с использованием критерия Эрдогана — Си (направление максимума  $\sigma_\theta$  [11]), дает только одну бифуркацию при  $\lambda = 1$  устойчивого при  $\lambda < 1$  значения  $\varphi_m = 0$ , что не позволяет использовать этот критерий для построения универсальной модели УР. При применении критерия Треска (зарождение трещин по углам максимума  $\tau_{xy}$ ) найти угол  $\theta^T$  ( $\varphi_{m+1} = \varphi_m + \theta^T$ ) так же, как и в случае общего вида  $J_2$  (3.2), аналитически не удается.

Таким образом, реальный процесс распространения усталостной трещины моделируется установившимся состоянием некоторой динамической системы, соответствующим [13] установившемуся состоянию отображения (3.3)—(3.5). Исследование этого отображения представляет самостоятельную задачу (например, из-за спонтанного нарушения симметрии при  $0,01 < \lambda < 0,1$  на рис. 3, которое может быть связано с неконсервативностью отображения, т. е. отсутствием гамильтониана, что качественно отвечает диссипативности УР) и выходит за рамки данной работы.

**5. Фрактальные свойства модели.** Хаотичность отображения (3.3)—(3.5) позволяет предположить геометрическое самоподобие модельных профилей трещины — фрактальность. Как видно из рис. 2, при больших  $\lambda$  «траектория» трещины на плоскости  $(\varphi_m, \varphi_{m+1})$  будет дольше оставаться в первом или третьем квадрантах, чем при меньших  $\lambda$ , т. е.  $\lambda$  должна влиять на геометрические характеристики профиля трещины, например на его ФР.

В табл. 1 приведены данные вычисления ФР профилей по методике, описанной в приложении, при различных фиксированных  $\lambda$ ,  $\gamma = 1,5$ . Видно, что между  $\lambda$  и ФР  $D$  есть определенная корреляция. При  $\lambda < 0,2$

Таблица 1

$\lambda$	$D$
1,5	1,0881
1,0	1,0635
0,5	1,0605
0,2	1,1560

Таблица 2

$\gamma$	$D$	$\Delta\lambda$
1	1,0951	0,3—0,5
2	1,1202	0,2—0,3
3	1,1524	0,13—0,15

«самоподобный» пологий участок фрактального графика приобретает характер разрыва, что указывает на проявление квазипериодических свойств отображения — блуждания по «рукавам».

В случае полного отображения (3.3)—(3.5) и фиксированного  $\chi$  ФР профилей зависит от  $\gamma$ . В табл. 2 представлены данные по корреляции  $\gamma$  и  $D$  при  $\chi = 20$  ( $\Delta\lambda$  — примерный диапазон изменения функции  $\lambda(l)$ ). Положительная корреляция  $\gamma$  и  $D$  качественно отвечает формуле (2.4), так как с хорошей точностью можно считать  $n = 2\gamma$ , что уже отмечалось выше. По мере продвижения трещины  $\lambda$  растет как  $l^{(\gamma-1)/2}$ , поэтому в принципе можно смоделировать переход от периодического режима распространения усталостной трещины (усталостные бороздки [2]) к полностью хаотическим режимам с  $\lambda > 0,3$ . В предложенную модель также легко заложить фиксацию размера пластической зоны, обусловленную структурными особенностями некоторых материалов.

Предлагаемый подход к моделированию распространения усталостных трещин на основе дискретных хаотических отображений представляет широкий спектр возможностей для отражения в модели эмпирических закономерностей УР (закон Паррса, усталостные бороздки и пр.) [14]. Без принципиальных трудностей модель можно обобщить на случай сложных полей напряжений или одновременного распространения нескольких усталостных трещин, что открывает путь к численному исследованию УР конкретных деталей и конструкций.

Автор выражает признательность И. Ж. Бунину, уточнившему некоторые выкладки, а также профессору В. С. Ивановой и В. Н. Гемининову за плодотворные дискуссии и консультации.

**Приложение. Прямое вычисление ФР профилей.** В настоящее время разработано много алгоритмов вычисления ФР профилей, наиболее точными из которых являются алгоритмы метода расширения [15, 16]. Последние, однако, требуют значительных затрат машинного времени, так как практически обрабатывают двумерный нерегулярный объект в отличие от алгоритмов метода связки [15], имеющих дело с самим профилем в оцифрованном виде. Недостаток метода связки — нерегулярность фрактального графика и, следовательно, низкая точность вычисления ФР. Ниже описана методика, которую можно назвать промежуточной между двумя упомянутыми типами алгоритмов, так как в ней обрабатывается «одномерный» профиль, но логика построения алгоритма близка к методам расширения.

