УДК 519.651+519.688, 519.712

О вычислении функции Бесселя путём суммирования рядов*

Е.А. Карацуба

Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына, ул. Вавилова, 40, корп. 2, Москва, 119333
E-mails: ekar@ccas.ru, karatsuba@mi-ras.ru

Карацуба Е.А. О вычислении функции Бесселя путём суммирования рядов // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2019. — Т. 22, № 4. — С. 453–472.

Представлены два алгоритма эффективного вычисления функции Бесселя: быстрый алгоритм с растущей точностью вычисления и алгоритм вычисления для случая большого аргумента функции Бесселя.

Ключевые слова: *функции Бесселя, быстрые алгоритмы, сложность вычисления, метод БВЕ, большой аргумент, эффективное вычисление.*

DOI: 10.15372/SJNM20190405

Karatsuba E.A. On computation of the Bessel function by summing up the series // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2019. — Vol. 22, № 4. — P. 453–472.

Two algorithms for an effective calculation of the Bessel function are presented: a fast algorithm with an increasing accuracy of computation and a computational algorithm for the case of a large argument of the Bessel function.

Keywords: *Bessel functions, fast algorithms, computational complexity, FEE method, large argument, efficient calculation.*

Введение

Исследованием функций Бесселя и способами их вычисления занимались многие авторы (см., например, [1–15]). Важность изучения функций Бесселя объясняется тем, что решения ряда физических, химических и технических задач выражаются именно через функции Бесселя. В [16] были построены первые быстрые алгоритмы вычисления функций Бесселя для любого алгебраического аргумента.

Быстрые алгоритмы возникли в 1960 г. (см. [17, 18]), когда был изобретён первый быстрый метод, метод умножения двух многозначных чисел. Алгоритмы быстрого умножения можно рассматривать в то же время как алгоритмы быстрого вычисления функции $f(x) = x^2$. Постановка задачи о сложности (здесь и далее имеется в виду битовая сложность вычисления) выполнения арифметичских операций принадлежит А.Н. Колмогорову (см. [17–19]). При этом основным растущим параметром является точность вычисления n, здесь и далее n — натуральное число; $n \to +\infty$.

Если считать, что числа записаны в двоичной системе счисления, знаки которой 0 и 1 называются битами, то под одной элементарной (битовой в данном случае) операцией

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 17-20-02222 офи_м_РЖД, № 19-07-00750 А).

подразумевается сложение или вычитание, или умножение двух битов, а также запись бита (0 или 1), или запись знака (+ или −), или запись знака скобки. Значения вычисляются с точностью до n знаков, т. е. с точностью 2^{-n}. В то же время нужно отметить, что как определение элементарной операции, так и все последующие определения можно распространить на любую q-ю систему счисления, где q — натуральное число, $q \geq 2$. При этом алгоритмы останутся такими же, и изменение системы счисления скажется только изменением констант в O-больших оценок сложности вычислений. Любое действительное число представимо в виде:

$$\xi = \xi_{-k}2^k + \xi_{-k+1}2^{k-1} + \cdots + \xi_{-1}2 + \xi_0 + \xi_1 2^{-1} + \xi_2 2^{-2} + \cdots , \tag{1}$$

где $\xi_j = 0$ или $\xi_j = 1$, $-k \leq j < \infty$. В то же время любое комплексное число ϵ можно представить как $\epsilon = \xi + i\eta$, где ξ и η — действительные числа вида (1).

Рассмотрим для простоты пример вычисления вещественной функции $y = f(x)$ вещественного переменного x, $a \leq x \leq b$. Пусть $f(x)$ на (a, b) удовлетворяет условию Липшица порядка α, $0 < \alpha < 1$, так что при $x_1, x_2 \in (a, b) : |f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|^{\alpha}$.

Определение 1. Вычислить функцию $y = f(x)$ в точке $x = x_0 \in (a, b)$ с точностью до n знаков, значит найти такое число A, что

$$|f(x_0) - A| \leq 2^{-n}.$$

Определение 2. Количество битовых операций, достаточное для вычисления функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ с точностью до n знаков посредством данного алгоритма, называется сложностью вычисления $f(x)$ в точке $x = x_0$.

Функцию сложности обозначают через $s_f(n)$. При вычислении комплексной функции $f(z)$, $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, первое определение распространяется на каждую из частей $u(x, y), v(x, y)$ в отдельности, а второе определение учитывает вычисление обеих частей в совокупности.

Поскольку при вычислениях в первую очередь используются четыре арифметических действия, то прежде всего нужно знать сложность выполнения этих действий. Из определений 1 и 2 следует, что числа x_0 и A можно представить в виде целой части и n двоичных знаков после запятой, т. е. $A = [A] + 0,\ \nu_1\nu_2\nu_3 \cdots \nu_n$, $x_0 = [x_0] + 0,\ \mu_1\mu_2\mu_3 \cdots \mu_n$, где ν_j, $\mu_j = 0$ или 1, $j = 1, 2, \ldots, n$. Так как целые части $[A]$, $[x_0]$ — фиксированные величины, а $n \to +\infty$, то действия производятся по существу с n-значными числами. Отсюда прежде всего возникает вопрос о сложности вычисления суммы, разности, произведения и частного двух n-значных чисел a и b. Заметим, что деление (с остатком) сводится к сложению, вычитанию и умножению чисел, а порядок количества битовых операций, необходимых и достаточных для выполнения сложения и вычитания, один и тот же. Возникает вопрос о сложности умножения.

Поскольку сложность всех известных к 1956 году методов умножения двух n-значных чисел, получившая особое обозначение $M(n)$, была асимптотически не лучше чем $O(n^2)$, А.Н. Колмогоровым была высказана гипотеза, что нижняя оценка сложности умножения при любом методе перемножения есть величина порядка n^2. Эту гипотезу опроверг А.А. Карацуба, который построил в 1960 г. (см. [17, 18, 20]) метод умножения с оценкой сложности

$$M(n) = O\left(n^{\log_2 3}\right), \quad \log_2 3 = 1,5849\ldots .$$

Впоследствии, пытаясь охарактеризовать принципы, на которых основан метод А.А. Карацубы, ему присваивали различные названия, среди которых “divide and conquer”, “binary splitting”, “принцип дихотомии”, “метод деления пополам” и т. д. На самом деле, подобные названия не отражают особенностей этого быстрого метода, являясь слишком общими. Здесь нужно отметить, что используя те же арифметические действия, что и обычные методы, каждый быстрый метод основан на конструктивном изобретении, которое позволяет ему иметь более низкую сложность вычисления. При этом сложность вычисления является не только показателем “скорости” метода, но и инструментом сравнения алгоритмов: если сложности отличаются (асимптотически), то даже если алгоритмы обладают какими-то общими чертами, это разные алгоритмы.

А.А. Карацуба открыл очень общий метод, позволяющий производить быстрые алгоритмы широкого класса, и на основе этого метода создано множество быстрых алгоритмов, включая Быстрое Фурье Преобразование (см. первый алгоритм БФП в [21]), все быстрые алгоритмы обычного (см. [22–25]) и матричного (см. [26, 27]) умножений.

Далее будем предполагать, что для сложности умножения двух n-значных чисел справедлива оценка алгоритма Шёнхаге–Штрассена от 1971 г. (см. [22]) $M(n) = O(n \times \log n \log\log n)$, которая хотя и не является наилучшей на настоящий момент (см. [25]), но является самой удобной (по причине компактности) для применения и вычисления сложности.

Метод БВЕ (Быстрое Вычисление Е-функций, 1990 г.) явился вторым после метода АГС (Арифметико-геометрическое среднее Гаусса, см. [27–31]) методом быстрого вычисления простейших трансцендентных функций и единственным на настоящее время методом, позволяющим быстро вычислять некоторые высшие трансцендентные функции для алгебраических значений аргумента и параметров. С помощью БВЕ (см. [32–41]) можно вычислить любую элементарную трансцендентную функцию для любого аргумента, классические константы e, π, постоянную Эйлера γ, постоянную Каталана, такие высшие трансцендентные функции как гамма-функцию Эйлера, гипергеометрические функции и т. д. для алгебраических значений аргумента и параметров, дзета-функцию Римана для целых значений аргумента, дзета-функцию Гурвица для целого аргумента и алгебраических значений параметра, а также такие специальные интегралы, как интеграл вероятности, интегралы Френеля, интегральные синус и косинус и т. д. с оценкой сложности

$$s_f(n) = O\left(M(n)\log^2 n\right).$$

Кроме того, структура этого метода позволяет распараллеливать основанные на нём алгоритмы.

