

Регистрация ЧС позволяет рассматривать процесс пробоя длинного разрядного промежутка несколько под иным углом зрения: не как движение стримера, переносящего заряд, а как создание в результате действия пробойных волн [5] и коронных процессов [6] цепочки локальных зарядов, которые создаются по всей зоне ионизации на фронте пробоя. Поочередное включение локальных зарядов в проводящий канал лидера при фоторегистрации выглядит как его ступенчатое распространение. Локальные заряды на реализованной траектории лидера компенсируются за времена порядка $1 \cdot 10^{-8}$ с, при остановке фронта пробоя либо на альтернативных траекториях лидера такой компенсации не происходит. Здесь локальные заряды распадаются с излучательной рекомбинацией, благодаря которой становится возможной регистрация ЧС в незавершенной стадии как в СИ, так и в молнии.

В изгибах канала разряда (см. рис. 3) зона ионизации увеличивается, образующиеся локальные заряды здесь также не компенсируются в сильноточной стадии. По-видимому, наоборот, есть возможность их дальнейшего формирования и роста, особенно в распадающейся плазме сильноточного разряда. Вопросы локализации заряда, строения локальных зарядов и времени рекомбинации пока неясны и требуют дальнейшего изучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барри Дж. Шаровая молния и четочная молния. — М.: Мир, 1983.
2. Сингер С. Природа шаровой молнии. — М.: Мир, 1973.
3. Андреев С. И., Зобов Е. А., Сидоров А. Н. Метод управления развитием и формированием систем параллельных каналов скользящих искр в воздухе при атмосферном давлении // ПМТФ. — 1976. — № 3.
4. Горин Б. Н., Шкилев А. В. Развитие электрического разряда в длинных промежутках стержень — плоскость при отрицательном импульсном напряжении // Электричество. — 1974. — № 10.
5. Асиновский Э. И., Василяк Л. М., Марковец В. В. и др. Волновой пробой газовых промежутков. 1. Быстрые стадии пробоя // ТВТ. — 1983. — № 2.
6. Стекольников И. С. Природа длинной искры. — М.: Изд-во АН СССР, 1960.
7. Юман М. Молния. — М.: Мир, 1960.
8. Мик Дж., Крэгг Дж. Электрический пробой в газах. — М.: ИЛ, 1960.
9. Фортв В. Е., Якубов И. Т. Физики неидеальной плазмы. — Черноголовка: ИВТАН СССР, 1984.
10. Кобзев Г. А., Куриленков Ю. К., Норман Г. Э. К теории оптических свойств неидеальной плазмы // ТВТ. — 1977. — № 2.
11. Куриленков Ю. К. О влиянии неидеальности на коэффициент рекомбинации плотной плазмы // ТВТ. — 1980. — № 2.

г. Ленинград

Поступила 4/IV 1988 г.,
в окончательном варианте — 30/VIII 1988 г.

УДК 537.311:537,8

Ю. П. Емец, Ю. В. Обносов

ТОЧНО РАЗРЕШИМАЯ ЗАДАЧА О ВЗАИМНОМ ВЛИЯНИИ ВКЛЮЧЕНИЙ В ТЕОРИИ ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД

1. Введение. Один из принципиальных вопросов теории дисперсных смесей при исследовании физических полей состоит в корректном учете влияния включений друг на друга. В реальных гетерогенных средах эта проблема осложняется различием форм и размеров включений, разнообразием образуемых ими структур, отличием свойств материалов составных компонентов и несущей фазы. В совокупности всего многообразия действующих факторов расчеты полей в неоднородных средах практически неосуществимы, и для упрощения вычислений необходимо принимать ряд допущений. Если, например, характерные размеры включений малы и не очень сильно отличаются друг от друга, то обычно делается предположение, что все элементы дисперсной фазы одинаковы и имеют правильную форму в виде шаров, эллипсоидов или цилиндров. Как известно, поле в отдельно взятых таких телах однородно, когда они помещены в однородное внешнее поле. Это свойство используется при изучении гетерогенных сред с малой концентрацией включений. Если, кроме того, характеристики материала включений изменяются в узких пределах, то все они могут считаться однотипными.

Таким образом, дисперсная смесь в первом приближении рассматривается как двухкомпонентная или в общем случае двухфазная система, состоящая из матрицы и односортовых включений.

Для трехкомпонентных сред с двухразмерными включениями полевые задачи становятся многопараметрическими, и их решения чрезвычайно усложняются. Представления об обобщенных параметрах таких гетерогенных систем и уяснение характера протекающих в них процессов можно получить из анализа некоторых модельных задач. Решению одной из подобных задач, вытекающей из исследований неоднородных пленок или тонких покрытий, посвящена настоящая работа (результаты будут справедливы также для объемных композитов, армированных одинаково ориентированными нитями, если поля рассчитываются в поперечной плоскости).

Решается задача об определении электрического поля в проводящей среде, содержащей два произвольным образом расположенных круговых включения, электрические сопротивления и радиусы которых различны. При наличии внешнего магнитного поля во всех трех компонентах может проявляться эффект Холла. Отметим, что исследование этой задачи в случае пересекающихся однотипных включений алгебрологическим методом с использованием R -функций изложено в [1, 2].