В реальных исследованиях имеют дело с профилем, превращенным после оцифровывания в последовательность сегментов с заданными координатами точек их пересечения — изломов ломаной. Один из вариантов метода расширения — подсчет числа дисков некоторого размера, укладываемых вдоль такой ломаной так, чтобы они касались друг друга и ломаной, и определение ФР по наклону двухлогарифмической зависимости числа дисков от их размера [5, 15]. Сместив цепочку дисков таким образом, чтобы как можно больше центров дисков находилось на ломаной, и соединив их центры отрезками, получим другую ломаную с заданной длиной отрезков, аппроксимирующую исходную. Такую аппроксимацию можно получить более простым и наглядным образом: выбрав на исходной ломаной точку, отложить из нее отрезок заданного размера так, чтобы другой конец отрезка принадлежал исходной ломаной и между его концами заключался кусок профиля **максимально возможной длины**, из этого конца отложить следующий отрезок и т. д. Эта цепочка аппроксимирует исходную ломаную подобно цепочке после соединения центров смещенных дисков, но отлично от метода связки, что хорошо видно из рисунков в [5, 15, 17].

Алгоритм построения такой аппроксимации исходной ломаной (профиля) элементарен и не требует таких затрат машинного времени, как алгоритмы метода расширения [16]. Кроме того, он довольно точно имитирует экспериментальные измерения шероховатости профиля на профилметре с различными размерами чувствительного элемента [18]. ФР

Таблица 3

Методика	Измеренная $D$	Отклонение
Минковский — Булиганд	1,356	0,144
Подсчет ячеек	1,413	0,087
Метод спектральной плотности	1,449	0,051
Метод горизонтального структурного элемента	1,537	0,037
Метод вариации	1,495	0,005
Методика данной работы	1,4698	0,0302

определяется по наклону зависимости  $\lg(N\varepsilon/L')$  от  $\lg \varepsilon$  ( $N$  — число отрезков длины  $\varepsilon$ , требуемых для аппроксимации ломаной с длиной проекции  $L'$  [18]). В табл. 3 приведены данные вычисления ФР кривой Кисветтера с помощью различных методик и отклонения от точного значения  $D = 1,5$ . Предложенная методика дает регулярный фрактальный график с коэффициентом корреляции точек прямолинейного участка 0,9881 [14]. Как видно из табл. 3, она вполне может конкурировать с алгоритмами расширения по точности определения ФР профилей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Хеллан К. Введение в механику разрушения. — М.: Мир, 1988.
2. Иванова В. С., Шаняевский А. А. Количественная фрактография. Усталостное разрушение. — Челябинск: Металлургия, 1988.
3. Kang K., Redner S., Meakin P., Leyvraz F. Long-time crossover phenomena in coagulation kinetics // Phys. Rev. A. — 1986. — V. 33, N 2.
4. Жюльен Р. Фрактальные агрегаты // УФН. — 1989. — Т. 157, вып. 2.
5. Mandelbrot B. V. The fractal geometry of nature. — N. Y.: Freeman, 1984.
6. Нефедьев Е. Ю., Волков В. А., Ляшков А. И., Савельев В. Н. Контроль роста усталостной трещины в литой стали методом акустической эмиссии // Пробл. прочности. — 1987. — № 11.
7. Witten T. A., Sander L. M. Diffusion limited aggregation, a kinetic critical phenomenon // Phys. Rev. Lett. — 1981. — V. 47, N 19.
8. Anderson T. L. Application of fractal geometry to damage development and brittle fracture in materials // Scr. Met. — 1989. — V. 23, N 1.
9. Golos K., Ellyin F. Total strain energy density as a fatigue damage parameter // Adv. Fatigue Sci. and Technol.: Proc. NATO Adv. Study Inst. Conf., Alvor, Apr. 4–15, 1988. — Dordrecht etc., 1989.
10. Frdogan F. Stress intensity factors // J. Appl. Mech. — 1983. — V. 50. — P. 992.
11. Maccagno T. M., Knott J. F. Brittle fracture under mixed I // mode II loading // ECF6: Fract. Contr. Eng. Struct.: Proc. 6th Bienn. Conf., Amsterdam, June 15–20, 1986. — Amsterdam: Varley, 1986. — V. 2.
12. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. — М.: Мир, 1988.
13. Паркер Т. С., Чжун Л. О. Введение в теорию хаотических систем для инженеров // ТИИЭР. — 1987. — Т. 75, № 8.
14. Ветовский Г. В. Фрактальная модель усталостного разрушения: Дис. канд. физ.-мат. наук. — М., 1990.
15. Wright K., Karlson B. Fractal analysis and stereological evaluation of microstructures // J. Microscopy. — 1983. — V. 129, pt 2.
16. Dubuc B., Quiniou J. F., Roques-Carnes C. et al. Evaluating the fractal dimensions of profiles // Phys. Rev. A. — 1989. — V. 39, N 3.
17. Benerji K. Quantitative fractography: A modern perspective // Metall. Trans. A. — 1988. — V. 19A. — P. 961.
18. Underwood E. E., Banerji K. Fractals in fractography // Mater. Sci. Eng. — 1986. — V. 80, N 1.

г. Москва

Поступила 4/V 1989 г.,  
в окончательном варианте — 9/I 1991 г.