Простыми примерами, на которых можно продемонстрировать особенности метода БВЕ, являются примеры вычисления значения факториала $n!$ и классической константы e.

БВЕ процесс вычисляет $n!$ за $\log n$ шагов (мы предполагаем, что $n = 2^k,\ k \geq 1$) следующим образом:

1-й шаг. Вычисляется $\dfrac{n}{2}$ произведений вида: $a_1(1) = n(n-1)$, $a_2(1) = (n-2)(n-3)$, $\ldots,\ a_{\frac{n}{2}}(1) = 2 * 1$.

2-й шаг. Вычисляется $\dfrac{n}{4}$ произведений вида: $a_1(2) = a_1(1)a_2(1),\ a_2(2) = a_3(1)a_4(1), \ldots,$ $a_{\frac{n}{4}}(2) = a_{\frac{n}{2}}(1)a_{\frac{n}{2}-1}(1)$.

. . . .

k-й шаг. Вычисляется одно произведение: $a_1(k) = a_1(k-1)a_2(k-1)$.

Подсчитаем сложность вычисления по всем шагам. На первом шаге сложность вычисления оценивается значением $O\left(n/2M(\log n)\right)$. На втором шаге длина (разрядность) чисел, участвующих в вычислениях, увеличивается примерно вдвое, а их количество уменьшается ровно вдвое. Так что сложность вычисления на втором шаге ненамного превышает предыдущую $O\left(n/4M(2\log n)\right)$. На третьем шаге сложность вычисления $O\left(n/8M(4\log n)\right)$ и т. д. На последнем шаге мы вычисляем только одно произведение с оценкой сложности $O\left(M(n\log n)\right)$. Таким образом, сложность вычисления посредством БВЕ значения $n!$ есть

$$O\left(n/2M(\log n) + n/4M(2\log n) + \cdots + M(n\log n)\right) = O\left(n\log^3 n\log\log n\right),$$

что существенно меньше, чем сложность вычисления путём последовательного перемножения сомножителей: $O\left(n^2\log^\mu n\right)$, $\mu \ge 1$.

Рассмотрим вычисление константы e. Возьмём $m = 2^k$, $k \ge 1$, членов ряда Тейлора для e:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(m-1)!} + R_m$$

так, чтобы для остаточного члена этого ряда R_m было справедливо неравенство $R_m \le 2^{-n-1}$. Это может быть, например, при $m = 2^k \ge \frac{4n}{\log n}$, при этом натуральное число k определяется неравенствами $2^k \ge \frac{4n}{\log n} > 2^{k-1}$. Будем вычислять сумму $S = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(m-1)!} = \sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{(m-1-j)!}$ за k шагов следующего процесса.

1-й шаг. Комбинируя слагаемые S последовательно попарно:

$$S = \left(\frac{1}{(m-1)!} + \frac{1}{(m-2)!}\right) + \left(\frac{1}{(m-3)!} + \frac{1}{(m-4)!}\right) + \cdots,$$

выносим за скобки “очевидный” общий множитель, равный

$$\frac{1}{(m-1)!}(1+m-1) + \frac{1}{(m-3)!}(1+m-3) + \cdots,$$

и вычисляем целые значения выражений в скобках, т. е. вычисляем m, $m-2$, $m-4$, … . После этого сумма S принимает вид:

$$S = S(1) = \sum_{j=0}^{m_1-1}\frac{1}{(m-1-2j)!}\alpha_{m_1-j}, \quad m_1 = \frac{m}{2}, \quad m = 2^k, \quad k \ge 1.$$

На первом шаге вычисляется $\frac{m}{2}$ целых значений вида

$$\alpha_{m_1-j}(1) = m - 2j, \quad j = 0, 1, \ldots, \frac{m}{2} - 1.$$

Далее действуем аналогичным образом: комбинируя на каждом шаге слагаемые S последовательно попарно, выносим за скобки общий множитель и вычисляем лишь целые значения выражений в скобках. Пусть сделано i шагов такого процесса.

(i+1)-й шаг. Для $i+1 \le k$:

$$S = S(i+1) = \sum_{j=0}^{m_{i+1}-1} \frac{1}{(m-1-2^{i+1}j)!}\alpha_{m_{i+1}-j}(i+1)\ , \quad m_{i+1} = \frac{m_i}{2} = \frac{m}{2^{i+1}},$$

вычисляется только $\frac{m}{2^{i+1}}$ целых значений вида

$$\alpha_{m_{i+1}-j}(i+1) = \alpha_{m_i-2j}(i) + \alpha_{m_i-(2j+1)}(i)\frac{(m-1-2^{i+1}j)!}{(m-1-2^i-2^{i+1}j)!}\ ,$$

$j = 0, 1, \ldots, \frac{m}{2^{i+1}}-1$, $m = 2^k$, $k \ge i+1$. Заметим, что число $\frac{(m-1-2^{i+1}j)!}{(m-1-2^i-2^{i+1}j)!}$ является целым, это короткая запись произведения 2^i последовательных целых чисел.

. . . .

k-й шаг. Вычисляется одно целое значение $\alpha_1(k)$, значение $(m-1)!$ и производится одно деление $\alpha_1(k)$ на $(m-1)!$. В результате мы получаем значение суммы S и, тем самым, значение константы e с точностью до n знаков. Для сложности вышеприведённого алгоритма вычисления константы e доказана (см. [33, 38]) оценка

$$s_e(n) = O\left(M(n)\log n\right).$$

БВЕ-процессом можно быстро суммировать следующие ряды:

$$f_1 = f_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a(j)}{b(j)}z^j, \qquad f_2 = f_2(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a(j)}{b(j)}\frac{z^j}{j!}$$

при условии, что $a(j)$, $b(j)$ — целые числа, $|a(j)| + |b(j)| \le (Cj)^K$; $|z| < 1$; K и C суть константы и z есть алгебраическое число. Сложность вычисления рядов $f_1(z)$, $f_2(z)$ посредством БВЕ есть

$$s_{f_1}(n) = O\left(M(n)\log^2 n\right), \quad s_{f_2}(n) = O\left(M(n)\log n\right).$$

Как отмечалось выше, быстрые алгоритмы вычисления функций подразумевают подход, при котором главным растущим параметром является точность вычисления (количество вычисленных знаков) $n \to +\infty$, а остальные параметры, в том числе аргумент функции, представляются ограниченными. В противоположность этому на практике иногда нужно вычислять с ограниченной точностью функцию Бесселя большого аргумента. В настоящей статье мы рассмотрим оба подхода и соответствующие им эффективные алгоритмы вычисления функций Бесселя.

Далее используются следующие обозначения: θ, θ_1, θ_2, … — это функции, модуль которых не превосходит единицы, в разных формулах, вообще говоря, разные; для вещественного x функция $[x]$ есть целая часть x, т. е. такое целое число, что $[x] \le x < [x]+1$.

1. Быстрое вычисление функций Бесселя

Построим БВЕ-алгоритмы вычисления функций Бесселя. При этом предполагается, что заданная функция Бесселя вычисляется в фиксированной точке для фиксированного значения параметра порядка функции, а растущим параметром n является точность вычисления: $n \to +\infty$.

Рассмотрим быстрый алгоритм для вычисления функций Бесселя на примере вычисления функции Бесселя 1-го рода $J_\nu(z)$ и целого (для простоты) порядка ν, $\nu = m \geq 0$.