В настоящей работе искомое двумерное электрическое поле эффективно рассчитывается методами теории функций комплексного переменного, позволяющими получить замкнутое аналитическое решение, без каких-либо ограничений на условия задачи. Хотя вычисления проведены для расчета электрического поля, в силу известной аналогии уравнений вполне сходным образом могут быть изучены тепловые, диффузионные, магнитные и другие физические поля.

2. Постановка и решение задачи. Пусть в неограниченной среде с удельным электрическим сопротивлением ρ_0 имеется два круговых включения с радиусами r_1 и r_2 и сопротивлениями соответственно ρ_1 и ρ_2 (рис. 1, а). Центры круговых включений расположены в точках $z = 0$ и $z = h > r_1 + r_2$ ($z = x + iy$). Необходимо найти распределение тока внутри включений и в их окрестности при произвольном направлении внешнего тока J , который считается заданным.

В каждой из трех областей векторы плотности тока \mathbf{j} и напряженности электрического поля \mathbf{E} потенциальны и соленоидальны, поэтому в плоскости переменной z можно ввести голоморфные функции $j(z) = j_x(x, y) - ij_y(x, y)$ и $E(z) = E_x(x, y) - iE_y(x, y)$, связь между которыми дается законом Ома $E(z) = \rho j(z)$, совпадающим по виду в силу вещественности параметра ρ с векторной формой $\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$. Полевые уравнения $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ и $\text{div } \mathbf{j} = 0$ при этом приводят к условиям Коши—Римана для функций $j(z)$ и $E(z)$.

На границе разнородных сред выполняются условия омического контакта — непрерывность нормальных составляющих вектора тока \mathbf{j} и касательных составляющих вектора поля \mathbf{E} .

Таким образом, в плоскости $z = x + iy$ необходимо определить кусочно-голоморфную функцию

$$(2.1) \quad j(z) = \begin{cases} j_0(z), & z \in S_0 = \{z: |z| > r_1, |z - h| > r_2\}, \\ j_1(z), & z \in S_1 = \{z: |z| < r_1\}, \\ j_2(z), & z \in S_2 = \{z: |z - h| < r_2\}, \end{cases}$$

удовлетворяющую краевым условиям

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \text{Re}\{n(t)j_0(t)\} &= \text{Re}\{n(t)j_k(t)\}, \\ \text{Im}\{n(t)\rho_0 j_0(t)\} &= \text{Im}\{n(t)\rho_k j_k(t)\}, \quad t \in L_k \quad (k = 1, 2). \end{aligned}$$

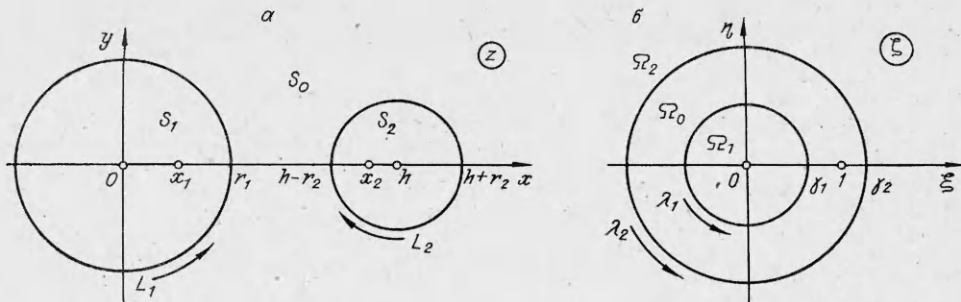


Рис. 1

Здесь $n(t)$ — единичная нормаль к контуру $L = L_1 \cup L_2$:

$$n(t) = \frac{t}{r_1}, \quad t = r_1 e^{i\theta}, \quad t \in L_1,$$

$$n(t) = \frac{t-h}{r_2}, \quad t = h + r_2 e^{i\theta}, \quad t \in L_2, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

На основании последних равенств и тождеств $\bar{t} = r_1^2/t$, $t \in L_1$, $\bar{t-h} = r_2^2/(t-h)$, $t \in L_2$, получаемых преобразованием инверсии, граничные условия (2.2) можно переписать в развернутой форме

$$(2.3) \quad j_0(t) + \left(\frac{r_1}{t}\right)^2 \overline{j_0(\bar{t})} = j_1(t) + \left(\frac{r_1}{t}\right)^2 \overline{j_1(\bar{t})},$$

$$\rho_0 j_0(t) - \rho_0 \left(\frac{r_1}{t}\right)^2 \overline{j_0(\bar{t})} = \rho_1 j_1(t) - \rho_1 \left(\frac{r_1}{t}\right)^2 \overline{j_1(\bar{t})}, \quad t \in L_1,$$

$$\bar{j}_0(t) + \left(\frac{r_2}{t-h}\right)^2 \overline{\bar{j}_0(\bar{t})} = \bar{j}_2(t) + \left(\frac{r_2}{t-h}\right)^2 \overline{\bar{j}_2(\bar{t})},$$

$$\rho_0 \bar{j}_0(t) - \rho_0 \left(\frac{r_2}{t-h}\right)^2 \overline{\bar{j}_0(\bar{t})} = \rho_2 \bar{j}_2(t) - \rho_2 \left(\frac{r_2}{t-h}\right)^2 \overline{\bar{j}_2(\bar{t})}, \quad t \in L_2.$$

Черта над переменной или функцией означает комплексное сопряжение.

Внешний электрический ток J , протекающий в системе, задается своим значением на бесконечности

$$(2.4) \quad j(\infty) = j_0(\infty) = J = J_x - iJ_y.$$

Краевые условия несколько упрощаются, если из каждой пары равенств (2.3) исключить функцию $\bar{j}_0(\bar{t})$:

$$(2.5) \quad 2\rho_0 j_0(t) = (\rho_0 + \rho_1) j_1(t) + (\rho_0 - \rho_1) \left(\frac{r_1}{t}\right)^2 \overline{j_1(\bar{t})}, \quad t \in L_1,$$

$$2\rho_0 \bar{j}_0(t) = (\rho_0 + \rho_2) \bar{j}_2(t) + (\rho_0 - \rho_2) \left(\frac{r_2}{t-h}\right)^2 \overline{\bar{j}_2(\bar{t})}, \quad t \in L_2.$$

Нетрудно доказать, что условия (2.3) и (2.5) эквивалентны. Краевая задача (2.5) относится к частному случаю задачи Маркушевича или, как ее еще называют, обобщенной задачи сопряжения [3, с. 222].

Для последующего анализа результатов удобно ввести относительные величины удельных сопротивлений неоднородных включений

$$\Delta_{0k} = (\rho_0 - \rho_k)/(\rho_0 + \rho_k), \quad -1 \leq \Delta_{0k} \leq 1 \quad (k = 1, 2).$$

Тогда граничные соотношения (2.5) примут вид

$$(2.6) \quad (1 + \Delta_{01}) j_0(t) = j_1(t) + \Delta_{01} (r_1/t)^2 \overline{j_1(\bar{t})}, \quad t \in L_1,$$

$$(1 + \Delta_{02}) \bar{j}_0(t) = \bar{j}_2(t) + \Delta_{02} (r_2/(t-h))^2 \overline{\bar{j}_2(\bar{t})}, \quad t \in L_2.$$

Ниже приводится решение краевой задачи (2.6), которое в отличие от общего случая задачи Маркушевича удается построить в явном виде. Предварительно необходимо конформно отобразить внешность круговых включений S_0 на концентрическое кольцо. Такое отображение осуществляется, как известно, дробно-линейной функцией

$$(2.7) \quad \zeta = T^{-1}(z) = (z - x_1)/(z - x_2), \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

где x_1 и x_2 — точки, симметричные относительно обеих окружностей L_1 и L_2 :

$$(2.8) \quad x_1 x_2 = r_1^2, \quad (h - x_1)(h - x_2) = r_2^2.$$

Согласно равенствам (2.8), точки x_1 и x_2 расположены на действительной оси Ox в круговых областях S_1 и S_2 соответственно и имеют координаты

$$(2.9) \quad x_{1,2} = (1/2h) \{h^2 + r_1^2 - r_2^2 \mp \sqrt{(h^2 + r_1^2 - r_2^2)^2 - 4h^2 r_1^2}\}.$$

Обратное отображение дается функцией

$$(2.10) \quad z = T(\zeta) = (x_2 \zeta - x_1)/(\zeta - 1).$$

Расположение точек при отображении (2.7) показано на рис. 1, а, б. При этом радиусы окружностей λ_1 и λ_2 , в которые переходят окружности L_1 и L_2 , определяются формулами

$$(2.11) \quad \gamma_1 = \sqrt{x_1/x_2}, \gamma_2 = \sqrt{(h-x_1)/(h-x_2)} \quad (\gamma_1 < 1, \gamma_2 > 1),$$

бесконечная точка $z = \infty$ переходит в точку $\zeta = 1$, т. е. расположена в кольце $\gamma_1 < |\zeta| < \gamma_2$.

В преобразованной области задача сводится к отысканию кусочно-голоморфной функции

$$(2.12) \quad f(\zeta) = j(T(\zeta)) = \begin{cases} f_0(\zeta), & \zeta \in \Omega_0 = \{\zeta: \gamma_1 < \zeta < \gamma_2\}, \\ f_1(\zeta), & \zeta \in \Omega_1 = \{\zeta: |\zeta| < \gamma_1\}, \\ f_2(\zeta), & \zeta \in \Omega_2 = \{\zeta: |\zeta| > \gamma_2\}. \end{cases}$$

Для функции $f(\zeta)$ на основании формул (2.4) и (2.6) получается краевая задача

$$(2.13) \quad (1 + \Delta_{01})f_0(\tau) = f_1(\tau) + \Delta_{01} \left(\frac{r_1}{T(\tau)} \right)^2 \overline{f_1(\tau)}, \quad \tau \in \lambda_1, \\ (1 + \Delta_{02})f_0(\tau) = f_2(\tau) + \Delta_{02} \left(\frac{r_2}{T(\tau) - h} \right)^2 \overline{f_2(\tau)}, \quad \tau \in \lambda_2, \quad f(1) = f_0(1) = J.$$