Как известно (см., например, [7]),

$$J_m(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{m+2j}}{2^{m+2j} j!(m+j)!}. \tag{2}$$

Сначала рассмотрим вариант алгоритма, когда z есть рациональное число: $z = x_0 = \frac{a}{b} > 0$; a, b — натуральные числа ; $(a, b) = 1$. Представим (2) в виде $J_m(x) = W(x) + R(x)$, где

$$W(x) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(-1)^j x^{m+2j}}{2^{m+2j} j!(m+j)!}, \tag{3}$$

$$R(x) = \sum_{j=r}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{m+2j}}{2^{m+2j} j!(m+j)!}. \tag{4}$$

Поскольку из (4)

$$|R(x)| \leq \frac{x^{m+2r}}{2^{m+2r} r!(m+r)!}, \tag{5}$$

то при

$$r \geq \max\left(3x, \frac{n-m}{2}\right) \tag{6}$$

для остаточного члена $R(x)$ выполняется неравенство

$$|R(x)| \leq 2^{-n}. \tag{7}$$

Чтобы доказать, что условия (6) (здесь n, r — натуральные числа, m — целое неотрицательное число) достаточно для справедливости оценки (7) применим формулу Рамануджана (обобщение формулы Стирлинга) из [42]: для любого $x \geq 0$

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x \left(8x^3 + 4x^2 + x + \frac{\vartheta_x}{30}\right)^{\frac{1}{6}}, \quad 0.3 \leq \vartheta_x \leq 1. \tag{8}$$

Тем самым

$$r! = \sqrt{\pi}\left(\frac{r}{e}\right)^r \left(8r^3 + 4r^2 + r + \frac{\vartheta_r}{30}\right)^{\frac{1}{6}} = \sqrt{\pi}\left(\frac{r}{e}\right)^r \Theta_r, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}(r+m)! &= \sqrt{\pi}\left(\frac{r+m}{e}\right)^{r+m} \left(8(r+m)^3 + 4(r+m)^2 + r + m + \frac{\vartheta_{r+m}}{30}\right)^{\frac{1}{6}} \\ &= \sqrt{\pi}\left(\frac{r+m}{e}\right)^{r+m} \Theta_{r+m},\end{aligned} \tag{10}$$

$$0.3 \leq \vartheta_r \leq 1, \quad 0.3 \leq \vartheta_{r+m} \leq 1, \quad \Theta_{r+m} \geq 1.53, \quad \Theta_r \geq 1.53. \tag{11}$$

Из (5) и (9)–(11) следует, что для справедливости (7) достаточно выполнения неравенства

$$\left(\frac{xe}{2}\right)^{m+2r}\left(\frac{1}{r}\right)^{r}\left(\frac{1}{r+m}\right)^{r+m}\frac{1}{\pi\Theta_r\Theta_{r+m}} \leq 2^{-n}. \tag{12}$$

1) Пусть сначала $\max\left(3x, \frac{n-m}{2}\right) = 3x$. То есть оценка (12), а следовательно и (7), должна иметь место при $r \geq 3x \geq \frac{n-m}{2}$, т. е. при $2r \geq 6x \geq n-m$, т. е. при $2r+m \geq n$ и $\frac{3x}{2} \leq \frac{r}{2}$. Учитывая (11), в этом случае, чтобы получить оценку (12), нужно доказать оценку

$$\Theta_0(xe)^{m+2r} \leq r^r(m+r)^{m+r},$$

$$\Theta_0 = \frac{1}{\pi\Theta_r\Theta_{r+m}} \leq 0.14, \tag{13}$$

или же, поскольку $xe \leq 3x \leq r$, оценку

$$\Theta_0 r^{m+2r} \leq r^r(m+r)^{m+r}, \tag{14}$$

которая справедлива для любых неотрицательных целых m и натуральных r, учитывая (13).

2) Пусть теперь $\max\left(3x, \frac{n-m}{2}\right) = \frac{n-m}{2}$. То есть оценка (12), а следовательно и (7), должна иметь место при $r \geq \frac{n-m}{2} \geq 3x$, или при $2r \geq n-m \geq 6x$, т. е. при $xe \leq r$ и $n \leq 2r+m$, что сводится к случаю 1).

Таким образом, при условии (6) оценка (12), а следовательно и (7), справедлива для любых неотрицательных целых m и натуральных r.

Перепишем (3) в виде

$$W(x) = \frac{x^m}{2^m}V(x), \tag{15}$$

где

$$V(x) = \sum_{j=0}^{r-1}\frac{(-1)^j a^{2j}}{2^{2j}b^{2j}j!(m+j)!}, \quad x = \frac{a}{b}. \tag{16}$$

Вычислим $V = V(x)$ с помощью БВЕ-алгоритма. Возьмём $r = 2^k$, $k \geq 1$, членов ряда (16). Пусть числа $S_{r-\nu}(0)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, r-1$, определяются равенствами

$$S_{r-\nu}(0) = (-1)^{r-\nu-1}\frac{a^{2(r-\nu-1)}}{(2b)^{2(r-\nu-1)}(r-\nu-1)!(m+r-\nu-1)!}.$$

По определению V имеем

$$V = S_1(0) + S_2(0) + \cdots + S_r(0).$$

Вычисление суммы V выполняется с помощью БВЕ-процесса за k шагов. Объединяя на каждом шаге слагаемые V последовательно попарно и вынося общий множитель за скобки, мы вычисляем лишь значения (целые числа) выражений в скобках.

1-й шаг.

$$V = S_1(1) + S_2(1) + \cdots + S_{r_1}(1), \quad r_1 = \frac{r}{2}, \ r = 2^k, \ k \geq 1;$$

$$\begin{aligned} S_{r_1-\nu}(1) &= S_{r-2\nu}(0) + S_{r-2\nu-1}(0) \\ &= \frac{a^{2(r-2\nu-2)}}{(2b)^{2(r-2\nu-1)}(r-2\nu-1)!(m+r-2\nu-1)!}\beta_{r_1-\nu}(1). \end{aligned}$$

На 1-м шаге вычисляются целые числа $\beta_{r_1-\nu}(1)$, $\nu = 0, 1, \ldots, r_1-1$:

$$\beta_{r_1-\nu}(1) = -a^2 + (2b)^2(r-2\nu-1)(m+r-2\nu-1). \qquad (17)$$

Далее действуем таким же образом. Пусть сделано $j-1$ шагов такого процесса.

j-й шаг $(j \le k)$. V принимает вид:

$$V = S_1(j) + S_2(j) + \cdots + S_{r_j}(j), \quad r_j = 2^{-j}r, \quad r = 2^k, \quad k \ge 1, \quad 1 \le j \le k,$$

$$S_{r_j-\nu}(j) = S_{r_{j-1}-2\nu}(j-1) + S_{r_{j-1}-2\nu-1}(j-1)$$

$$= \frac{a^{2(r-2^j\nu-2^j)}}{(2b)^{2(r-2^j\nu-1)}(r-2^j\nu-1)!(m+r-2^j\nu-1)!}\beta_{r_j-\nu}(j).$$

На j-м шаге вычисляются целые числа

$$\beta_{r_j-\nu}(j) = a^{2^{2j}}\beta_{r_{j-1}-2\nu}(j-1) + (2b)^{2^{2j}} \times \frac{(r-2^j\nu-1)!(m+r-2^j\nu-1)!}{(r-2^j\nu-2^{j-1}-1)!(m+r-2^j\nu-2^{j-1}-1)!}\beta_{r_{j-1}-2\nu-1}(j-1). \qquad (18)$$

. . . .

k-й шаг. Имеем

$$V = S_1(k-1) + S_2(k-1) = \frac{\beta_{r_k}(k)}{(2b)^{2(r-1)}(r-1)!(m+r-1)!}, \quad r_k = r/2^k = 1. \quad (19)$$

На k-м шаге мы вычисляем целое число $\beta_{r_k}(k)$, вычисляем целые числа $(2b)^{2(r-1)}$, $(r-1)!$, $(m+r-1)!$ и делим целое число $\beta_{r_k}(k)$ на целое число $(2b)^{2(r-1)}(r-1)!(m+r-1)!$ с точностью до n знаков, что даёт нам значение суммы V.

Подсчитаем число операций, достаточное для вычисления на шаге j, $1 \le j \le k$, значений $\beta_{r_j-\nu}(j)$, предполагая при этом, что числа $\beta_\mu(j-1)$ были вычислены ранее. Для этого получим сначала оценку сверху для длины чисел, с которыми производятся вычисления на j-м шаге.

Пусть $\beta(j) = \max\limits_{\mu} \beta_\mu(j)$. Поскольку

$$\frac{(r-2^j\nu-1)!}{(r-2^j\nu-2^{j-1}-1)!} \le r^{2^{j-1}}, \qquad \frac{(m+r-2^j\nu-1)!}{(m+r-2^j\nu-2^{j-1}-1)!} \le r^{2^{j-1}},$$

то для $\beta(j)$ из (18) справедливо неравенство

$$\beta(j) \le \beta(j-1)(a^{2^{2j}} + (2b)^{2^{2j}} r^{2^{2j}}) \le 2\beta(j-1)(2abr)^{2^{2j}}.$$

Учитывая (17), отсюда получаем $\beta(j) \le m(2abr)^{2^{2j+1}}$. Сложность вычисления произведений

$$\Pi'_\nu(j) = (r-2^j\nu-1)(r-2^j\nu-2)\cdots(r-2^j\nu-2^{j-1}),$$

$$\Pi''_\nu(j) = (m+r-2^j\nu-1)(m+r-2^j\nu-2)\cdots(m+r-2^j\nu-2^{j-1}),$$

учитывая оценки сложности из [32], не превышает

$$O\left(\sum_{q=1}^{j-1} M(2^q \log r)\right). \tag{20}$$

Количество операций, достаточное для вычисления первого и второго слагаемого в (18) (предполагаем, что значения a^{2^j}, $(2b)^{2^j}$, $\beta_\mu(j)$, $\Pi'_\nu(j)$, $\Pi''_\nu(j)$ уже вычислены):

$$O(M(2^j \log abr)). \tag{21}$$

Чтобы вычислить все $\beta_{r_j-\nu}(j)$, которых ровно $r_j = r/2^j$, из (20), (21) достаточно затратить

$$O\left(r_j\left(\sum_{q=1}^{j-1} M(2^q \log r) + M(2^j \log abr)\right)\right) \tag{22}$$

операций. Чтобы вычислить знаменатель дроби (19) достаточно затратить

$$O(M(r \log r)) \tag{23}$$

операций. Следовательно, сложность вычисления суммы V из (22), (23) есть

$$O\left(\sum_{j=1}^{k} 2^{-j} r \left(\sum_{q=1}^{j-1} M(2^q \log r) + M(2^j \log r)\right)\right) + O(M(r \log r)) = O(r \log^3 r \log\log r).$$

Принимая во внимание (6), (15), получаем, что сложность вычисления значения функции $y = J_m(x)$ с точностью до n знаков при рациональном аргументе x есть

$$O(n \log^3 n \log\log n),$$

или, что то же самое,

$$O(M(n) \log^2 n). \tag{24}$$

Отметим, что мы специально выделяем случай БВЕ-вычисления функции Бесселя в рациональной точке от её БВЕ-вычисления в других алгебраических точках. Ведь несмотря на то, что оценки сложности вычисления в этих двух случаях имеют одинаковый вид, который выражается формулой (24), константы, стоящие в O для этих алгоритмов, существенно отличаются, для случая рационального аргумента константа много меньше. Поэтому для вычисления функций Бесселя рационального аргумента на практике лучше пользоваться вышеописанным процессом, а не более универсальным алгоритмом для любого алгебраического аргумента.

Вычислим функцию $y = J_m(z)$, когда $z = \alpha$ — алгебраическое число. В этом случае мы предполагаем, что нам известен многочлен наименьшей степени с целыми коэффициентами, корнем которого является α, т. е.

$$g(z) = g_l z^l + g_{l-1} z^{l-1} + \cdots + g_1 z + g_0, \quad g(\alpha) = 0, \tag{25}$$

$g_l, g_{l-1}, \ldots, g_0$ — целые числа, $l \geq 2$. Чтобы вычислить $J_m(\alpha)$ вычисляем сумму

$$V = V(\alpha) = \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \frac{\alpha^{2j}}{2^{2j} j!(m+j)!},$$

учитывая, что α удовлетворяет (25). Определим число j_0 неравенствами $2^{j_0-1} < l \le 2^{j_0}$. Поскольку $l \ge 2$, то $j_0 \ge 1$. До шага j_0 сумму V вычисляем следующим образом. Объединяя слагаемые суммы V так же, как и для случая рационального аргумента, будем вычислять на каждом шаге не числа $\beta_\mu(j)$, а только целые коэффициенты при степенях α в $\beta_\mu(j)$. После шага j_0 такого процесса выражение для $\beta_\mu(j_0)$ является многочленом с целыми коэффициентами степени 2^{j_0} от α. Перед шагом $j_0 + 1$ редуцируем $\beta_\mu(j_0)$ по модулю многочлена $g(z)$ при $z = \alpha$. Имеем

$$\beta_\mu(j_0) = g(z) g_0(z) + g_1(z), \quad g(\alpha) = 0.$$

Отсюда

$$\beta_\mu(j_0) = g_1(z), \tag{26}$$

где $g_1(z)$ есть многочлен с рациональными, в общем случае, коэффициентами, степень которого не превосходит $l - 1$. Умножая, если нужно, (26) на некоторое целое число, мы получим в качестве $g_1(z)$ снова многочлен с целыми коэффициентами. Далее на каждом шаге j_0, j_0+1, $j_0+2, \ldots$ мы редуцируем многочлены от α из $\beta_\mu(j)$ по модулю многочлена $g(z)$ при $z = \alpha$. Подробное описание аналогичного БВЕ-процесса содержится в [32, 36].

Поскольку коэффициенты в $g(z)$ являются абсолютными константами и степень $g(z)$ есть также абсолютная константа, то при указанных редукциях разрядность чисел, участвующих в вычислениях, может вырасти лишь в постоянное число раз, и причём не более чем в g^l раз, где $g = \max_{0 \le j \le l} |g_j|$, что не ухудшает оценку сложности вычисления. После k-го шага получаем значение суммы V.

Таким образом, сложность вычисления функции Бесселя $y = J_m(z)$ при алгебраическом аргументе $z = \alpha$ с точностью 2^{-n} есть $O\left(n \log^3 n \log\log n\right)$.

Если порядок функции Бесселя ν также является алгебраическим числом, то процесс вычисления отличается от вышеприведённого лишь тем, что редукции проводятся по модулю двух многочленов: $g(z)$ и $h(z)$, где $h(z)$ — многочлен наименьшей степени с целыми коэффициентами, корнем которого является алгебраическое число ν: $h(\nu) = 0$. Сложность вычисления во всех случаях имеет оценку

$$s_J(n) = O\left(M(n) \log^2 n\right).$$

Другие цилиндрические функции могут быть вычислены аналогичным образом и с той же оценкой сложности вычисления.

2. Вычисление функций Бесселя большого аргумента

Чтобы вычислить функцию Бесселя $y = J_\nu(z)$ для большого z воспользуемся формулой (см., например, [1])

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} \cos zt\, dt, \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}. \tag{27}$$

Для простоты рассмотрим случай вещественных аргумента $z = x$ и индекса ν (для комплексного случая можно провести аналогичные выкладки). Из-за чётности подынтегральной функции по t в интеграле из (27) имеем

$$J_\nu(x) = 2\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos xt\,dt. \tag{28}$$

Обозначим через $I(x)$ интеграл из (28):

$$I(x) = \int\limits_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos xt\,dt. \tag{29}$$

Разобьём $I(x)$ на два интеграла:

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x), \tag{30}$$

где

$$I_1(x) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos xt\,dt. \tag{31}$$

$$I_2(x) = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{\nu-\frac{1}{2}}(1+t)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos xt\,dt. \tag{32}$$

Сделаем в $I_2(x)$ замену переменной интегрирования $1-t=u$, $-dt=du$. Получим из (32):

$$\begin{aligned}I_2(x) &= \int\limits_0^{\frac{1}{2}} u^{\nu-\frac{1}{2}}(2-u)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos x(1-u)\,du\\ &= 2^{\nu-\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{u}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos x\cos xu\,du - \int\limits_0^{\frac{1}{2}} u^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{u}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\sin x\sin xu\,du\right).\end{aligned}$$

Отсюда и из (30)–(32)

$$I(x) = I_1(x) + 2^{\nu-\frac{1}{2}}\cos xI_{21}(x) - 2^{\nu-\frac{1}{2}}\sin xI_{22}(x), \tag{33}$$

где

$$I_{21}(x) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} u^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{u}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos xu\,du, \tag{34}$$

$$I_{22}(x) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} u^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{u}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\sin xu\,du. \tag{35}$$