Из возможности разложения функции $f_0(\zeta)$ в ряд Лорана следует, что она допускает представление

$$(2.14) \quad f_0(\zeta) = f_0^+(\zeta) + f_0^-(\zeta),$$

где функции $f_0^+(\zeta)$ и $f_0^-(\zeta)$ голоморфны в областях $\{\zeta: |\zeta| < \gamma_2\}$ и $\{\zeta: |\zeta| > \gamma_1\}$ соответственно. Не нарушая общности, можно положить

$$(2.15) \quad f_0^+(1) = 0, \quad f_0^-(1) = J.$$

С учетом разбиения (2.14) граничные условия (2.13) преобразуем к виду

$$(2.16) \quad (1 + \Delta_{01})f_0^+(\tau) - f_1(\tau) = \Delta_{01} \left(\frac{r_1}{T(\tau)} \right)^2 \overline{f_1(\tau)} - (1 + \Delta_{01})f_0^-(\tau), \quad \tau \in \lambda_1, \\ (1 + \Delta_{02})f_0^-(\tau) - f_2(\tau) = \Delta_{02} \left(\frac{r_2}{T(\tau) - h} \right)^2 \overline{f_2(\tau)} - (1 + \Delta_{02})f_0^+(\tau), \quad \tau \in \lambda_2.$$

Из соотношений (2.16) и теоремы о непрерывном аналитическом продолжении вытекает, что функции

$$(2.17) \quad \Phi(\zeta) = \begin{cases} (1 + \Delta_{01})f_0^+(\zeta) - f_1(\zeta), & |\zeta| < \gamma_1, \\ \Delta_{01} \left(\frac{r_1}{T(\zeta)} \right)^2 \overline{f_1\left(\frac{\gamma_1^2}{\zeta}\right)} - (1 + \Delta_{01})f_0^-(\zeta), & |\zeta| > \gamma_1, \end{cases} \\ \Psi(\zeta) = \begin{cases} (1 + \Delta_{02})f_0^-(\zeta) - f_2(\zeta), & |\zeta| > \gamma_2, \\ \Delta_{02} \left(\frac{r_2}{T(\zeta) - h} \right)^2 \overline{f_2\left(\frac{\gamma_2^2}{\zeta}\right)} - (1 + \Delta_{02})f_0^+(\zeta), & |\zeta| < \gamma_2 \end{cases}$$

голоморфны во всей плоскости ζ , так как функции $f_1(\gamma_1^2/\bar{\zeta})$ и

$$(2.18) \quad r_1/T(\zeta) = \gamma_1(\zeta - 1)/(\zeta - \gamma_1^2)$$

голоморфны при $|\zeta| > \gamma_1$, а $f_2(\gamma_2^2/\bar{\zeta})$ и

$$(2.19) \quad r_2/(T(\zeta) - h) = -\gamma_2(\zeta - 1)/(\zeta - \gamma_2^2)$$

голоморфны при $|\zeta| < \gamma_2$.

В силу теоремы Лиувилля

$$(2.20) \quad \Phi(\zeta) \equiv C_1, \quad \Psi(\zeta) \equiv C_2$$

(C_1 и C_2 — комплексные постоянные). Полагая в формулах (2.17) и (2.20) $\xi = 1$, на основании равенств (2.15) и (2.18), (2.19) легко установить, что

$$(2.21) \quad C_1 = -(1 + \Delta_{01})J, \quad C_2 = 0.$$

Таким образом, формулы (2.17) принимают вид

$$(2.22) \quad \begin{aligned} (1 + \Delta_{01})f_0^+(\zeta) - f_1(\zeta) &= -(1 + \Delta_{01})J, & |\zeta| < \gamma_1, \\ \Delta_{01} \left(\frac{r_1}{T(\zeta)} \right)^2 \overline{f_1 \left(\frac{\gamma_1^2}{\bar{\zeta}} \right)} - (1 + \Delta_{01})f^-(\zeta) &= -(1 + \Delta_{01})J, & |\zeta| > \gamma_1, \\ (1 + \Delta_{02})f_0^-(\zeta) - f_2(\zeta) &= 0, & |\zeta| > \gamma_2, \\ \Delta_{02} \left(\frac{r_2}{T(\zeta) - h} \right)^2 \overline{f_2 \left(\frac{\gamma_2^2}{\bar{\zeta}} \right)} - (1 + \Delta_{02})f_0^+(\zeta) &= 0, & |\zeta| < \gamma_2. \end{aligned}$$

Из соотношений (2.14) и (2.22) вытекает справедливость следующего представления кусочно-голоморфной функции (2.12):

$$(2.23) \quad f(\zeta) = \begin{cases} (1 + \Delta_{01})\{J + f_0^+(\zeta)\}, & |\zeta| < \gamma_1, \\ f_0^+(\zeta) + f_0^-(\zeta), & \gamma_1 < |\zeta| < \gamma_2, \\ (1 + \Delta_{02})f_0^-(\zeta), & |\zeta| > \gamma_2. \end{cases}$$