Интегралы I_1, I_{21} и I_{22} однотипны (см. (31), (34), (35)). Вычисляются они одинаковым образом. Разложим функции $(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}$, $u^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{u}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}$ в ряд Тейлора, который сходится быстро, так как $0<u<\frac{1}{2}$. Поскольку функции $\cos xu$ и $\sin xu$ из-за большого x при разложении в ряд Тейлора должны быть представлены слишком большим числом членов этого ряда для заданной точности, преобразуем сначала эти функции. Обозначим

$$x_1 = \frac{x}{2\pi}. \tag{36}$$

При этом $\cos xu = \cos 2\pi x_1 u$, $\sin xu = \sin 2\pi x_1 u$. Поскольку $0 < u < \frac{1}{2}$, то $0 < x_1 u < \frac{x_1}{2}$. Разобьём интервал $\left(0, \frac{x_1}{2}\right)$ целыми точками на $\left[\frac{x_1}{2}\right] + 1$ интервалов вида $(k, k+1)$, $k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{x_1}{2}\right] - 1$. Последний из этих интервалов имеет вид $\left(\left[\frac{x_1}{2}\right], \frac{x_1}{2}\right)$. Тем самым интервал интегрирования по u на $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ разбивается на $\left[\frac{x_1}{2}\right] + 1$ интервалов вида $\left(\frac{k}{x_1}, \frac{k+1}{x_1}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{x_1}{2}\right] - 1$, последний из которых имеет вид $\left(\frac{\left[\frac{x_1}{2}\right]}{x_1}, \frac{1}{2}\right)$. При этом каждый из интегралов I_1, I_{21}, I_{22} нужно представить в виде суммы $\left[\frac{x_1}{2}\right] + 1$ интегралов. Например, для I_1 имеем

$$I_1 = I_1(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{x_1}{2}\right]-1} \int\limits_{\frac{k}{x_1}}^{\frac{k+1}{x_1}} (1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos 2\pi x_1 u \, du + \int\limits_{\frac{\left[\frac{x_1}{2}\right]}{x_1}}^{\frac{1}{2}} (1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos 2\pi x_1 u \, du = \sum_{k=0}^{\left[\frac{x_1}{2}\right]-1} \mathcal{I}_1(k, x_1) + \mathcal{I}_1\left(\frac{1}{2}, x_1\right). \tag{37}$$

При $\frac{k}{x_1} < u < \frac{k+1}{x_1}$, $k < x_1 u < k+1$, из-за периодичности косинуса с периодом 2π имеем

$$\cos 2\pi x_1 u = \cos 2\pi(x_1 u - k), \quad 0 < x_1 u - k < 1, \quad 0 < 2\pi(x_1 u - k) < 2\pi, \tag{38}$$

т. е. в разложении $\cos 2\pi(x_1 u - k)$ в ряд Тейлора теперь будет не слишком много слагаемых для заданной точности δ, $\delta \le 2^{-n}$, n — натуральное число. Так как

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \cdots + (-1)^m \frac{y^{2m}}{(2m)!} + \theta \frac{y^{2m+2}}{(2m+2)!}, \quad 0 < y = 2\pi(x_1 u - k) < 2\pi, \tag{39}$$

то для того чтобы получить точность вычисления $\delta \le 2^{-n}$ нужно, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{y^{2m+2}}{(2m+2)!} < \frac{(2\pi)^{2m+2}}{(2m+2)!} < \left(\frac{2\pi e}{2m+2}\right)^{2m+2} < \frac{1}{2^n}, \tag{40}$$

и число членов ряда (39) устанавливается, как наименьшее целое $\mu(n)$ такое, что при $m \ge \mu(n)$ выполняется (40). Для конкретных примеров лучше сразу выбирать $\mu(n)$: скажем, при $n \ge 12$ достаточно, чтобы $m = n$; при $n \ge 32$, согласно (40), достаточно, чтобы $m = \frac{n}{2}$; при $n \ge 128$ достаточно, чтобы $m = \frac{n}{4}$ и т. д.

Учитывая (38)–(40), для интегралов $\mathcal{I}_1(k, x_1)$ из (37) находим:

$$\mathcal{I}_1(k, x_1) = \int\limits_{\frac{k}{x_1}}^{\frac{k+1}{x_1}} (1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos 2\pi(x_1 u - k) \, du$$

$$= \int\limits_{\frac{k}{x_1}}^{\frac{k+1}{x_1}} (1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \cdots + (-1)^m \frac{y^{2m}}{(2m)!} + \cdots\right) du$$

$$= \int\limits_{\frac{k}{x_1}}^{\frac{k+1}{x_1}} (1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\mu(n)} \frac{(-1)^m}{(2m)!} (2\pi(x_1u-k))^{2m}\, du + \theta\, 2^{-n}. \qquad (41)$$

Разложим бином $(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}$ в ряд Тейлора:

$$(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\nu-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\nu-r+\frac{1}{2}\right)}{r!} (-1)^r u^{2r}. \qquad (42)$$

Для заданного индекса функции Бесселя ν при $0 < u < \frac{1}{2}$ легко оценить остаток ряда (42), который не превосходит величины

$$\left| \frac{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\nu-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\nu-r+\frac{1}{2}\right)}{r!} \frac{1}{2^{2r}} \right| < \frac{\nu^r}{r!2^{2r}} < \left(\frac{\nu}{r}\right)^r. \qquad (43)$$

Число членов ряда (42) $\rho(n)$ нужно выбирать таким, чтобы $\rho(n)$ было наименьшим целым числом, для которого при $r \geq \rho(n)$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{\nu}{r}\right)^r < \left(\frac{1}{2}\right)^n. \qquad (44)$$

При этом для интегралов (37) имеем

$$\mathcal{I}_1(k,x_1) = \int\limits_{\frac{k}{x_1}}^{\frac{k+1}{x_1}} \sum_{r=0}^{\rho(n)} (-1)^r \binom{\nu-\frac{1}{2}}{r} u^{2r} \sum_{m=0}^{\mu(n)} \frac{(-1)^m}{(2m)!} (2\pi(x_1u-k))^{2m}\, du + \theta_1 2^{-n}. \qquad (45)$$

Сделаем в интегралах из (45) замену переменной интегрирования

$$x_1 - k = v,\ u = \frac{v+k}{x_1}, \quad du = \frac{dv}{x_1}, \quad 0 < v < 1. \qquad (46)$$

Получаем из (45)

$$\mathcal{I}_1(k,x_1) = \int\limits_0^1 \sum_{r=0}^{\rho(n)} \frac{(-1)^r}{{x_1}^{2r+1}} \binom{\nu-\frac{1}{2}}{r} (v+k)^{2r} \sum_{m=0}^{\mu(n)} \frac{(-1)^m (2\pi)^{2m}}{(2m)!} v^{2m}\, dv + \theta_1 2^{-n}$$

$$= \sum_{r=0}^{\rho(n)} \sum_{m=0}^{\mu(n)} \binom{\nu-\frac{1}{2}}{r} \frac{(-1)^{r+m}}{{x_1}^{2r+1}} \frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!} \int\limits_0^1 (v+k)^{2r} v^{2m}\, dv + \theta_1 2^{-n}. \qquad (47)$$

Интегралы из (47) легко вычисляются:

$$\int\limits_0^1 (v+k)^{2r} v^{2m}\, dv = \sum_{l=0}^{2r} \binom{2r}{l} k^l \int\limits_0^1 v^{2r-l+2m}\, dv = \sum_{l=0}^{2r} \binom{2r}{l} \frac{k^l}{2r+2m+1-l}. \tag{48}$$

Из (47), (48) получаем

$$\mathcal{I}_1(k, x_1) = \sum_{r=0}^{\rho(n)} \sum_{m=0}^{\mu(n)} \sum_{l=0}^{2r} \binom{\nu-\frac{1}{2}}{r} \binom{2r}{l} \frac{(-1)^{r+m}}{{x_1}^{2r+1}} \frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!} \frac{k^l}{2r+2m+1-l} + \theta_1 2^{-n}. \tag{49}$$

Интеграл $\mathcal{I}_1\left(\frac{1}{2}, x_1\right)$ рассматриваем отдельно:

$$\mathcal{I}_1\left(\frac{1}{2}, x_1\right) = \int\limits_{\frac{\left[\frac{x_1}{2}\right]}{x_1}}^{\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\rho(n)} \sum_{m=0}^{\mu(n)} \binom{\nu-\frac{1}{2}}{r} \frac{(-1)^{r+m}}{{x_1}^{2r+1}} \frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!} u^{2r} \left(x_1 u - \left[\frac{x_1}{2}\right]\right)^{2m} du + \theta_2 2^{-n}. \tag{50}$$