Функции $f^\pm(\zeta)$ находятся из выражений (2.22), где предварительно ко второму и третьему из них необходимо применить преобразование инверсии относительно окружностей γ_1 и γ_2 соответственно. Тогда выражения (2.22) примут вид

$$(2.24) \quad \begin{aligned} (1 + \Delta_{01})f_0^+(\zeta) - f_1(\zeta) &= -(1 + \Delta_{01})J, & |\zeta| < \gamma_1, \\ \Delta_{01} \left(\frac{T(\zeta)}{r_1} \right)^2 f_1(\zeta) - (1 + \Delta_{01})\overline{f_0^-\left(\frac{\gamma_1^2}{\bar{\zeta}}\right)} &= -(1 + \Delta_{01})\bar{J}, & |\zeta| < \gamma_1, \\ (1 + \Delta_{02})\overline{f_0^-\left(\frac{\gamma_2^2}{\bar{\zeta}}\right)} - f_2\left(\frac{\gamma_2^2}{\bar{\zeta}}\right) &= 0, & |\zeta| < \gamma_2, \\ \Delta_{02} \left(\frac{r_2}{T(\zeta) - h} \right)^2 \overline{f_2\left(\frac{\gamma_2^2}{\bar{\zeta}}\right)} - (1 + \Delta_{02})f_0^+(\zeta) &= 0, & |\zeta| < \gamma_2. \end{aligned}$$

Из первой пары выражений (2.24) можно исключить функцию $f_1(\zeta)$, а из второй — $f_2(\gamma_2^2/\bar{\zeta})$. В результате имеем соотношения

$$(2.25) \quad \begin{aligned} f_0^+(\zeta) + \frac{1}{\Delta_{01}} \left(\frac{r_1}{T(\zeta)} \right)^2 \left\{ J - \overline{f_0^-\left(\frac{\gamma_1^2}{\bar{\zeta}}\right)} \right\} &= -J, & |\zeta| < \gamma_1, \\ \overline{f_0^-\left(\frac{\gamma_2^2}{\bar{\zeta}}\right)} - \frac{1}{\Delta_{02}} \left(\frac{T(\zeta) - h}{r_2} \right)^2 f_0^+(\zeta) &= 0, & |\zeta| < \gamma_2. \end{aligned}$$

Отсюда после исключения функции $f_0^+(\zeta)$ и несложных преобразований, учитывающих формулы (2.18) и (2.19), относительно функции получаем функциональное уравнение

$$(2.26) \quad f_0^-(\zeta) = J + \Delta_{01}\bar{J} \left(\gamma_1 \frac{\zeta - 1}{\zeta - \gamma_1^2} \right)^2 + \Delta_{01}\Delta_{02} \left(\Gamma \frac{\zeta - 1}{\zeta - \Gamma^2} \right)^2 f_0^-(\Gamma^{-2}\zeta), \quad |\zeta| > \gamma_1$$

где

$$(2.27) \quad \Gamma = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \sqrt{\frac{x_1(h-x_2)}{x_2(h-x_1)}} < 1.$$

Прежде чем переходить к решению уравнения (2.26), можно доказать, что оно, а значит, и задача (2.13) не могут иметь более одного решения. Действительно, противное означало бы, что уравнение (2.26) имеет нетривиальное решение при $J = 0$. Последнее же невозможно, так как из уравнения (2.26) при $J = 0$ и $\zeta = \infty$ находим $f_0^-(\zeta) = \Delta_{01}\Delta_{02}\Gamma^2 f_0^-(\infty)$, откуда ввиду неравенства $|\Delta_{01}\Delta_{02}\Gamma^2| < 1$ и ограниченности $f_0^-(\infty)$ вытекает $f_0^-(\infty) = 0$. Из него, в свою очередь, следует голоморфность в окрестности бесконечности функции $\varphi_1(\zeta) = \zeta f_0^-(\zeta)$, удовлетворяющей в силу уравнения (2.26) ($J = 0$) соотношению

$$\varphi_1(\zeta) = \Delta_{01}\Delta_{02}\Gamma^2 \left(\Gamma \frac{\zeta-1}{\zeta-\Gamma^2} \right)^2 \varphi_1(\Gamma^{-2}\zeta),$$

сравнение левых и правых частей которого при $\zeta = \infty$ дает $\varphi_1(\infty) = 0$. Аналогичным образом последовательно доказывается голоморфность в окрестности бесконечности функций $\varphi_k(\zeta) = \zeta^k f_0^-(\zeta)$ и равенства $\varphi_k(\infty) = 0$ ($k = 2, 3, \dots$), что, очевидно, равносильно высказанному утверждению.

Методом полной математической индукции доказывается, что в результате исключения функций $f_0^-(\Gamma^{-2k}\zeta)$, $k = 1, n-1$, из совокупности n уравнений, получаемых из (2.26) заменой ζ на $\Gamma^{-2k}\zeta$, $k = 0, n-1$, уравнение (2.26) приводится к

$$(2.28) \quad f_0^-(\zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ (\Delta_{01}\Delta_{02}\Gamma^2)^k \left[J \left(\frac{\zeta-1}{\zeta-\Gamma^{2k}} \right)^2 + \bar{J} \Delta_{01}\gamma_1^2 \left(\frac{\zeta-1}{\zeta-\gamma_1^2\Gamma^{2k}} \right)^2 \right] \right\} + (\Delta_{01}\Delta_{02}\Gamma^2)^n \left(\frac{\zeta-1}{\zeta-\Gamma^{2n}} \right)^2 f_0^-(\Gamma^{-2n}\zeta), \quad |\zeta| > \gamma_1.$$

Переходя в формуле (2.28) к пределу $n \rightarrow \infty$, для функции $f_0^-(\zeta)$ получаем выражение

$$(2.29) \quad f_0^-(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (\Delta_{01}\Delta_{02}\Gamma^2)^k \left[J \left(\frac{\zeta-1}{\zeta-\Gamma^{2k}} \right)^2 + \bar{J} \Delta_{01}\gamma_1^2 \left(\frac{\zeta-1}{\zeta-\gamma_1^2\Gamma^{2k}} \right)^2 \right] \right\}, \quad |\zeta| > \gamma_1.$$

Ряд (2.29) сходится абсолютно и равномерно в силу неравенств

$$\max_{|\zeta| \geq \gamma_1} \left| \frac{\zeta-1}{\zeta-\Gamma^{2k}} \right| < \max_{|\zeta| \geq \gamma_1} \left| \frac{\zeta-1}{\zeta-\gamma_1^2\Gamma^{2k}} \right| = \frac{\gamma_1+1}{\gamma_1+\gamma_1^2\Gamma^{2k}} < \frac{\gamma_1+1}{\gamma_1}.$$

Зная $f_0^-(\zeta)$, нетрудно определить функцию $f_0^+(\zeta)$, обращаясь к любому из двух соотношений (2.25):

(2.30)

$$f_0^+(\zeta) = (\zeta-1)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (\Delta_{01}\Delta_{02})^k \left[J \left(\frac{\Gamma^{-k}}{\zeta-\Gamma^{-2k}} \right)^2 + \frac{\bar{J}}{\Delta_{01}} \left(\frac{\gamma_1\Gamma^{-k}}{\zeta-\gamma_1^2\Gamma^{-2k}} \right)^2 \right] \right\}, \quad |\zeta| < \gamma_2.$$

На основании формул (2.29), (2.30) кусочно-голоморфная функция $f(\zeta)$ восстанавливается теперь согласно представлению (2.23). Обратное отображение в физическую плоскость $z = x + iy$ позволяет найти искомое распределение тока внутри включений и в их окрестности. Окончательно вычисления приводят к формулам

$$(2.31) \quad j(z) = \begin{cases} J + (x_2 - x_1)^2 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (\Delta_{01} \Delta_{02})^k \left[J \left(\frac{Q(\Gamma^{-k})}{z - T(\Gamma^{-2k})} \right)^2 \right] + \frac{\bar{J}}{\Delta_{01}} \left(\frac{Q(\gamma_1 \Gamma^{-k})}{z - T(\gamma_1^2 \Gamma^{-2k})} \right)^2 \right\} \right\} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (\Delta_{01} \Delta_{02})^k \left[J \left(\frac{Q(\Gamma^k)}{z - T(\Gamma^{2k})} \right)^2 + \frac{\bar{J}}{\Delta_{02}} \left(\frac{Q(\gamma_2 \Gamma^k)}{z - T(\gamma_2^2 \Gamma^{2k})} \right)^2 \right] \right\}, & |z| > r_1, \\ & |z - h| > r_2, \\ (1 + \Delta_{01}) \left\{ J + (x_2 - x_1)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (\Delta_{01} \Delta_{02})^k \left[J \left(\frac{Q(\Gamma^{-k})}{z - T(\Gamma^{-2k})} \right)^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\bar{J}}{\Delta_{01}} \left(\frac{Q(\gamma_1 \Gamma^{-k})}{z - T(\gamma_1^2 \Gamma^{-2k})} \right)^2 \right] \right\} \right\}, & |z| < r_1, \\ (1 + \Delta_{02}) \left\{ J + (x_2 - x_1)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (\Delta_{01} \Delta_{02})^k \left[J \left(\frac{Q(\Gamma^k)}{z - T(\Gamma^{2k})} \right)^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\bar{J}}{\Delta_{02}} \left(\frac{Q(\gamma_2 \Gamma^k)}{z - T(\gamma_2^2 \Gamma^{2k})} \right)^2 \right] \right\} \right\}, & |z - h| < r_2. \end{cases}$$

Здесь $Q(w) = w/(1 - w^2)$; остальные обозначения даны выражениями (2.9)–(2.11) и (2.27).