Вычислим интеграл из (50), сделав замену переменной интегрирования

$$v = x_1 u - \left[\frac{x_1}{2}\right], \quad dv = x_1 du, \quad u = \frac{v + \left[\frac{x_1}{2}\right]}{x_1}.$$

Находим

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\frac{\left[\frac{x_1}{2}\right]}{x_1}}^{\frac{1}{2}} u^{2r} \left(x_1 u - \left[\frac{x_1}{2}\right]\right)^{2m} du &= \int\limits_0^{\frac{x_1}{2}-\left[\frac{x_1}{2}\right]} v^{2m} \left(v + \left[\frac{x_1}{2}\right]\right)^{2r} \frac{dv}{x_1^{2r+1}} \\
&= \frac{1}{x_1^{2r+1}} \int\limits_0^{\frac{x_1}{2}-\left[\frac{x_1}{2}\right]} v^{2m} \left(\sum_{l=0}^{2r} \binom{2r}{l} v^{2r-l} \left[\frac{x_1}{2}\right]^l\right) dv \\
&= \frac{1}{x_1^{2r+1}} \sum_{l=0}^{2r} \binom{2r}{l} \left[\frac{x_1}{2}\right]^l \int\limits_0^{\frac{x_1}{2}-\left[\frac{x_1}{2}\right]} v^{2r+2m-l}\, dv \\
&= \frac{1}{x_1^{2r+1}} \sum_{l=0}^{2r} \binom{2r}{l} \left[\frac{x_1}{2}\right]^l \frac{\left(\frac{x_1}{2} - \left[\frac{x_1}{2}\right]\right)^{2r+2m+1-l}}{2r+2m+1-l}.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1\left(\frac{1}{2}, x_1\right) = \sum_{r=0}^{\rho(n)} \sum_{m=0}^{\mu(n)} \sum_{l=0}^{2r} \binom{\nu-\frac{1}{2}}{r} \binom{2r}{l} \times \\
\frac{(-1)^{r+m}}{{x_1}^{2r+1}} \frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!} \left[\frac{x_1}{2}\right]^l \frac{\left(\frac{x_1}{2} - \left[\frac{x_1}{2}\right]\right)^{2r+2m+1-l}}{2r+2m+1-l} + \theta_2 2^{-n}.
\end{aligned} \tag{51}$$

Следовательно, для интеграла I_1 (см. (30), (31), (37)) получаем из (49), (51) следующее приближение:

$$I_1 = I_1(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{x_1}{2}\right]-1} \mathcal{I}_1(k, x_1) + \mathcal{I}_1\left(\frac{1}{2}, x_1\right)$$
$$= \sum_{r=0}^{\rho(n)} \sum_{m=0}^{\mu(n)} \sum_{l=0}^{2r} \binom{\nu - \frac{1}{2}}{r} \binom{2r}{l} \frac{(-1)^r}{{x_1}^{2r+1}} \frac{(-1)^m (2\pi)^{2m}}{(2m)!(2r+2m+1-l)} \times$$
$$\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{x_1}{2}\right]-1} k^l + \left[\frac{x_1}{2}\right]^l \left(\frac{x_1}{2} - \left[\frac{x_1}{2}\right]\right)^{2r+2m+1-l} \right) + \theta_3 2^{-n}, \quad x_1 = \frac{x}{2\pi}. \tag{52}$$

Таким образом, формула (52) является основной формулой для вычисления интеграла I_1. Интегралы I_{21} и I_{22} вычисляются аналогично, после чего значение функции Бесселя $J_\nu(x)$ вычисляется согласно формулам (28)–(30).

На конкретных примерах легче продемонстрировать, как выбирать параметры для достижения нужной точности. Покажем это на примере вычисления интеграла (50) при вычислении функции $J_1(x)$ большого аргумента x. Из (28)

$$J_1(x) = \frac{2x}{\pi} \left(I_1^\star(x) + \cos x I_{21}^\star(x) - \sin x I_{22}^\star(x) \right). \tag{53}$$

(Заметим, что вычисление модуля периодических функций $\cos x$, $\sin x$ большого аргумента x нужно сводить к их вычислению на интервале длины $\pi/2$.) Из (39), (43), (44) находим $\left|\binom{\frac{1}{2}}{r}\right| < \frac{1}{2}$ и $(1-u^2)^{1/2} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{\frac{1}{2}}{r} u^{2r} + \theta_4 2^{-2n}$, т. е. для достижения нужной точности приближения достаточно выбрать $\rho(n) = n$. Если при этом $12 \le n \le 32$, то в качестве $\mu(n)$ также выбираем n. Тем самым получаем следующую аппроксимацию интеграла $I_1^\star(x)$ с точностью до n двоичных знаков:

$$I_1^\star(x) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{m=0}^{n} \sum_{l=0}^{2r} \binom{\frac{1}{2}}{r} \binom{2r}{l} \frac{(-1)^r}{x^{2r+1}} \frac{(-1)^m (2\pi)^{2r+2m+1}}{(2m)!(2r+2m+1-l)} \times$$
$$\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{x}{4\pi}\right]-1} k^l + \left[\frac{x}{4\pi}\right]^l \left(\frac{x}{4\pi} - \left[\frac{x}{4\pi}\right]\right)^{2r+2m+1-l} \right) + \theta_5 2^{-2n+2}.$$

Аналогично приближаются интегралы $I_{21}^\star(x)$, $I_{22}^\star(x)$, и функция $J_1(x)$ вычисляется по формуле (53) с точностью до n заданных знаков.

Литература

1. **Watson G.N.** A Treatise on the Theory of Bessel Functions.— Cambridge: Cambridge University Press, 1922.
2. **Olver F.W.J.** The asymptotic expansion of Bessel functions of large order // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences.— 1954.— Vol. 247, № 930.— P. 328–368.
3. **Thacher H.C.** New backward recurrences for Bessel functions // Mathematics of Computation.— 1979.— Vol. 33, № 146.— P. 744–764.
4. **Baratella P., Garetto M., Vinardi G.** Approximation of the Bessel function $J_\nu(x)$ by numerical integration // J. of Computational and Applied Mathematics.— 1981.— Vol. 7, № 2.— P. 87–91.