Формулы (2.31), несмотря на свой внешне громоздкий вид, в действительности имеют простую структуру и ясное физическое толкование. Распределение тока во внешней к включениям области S_0 содержит постоянную составляющую J , значение которой ток принимает на бесконечности, и дипольные компоненты в точках $T(\cdot)$. Одна пара диполей с координатами $T(\Gamma^{2k})$ и $T(\gamma_2 \Gamma^{2k})$ расположена на отрезке $[O, x_1]$ действительной оси. С увеличением степени k модули моментов диполей уменьшаются и диполи смещаются от центра кругового включения O к точке x_1 , которая является для диполей точкой сгущения. Другая пара диполей имеет координаты $T(\Gamma^{-2k})$ и $T(\gamma_1 \Gamma^{-2k})$, т. е. расположена на отрезке $[x_2, h]$ действительной оси. В этом случае с ростом степени k диполи сгущаются к точке x_2 , причем модули моментов их при этом уменьшаются. Таким образом, взаимное влияние неоднородных включений в сплошной среде сказывается в диполь-дипольном взаимодействии.

Распределение тока в окрестности включений имеет степенную зависимость от радиусов включений r_1 и r_2 , расстояния между ними h и от относительных удельных сопротивлений неоднородностей Δ_{01} и Δ_{02} . Наибольшие различия в распределении тока наблюдаются при направлениях внешнего тока J вдоль осей Ox и Oy , т. е. при последовательном чередовании включений и их параллельном расположении по отношению к току J .

Внутри включений выражения для тока содержат постоянные составляющие $(1 + \Delta_{0k})J$ ($k = 1, 2$), которые в точности соответствуют распределению тока в отдельно взятом круговом включении при отсутствии другого. Эти составляющие тока не превосходят по величине удвоенного значения тока J на бесконечности и совпадают с ним по направлению. Воздействие включений друг на друга проявляется в том, что имеются дополнительные компоненты тока, представленные диполями, которые по отношению к данному включению расположены в соседнем. Диполи с точностью до множителя $1 + \Delta_{0k}$ те же, что и в выражении для тока во внешней к включениям области. Ток внутри близлежащих включений может превзойти $2J$ при определенных соотношениях параметров системы.

Необходимо подчеркнуть, что модули моментов диполей с ростом степени k резко уменьшаются и основной вклад в величину тока вносят диполи, расположенные в центрах кругов. Это свойство, как показывают непосредственные вычисления, проявляется при широком варьировании всех параметров, фигурирующих в выражении для тока. Поэтому во многих практических вычислениях достаточно ограничиться только первым

приближением формулы (2.31)

$$(2.32) \quad j(z) = \begin{cases} J + \bar{J} \left\{ \frac{\Delta_{01} r_1^2}{z^2} + \frac{\Delta_{02} r_2^2}{(z-h)^2} \right\}, & z \in S_0, \\ (1 + \Delta_{01}) \left\{ J + \bar{J} \frac{\Delta_{02} r_2^2}{(z-h)^2} \right\}, & |z| < r_1, \\ (1 + \Delta_{02}) \left\{ J + \bar{J} \frac{\Delta_{01} r_1^2}{z^2} \right\}, & |z-h| < r_2. \end{cases}$$

Эти формулы удобны для использования и имеют простое физическое толкование. Если в выражениях (2.31) перейти к одному из трех пределов: $r_2 \rightarrow 0$, $h \rightarrow \infty$ или $\Delta_{02} \rightarrow 0$, то они дают решение для случая одного включения [4]. Более наглядно такой переход прослеживается в формулах (2.32).

Чтобы представить особенности распределения тока внутри включений и в их окрестности, на рис. 2 приведены графики относительной величины вектора плотности тока на оси Ox , построенные по формуле (2.31) при следующих условиях. Вектор внешнего тока J направлен по оси Ox ($J = J_x$), т. е. включения чередуются последовательно по отношению к вектору J . Тогда вектор плотности тока на оси Ox имеет только одну компоненту $j(x) = j_x(x)$, его относительная величина есть $j^* = j/J = j_x/J_x$. При вычислениях, выполненных с помощью ЭВМ, было принято, что у обоих включений одинаковые радиусы r , а расстояние между их центрами равно $h = 3r$.

Кривые 1–3 отвечают разным сочетаниям удельных сопротивлений включений. Кривая 1 соответствует случаю, когда удельные сопротивления включений одинаковы и по величине меньше сопротивления основной компоненты ($\rho_1 = \rho_2 < \rho_0$, $\Delta_{01} = \Delta_{02} = 0,5$), 2 построена при условии, что включения имеют разные удельные сопротивления: $\rho_1, \rho_2 < \rho_0$, $\Delta_{01} = 0,5$, $\Delta_{02} = -0,5$, а 3 также относится к случаю одинаково проводящих включений, но при условии, что их удельные сопротивления превосходят сопротивление среды, в которую они погружены ($\rho_1 = \rho_2 > \rho_0$, $\Delta_{01} = \Delta_{02} = -0,5$).

Как и следовало ожидать, включения с высокой проводимостью концентрируют в себе ток; из низкопроводящих включений он вытесняется. Характер взаимного влияния включений на распределение тока можно проследить, сравнивая кривые 1–3 с кривыми 4 и 5, которые построены для случая, когда есть только одно включение радиуса r с центром в начале координат, имеющее относительные удельные сопротивления $\Delta_{01} = 0,5$ и $-0,5$ (кривые 4, 5). По сравнению с изолированным включением концентрация тока во взаимодействующих включениях увеличивается или уменьшается в большей степени и зависит от сочетания удельных сопротивлений включений. Качественно это подтверждается также непосредственными расчетами поля на ЭВМ, результаты которых приведены в [1, 2].

Интересно отметить, что вычисления при построении кривых 1–3 по точным (2.31) и приближенным (2.32) формулам отличаются приблизительно на 1 %. Таким образом, основной вклад в вычисления дают первые члены рядов в выражении (2.31).

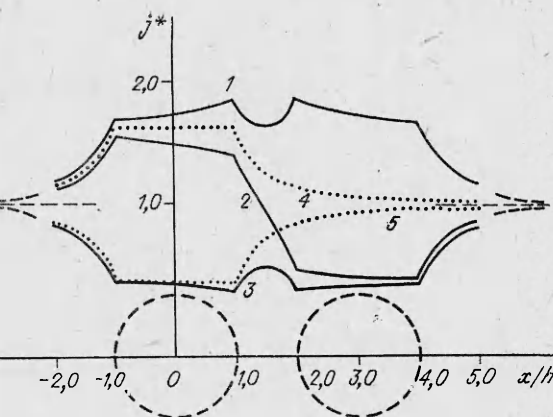
3. Учет эффекта Холла. Изложенный метод решения полностью применим также к исследованию задачи с анизотропным характером проводимости, когда анизотропия материала обусловлена холловскими явлениями в магнитном поле $\mathbf{B} = \{0, 0, B\}$, $B = \text{const}$. В таком случае удельное электрическое сопротивление имеет тензорное представление и закон Ома принимает форму $E(z) = \bar{\rho} j(z)$ ($\bar{\rho} = \rho(1 + i\beta)$, β — параметр Холла). С учетом комплексного удельного сопротивления граничные условия (2.2) видоизменяются:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}\{n(t)j_0(t)\} &= \operatorname{Re}\{n(t)j_k(t)\}, \\ \operatorname{Im}\{n(t)\bar{\rho}_0 j_0(t)\} &= \operatorname{Im}\{n(t)\bar{\rho}_k j_k(t)\}, \quad t \in L_k \quad (k = 1, 2). \end{aligned}$$

В последующем ход решения задачи (3.1) остается прежним и окончательный результат записывается формулами (2.31) и (2.32) с той лишь разницей, что скалярные величины Δ_{0k} должны быть заменены комплексными: $\Delta_{0k} \rightarrow \widehat{\Delta}_{0k}$ ($\widehat{\Delta}_{0k} = (\Delta_{0k} - iV_{0k}) / (1 + iV_{0k})$ ($k = 1, 2$)). Здесь V_{0k} — приведенные значения параметра Холла: $V_{0k} = (\rho_0\beta_0 - \rho_k\beta_k) / (\rho_0 + \rho_k)$.

В среде с эффектом Холла картина распределения тока усложняется и имеет важные особенности. Во-первых, если выполняется соотношение $\rho_0\beta_0 = \rho_k\beta_k$ (в силу формулы $\beta_k = (1/\rho)R_{Hk}B$ это равносильно равенству коэффициентов Холла: $R_{H0} = R_{Hk}$), то $\widehat{\Delta}_{0k} = \Delta_{0k}$ и внешнее магнитное поле не оказывает никакого влияния на распределение тока. Во-вторых, что особенно интересно, при неограниченном росте магнитного поля и увеличении приведенных параметров Холла V_{0k} ток вытесняется из включений независимо от их сопротивления и в пределе $V_{0k} \rightarrow \infty$ ведет себя так же, как и в случае протекания в проводящей среде с диэлектрическими включениями.

Итак, рассмотренная система дает один из немногих примеров трехкомпонентной неоднородной среды, для которой удается получить точные аналитические результаты. Для исследованной структуры установлено, что влияние включений друг на друга имеет характер диполь-дипольного взаимодействия. При наличии большего числа включений задача сильно усложняется и не поддается решению относительно простыми методами. В какой-то мере ситуация аналогична той, которая встречается в механике при изучении проблемы многих тел. Трудности решения, возрастающие с увеличением числа взаимодействующих включений, частично преодолеваются при рассмотрении некоторых симметричных структур в системах с регулярным распределением дисперсной фазы [4].



Р и с. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Рвачов В. Л. Теория R -функций и некоторые ее приложения. — Киев: Наук. думка, 1982.
2. Шейко Т. И. Метод R -функций в задаче о проводимости неоднородной среды в магнитном поле // ЖТФ. — 1979. — Т. 49, № 12.
3. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. — М.: Наука, 1977.
4. Емец Ю. П. Электрические характеристики композиционных материалов с регулярной структурой. — Киев: Наук. думка, 1986.

г. Киев, г. Казань

Поступила 23/II 1987 г.,
в окончательном варианте — 24/X 1988 г.