5. **Balla K., Guk O.S., Vicsek M.** On the computation of Bessel functions of first kind // Computing. — 1993. — Vol. 50, № 1. — P. 77–85.
6. **Matviyenko G.** On the evaluation of Bessel functions // Applied and Computational Harmonic Analysis. — 1993. — Vol. 1, № 1. — P. 116–135.
7. **Temme N.M.** Special Functions: An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics. — New York: Wiley, 1996.
8. **Gautschi W.** Computation of Bessel and Airy functions and of related Gaussian quadrature formulae // BIT. — 2002. — Vol. 42, № 1. — P. 110–118.
9. **Borwein D., Borwein J.M., Chan Y.** The evaluation of Bessel functions via exp-arc integrals // J. of Mathematical Analysis and Applications. — 2008. — Vol. 341, № 1. — P. 478–500.
10. **Paris R.B.** High-precision evaluation of the Bessel functions via Hadamard series // J. of Computational and Applied Mathematics. — 2009. — Vol. 224, № 1. — P. 84–100.
11. **Harrison J.** Fast and Accurate Bessel Function Computation // Proc. of ARITH19, the 19th IEEE Conference on Computer Arithmetic. — 2009. — P. 104–113. — (IEEE Computer Society Press).
12. **Jentschura U.D., Lötstedt E.** Numerical calculation of Bessel, Hankel and Airy functions // Computer Physics Communications. — 2012. — Vol. 183, № 3. — P. 506–519.
13. **Krasikov I.** Approximations for the Bessel and Airy functions with an explicit error term // LMS J. of Computation and Mathematics. — 2014. — Vol. 17, № 1. — P. 209–225.
14. **Heitman Z., Bremer J., Rokhlin V., Vioreanu B.** On the asymptotics of Bessel functions in the Fresnel regime // Applied and Computational Harmonic Analysis. — 2015. — Vol. 39, № 2. — P. 347–356.
15. **Bremer J.** An algorithm for the rapid numerical evaluation of Bessel functions of real orders and arguments // Advances in Computational Mathematics. — 2019. — Vol. 45, iss. 1. — P. 173–211.
16. **Karatsuba C.A.** Fast evaluation of Bessel functions // Integral Transforms and Special Functions. — 1993. — Vol. 1, № 4. — P. 269–276.
17. **Карацуба А.А.** Сложность вычислений // Тр. Математического института им. Стеклова. — 1995. — Т. 211. — С. 169–183. Перевод: Karatsuba A.A. The complexity of computations // Proc. Steklov Inst. Math. — 1995. — Vol. 211. — P. 169–183.
18. **Карацуба А.А.** Комментарии к моим работам, написанные мной самим // Совр. пробл. матем. — 2013. — Т. 17. — С. 7–29. Перевод: Karatsuba A.A. Comments to my works, written by myself // Proc. Steklov Inst. Math. — 2013. — Vol. 282, suppl. 1. — P. S1–S23.
19. **Колмогоров А.Н.** Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987. Перевод: Kolmogorov A.N. Information theory and the theory of algorithms. — Kluwer Academic Publishers edition, 1993.
20. **Карацуба А.А., Офман Ю.П.** Умножение многозначных чисел на автоматах // ДАН СССР. — 1962. — Т. 145, № 2. — С. 293–294. Перевод: Karatsuba A.A., Ofman Yu.P. Multiplication of multidigit numbers on automata // Soviet Physics–Doklady. — 1963. — Vol. 7. — P. 595–596.
21. **Cooley J.W., Tukey J.W.** An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series // Math. Comput. — 1965. — Vol. 19. — P. 297–301.
22. **Тоом А.Л.** О сложности схемы из функциональных элементов, реализующей умножение целых чисел // ДАН СССР. — 1963. — Т. 150, № 2. — С. 496–498. Перевод: Toom A. The complexity of a scheme of functional elements realizing the multiplication of integers // Soviet Mathematics–Doklady. — 1963. — Vol. 3. — P. 714–716.
23. **Schönhage A., Strassen V.** Schnelle Multiplikation grosser Zahlen // Computing. — 1971. — Vol. 7. — P. 281–292.

24. **Schönhage A., Grotefeld A.F.W., Vetter E.** Fast Algorithms — A Multitape Turing Machine Implementation. — Zürich: BI-Wiss.-Verl., 1994.

25. **Fürer M.** Faster integer multiplication // SIAM J. on Computing. — 2009. — Vol. 39, № 3. — P. 979–1005.

26. **Strassen V.** Gaussian elimination is not optimal // J. Numer. Math. — 1969. — Vol. 13. — P. 354–356.

27. **Coppersmith D., Winograd S.** On the asymptotic complexity of matrix multiplication // SIAM J. on Computing. — 1982. — Vol 11, № 3. — P. 472–492.

28. **Carlson B.C.** Algorithms involving arithmetic and geometric means // Amer. Math. Monthly. — 1971. — Vol. 78. — P. 496–505.

29. **Carlson B.C.** An algorithm for computing logarithms and arctangents // Math. Comp. — 1972. — Vol. 26, № 118. — P. 543–549.

30. **Salamin E.** Computation of π using arithmetic-geometric mean // Math. Comp. — 1976. — Vol. 30, № 135. — P. 565–570.

31. **Borwein J.M., Borwein P.B.** Pi and the AGM – A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity. — New York: Wiley, 1987.

32. **Карацуба Е.А.** О новом методе быстрого вычисления трансцендентных функций // Успехи Математических Наук. — 1991. — Т. 46, № 2(278). — С. 219–220. Перевод: Karatsuba E.A. On a new method for fast evaluation of transcendental functions // Russian Math. Surveys. — 1991. — Vol. 46, № 2. — P. 246–247.

33. **Карацуба Е.А.** Быстрое вычисление трансцендентных функций // Проблемы передачи информации. — 1991. — Т. 27, № 4. — С. 87–110. Перевод: Karatsuba E.A. Fast evaluation of transcendental functions // Problems Inform. Transmission. — 1991. — Vol. 27, № 4. — P. 339–360.

34. **Карацуба Е.А.** Быстрое вычисление дзета-функции Римана $\zeta(s)$ для целых значений аргумента s // Проблемы передачи информации. — 1995. — Т. 31, № 4. — С. 69–80. Перевод: Karatsuba E.A. Fast calculation of the Riemann zeta function $\zeta(s)$ for integer values of the argument s // Problems Inform. Transmission. — 1995. — Vol. 31, № 4. — P. 353–362.

35. **Карацуба Е.А.** Быстрое вычисление дзета-функции Гурвица и L-рядов Дирихле // Проблемы передачи информации. — 1998. — Т. 34, № 4. — С. 342–353. Перевод: Karatsuba E.A. Fast evaluation of the Hurwitz zeta function and Dirichlet L-series // Problems Inform. Transmission. — 1998. — Vol. 34, № 4. — P. 342–353.

36. **Karatsuba E.A.** Fast evaluation of hypergeometric function by FEE // Computational Methods and Function Theory / N. Papamichael, St. Ruscheweyh and E.B. Saff. — World Sc. Pub., 1999. — P. 303–314.

37. **Karatsuba E.A.** On the computation of the Euler constant γ // J. of Numerical Algorithms. — 2000. — Vol. 24. — P. 83–97.

38. **Karatsuba E.A.** Fast computation of $\zeta(3)$ and of some special integrals, using the polylogarithms, the Ramanujan formula and it's generalization // BIT Numerical Mathematics. — 2001. — Vol. 41, № 4. — P. 722–730.

39. **Karatsuba E.A.** Fast computation of some special integrals of mathematical physics // Scientific Computing, Validated Numerics, Interval Methods / W. Krämer, J. W. von Gudenberg. — 2001. — P. 29–41.

40. **Карацуба Е.А.** Быстрое вычисление константы Каталана через приближения, полученные преобразованиями типа куммеровских // Дискрет. матем. — 2013. — Т. 25, № 4. — С. 74–87. Перевод: Karatsuba E.A. Fast Catalan constant computation via the approximations obtained by the Kummer's type transformations // Discrete Math. Appl. — 2013. — Vol. 23, № 5–6. — P. 429–443.

41. **Карацуба Е.А.** Об одном методе быстрого приближения дзета-констант рациональными дробями // Проблемы передачи информации. — 2014. — Т. 50, № 2. — С. 77–95. Перевод: Karatsuba E.A. On one method for fast approximation of zeta constants by rational fractions // Problems Inform. Transmission. — 2014. — Vol. 50, № 2. — P. 186–202.
42. **Karatsuba E.A.** On the asymptotic representation of the Euler gamma function by Ramanujan // J. Comput. Appl. Math. — 2001. — Vol. 135, № 2. — P. 225–240.

Поступила в редакцию 8 августа 2018 г.
После исправления 20 декабря 2018 г.
Принята к печати 25 июля 2019 г.

Литература в транслитерации

1. **Watson G.N.** A Treatise on the Theory of Bessel Functions. — Cambridge: Cambridge University Press, 1922.
2. **Olver F.W.J.** The asymptotic expansion of Bessel functions of large order // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. — 1954. — Vol. 247, № 930. — P. 328–368.
3. **Thacher H.C.** New backward recurrences for Bessel functions // Mathematics of Computation. — 1979. — Vol. 33, № 146. — P. 744–764.
4. **Baratella P., Garetto M., Vinardi G.** Approximation of the Bessel function $J_\nu(x)$ by numerical integration // J. of Computational and Applied Mathematics. — 1981. — Vol. 7, № 2. — P. 87–91.
5. **Balla K., Guk O.S., Vicsek M.** On the computation of Bessel functions of first kind // Computing. — 1993. — Vol. 50, № 1. — P. 77–85.
6. **Matviyenko G.** On the evaluation of Bessel functions // Applied and Computational Harmonic Analysis. — 1993. — Vol. 1, № 1. — P. 116–135.
7. **Temme N.M.** Special Functions: An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics. — New York: Wiley, 1996.
8. **Gautschi W.** Computation of Bessel and Airy functions and of related Gaussian quadrature formulae // BIT. — 2002. — Vol. 42, № 1. — P. 110–118.
9. **Borwein D., Borwein J.M., Chan Y.** The evaluation of Bessel functions via exp-arc integrals // J. of Mathematical Analysis and Applications. — 2008. — Vol. 341, № 1. — P. 478–500.
10. **Paris R.B.** High-precision evaluation of the Bessel functions via Hadamard series // J. of Computational and Applied Mathematics. — 2009. — Vol. 224, № 1. — P. 84–100.
11. **Harrison J.** Fast and Accurate Bessel Function Computation // Proc. of ARITH19, the 19th IEEE Conference on Computer Arithmetic. — 2009. — P. 104–113. — (IEEE Computer Society Press).
12. **Jentschura U.D., Lötstedt E.** Numerical calculation of Bessel, Hankel and Airy functions // Computer Physics Communications. — 2012. — Vol. 183, № 3. — P. 506–519.
13. **Krasikov I.** Approximations for the Bessel and Airy functions with an explicit error term // LMS J. of Computation and Mathematics. — 2014. — Vol. 17, № 1. — P. 209–225.
14. **Heitman Z., Bremer J., Rokhlin V., Vioreanu B.** On the asymptotics of Bessel functions in the Fresnel regime // Applied and Computational Harmonic Analysis. — 2015. — Vol. 39, № 2. — P. 347–356.
15. **Bremer J.** An algorithm for the rapid numerical evaluation of Bessel functions of real orders and arguments // Advances in Computational Mathematics. — 2019. — Vol. 45, iss. 1. — P. 173–211.

16. **Karatsuba C.A.** Fast evaluation of Bessel functions // Integral Transforms and Special Functions. — 1993. — Vol. 1, № 4. — P. 269–276.

17. **Karacuba A.A.** Slozhnost' vychisleniy // Tr. Matematicheskogo instituta im. Steklova. — 1995. — T. 211. — S. 169–183. Perevod: Karatsuba A.A. The complexity of computations // Proc. Steklov Inst. Math. — 1995. — Vol. 211. — P. 169–183.

18. **Karacuba A.A.** Kommentarii k moim rabotam, napisannye mnoy samim // Sovr. probl. matem. — 2013. — T. 17. — S. 7–29. Perevod: Karatsuba A.A. Comments to my works, written by myself // Proc. Steklov Inst. Math. — 2013. — Vol. 282, suppl. 1. — P. S1–S23.

19. **Kolmogorov A.N.** Teoriya informacii i teoriya algoritmov. — M.: Nauka, 1987. Perevod: Kolmogorov A.N. Information theory and the theory of algorithms. — Kluwer Academic Publishers edition, 1993.

20. **Karacuba A.A., Ofman Yu.P.** Umnozhenie mnogoznachnykh chisel na avtomatakh // DAN SSSR. — 1962. — T. 145, № 2. — S. 293–294. Perevod: Karatsuba A.A., Ofman Yu.P. Multiplication of multidigit numbers on automata // Soviet Physics–Doklady. — 1963. — Vol. 7. — P. 595–596.

21. **Cooley J.W., Tukey J.W.** An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series // Math. Comput. — 1965. — Vol. 19. — P. 297–301.

22. **Toom A.L.** O slozhnosti skhemy iz funkcional'nykh elementov, realizuyuschey umnozhenie celykh chisel // DAN SSSR. — 1963. — T. 150, № 2. — S. 496–498. Perevod: Toom A. The complexity of a scheme of functional elements realizing the multiplication of integers // Soviet Mathematics–Doklady. — 1963. — Vol. 3. — P. 714–716.

23. **Schönhage A., Strassen V.** Schnelle Multiplikation grosser Zahlen // Computing. — 1971. — Vol. 7. — P. 281–292.

24. **Schönhage A., Grotefeld A.F.W., Vetter E.** Fast Algorithms — A Multitape Turing Machine Implementation. — Zürich: BI-Wiss.-Verl., 1994.

25. **Fürer M.** Faster integer multiplication // SIAM J. on Computing. — 2009. — Vol. 39, № 3. — P. 979–1005.

26. **Strassen V.** Gaussian elimination is not optimal // J. Numer. Math. — 1969. — Vol. 13. — P. 354–356.

27. **Coppersmith D., Winograd S.** On the asymptotic complexity of matrix multiplication // SIAM J. on Computing. — 1982. — Vol 11, № 3. — P. 472–492.

28. **Carlson B.C.** Algorithms involving arithmetic and geometric means // Amer. Math. Monthly. — 1971. — Vol. 78. — P. 496–505.

29. **Carlson B.C.** An algorithm for computing logarithms and arctangents // Math. Comp. — 1972. — Vol. 26, № 118. — P. 543–549.

30. **Salamin E.** Computation of π using arithmetic-geometric mean // Math. Comp. — 1976. — Vol. 30, № 135. — P. 565–570.

31. **Borwein J.M., Borwein P.B.** Pi and the AGM – A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity. — New York: Wiley, 1987.

32. **Karacuba E.A.** O novom metode bystrogo vychisleniya transcendentnykh funkciy // Uspekhi Matematicheskikh Nauk. — 1991. — T. 46, № 2(278). — S. 219–220. Perevod: Karatsuba E.A. On a new method for fast evaluation of transcendental functions // Russian Math. Surveys. — 1991. — Vol. 46, № 2. — P. 246–247.

33. **Karacuba E.A.** Bystroe vychislenie transcendentnykh funkciy // Problemy peredachi informacii. — 1991. — T. 27, № 4. — S. 87–110. Perevod: Karatsuba E.A. Fast evaluation of transcendental functions // Problems Inform. Transmission. — 1991. — Vol. 27, № 4. — P. 339–360.

34. **Karacuba E.A.** Bystroe vychislenie dzeta-funkcii Rimana $\zeta(s)$ dlya celykh znacheniy argumenta s // Problemy peredachi informacii. — 1995. — T. 31, № 4. — S. 69–80. Perevod: Karatsuba E.A. Fast calculation of the Riemann zeta function $\zeta(s)$ for integer values of the argument s // Problems Inform. Transmission. — 1995. — Vol. 31, № 4. — P. 353–362.

35. **Karacuba E.A.** Bystroe vychislenie dzeta-funkcii Gurvica i L-ryadov Dirikhle // Problemy peredachi informacii. — 1998. — T. 34, № 4. — S. 342–353. Perevod: Karatsuba E.A. Fast evaluation of the Hurwitz zeta function and Dirichlet L-series // Problems Inform. Transmission. — 1998. — Vol. 34, № 4. — P. 342–353.

36. **Karatsuba E.A.** Fast evaluation of hypergeometric function by FEE // Computational Methods and Function Theory / N. Papamichael, St. Ruscheweyh and E.B. Saff. — World Sc. Pub., 1999. — P. 303–314.

37. **Karatsuba E.A.** On the computation of the Euler constant γ // J. of Numerical Algorithms. — 2000. — Vol. 24. — P. 83–97.

38. **Karatsuba E.A.** Fast computation of $\zeta(3)$ and of some special integrals, using the polylogarithms, the Ramanujan formula and it's generalization // BIT Numerical Mathematics. — 2001. — Vol. 41, № 4. — P. 722–730.

39. **Karatsuba E.A.** Fast computation of some special integrals of mathematical physics // Scientific Computing, Validated Numerics, Interval Methods / W. Krämer, J. W. von Gudenberg. — 2001. — P. 29–41.

40. **Karacuba E.A.** Bystroe vychislenie konstanty Katalana cherez priblizheniya, poluchennye preobrazovaniyami tipa kummerovskikh // Diskret. matem. — 2013. — T. 25, № 4. — S. 74–87. Perevod: Karatsuba E.A. Fast Catalan constant computation via the approximations obtained by the Kummer's type transformations // Discrete Math. Appl. — 2013. — Vol. 23, № 5–6. — P. 429–443.

41. **Karacuba E.A.** Ob odnom metode bystrogo priblizheniya dzeta-konstant racional'nymi drobyami // Problemy peredachi informacii. — 2014. — T. 50, № 2. — S. 77–95. Perevod: Karatsuba E.A. On one method for fast approximation of zeta constants by rational fractions // Problems Inform. Transmission. — 2014. — Vol. 50, № 2. — P. 186–202.

42. **Karatsuba E.A.** On the asymptotic representation of the Euler gamma function by Ramanujan // J. Comput. Appl. Math. — 2001. — Vol. 135, № 2. — P. 225–240.