ПМТФ, № 1, 1969

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН РАЗРЫВОВ В СЛОЖНЫХ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СРЕДАХ С ВЯЗКИМИ СВОЙСТВАМИ

А. Д. Чернышов

(Воронеж)

Рассматривается распространение волн разрывов различного порядка в сложных реологических средах. Предполагается, что область разрыва величин можно представить переходным слоем бесконечно малой толщины. Это позволяет получить результаты для довольно широкого класса сплошных сред с вязкими свойствами, которые обобщают результаты Дюгема. Получены первые интегралы законов сохранения количества движения и энергии, справедливые внутри переходного слоя ударной волны.

Показано, что при включении элементов вязкости специальным способом в реологическую модель сплошной среды возможно распространение волн разрывов любого порядка, при этом на поверхности сильного разрыва в теплопроводной среде температура непрерывна. Получены дополнительные условия на разрывы деформаций на элементах вязкости. При некоторых включениях элементов вязкости в реологическую модель распространение волн разрывов невозможно. Возможна только поверхность слабого разрыва, отделяющая область течения сплошной среды от области покоя. Контактные разрывы возможны в любой сплошной среде.

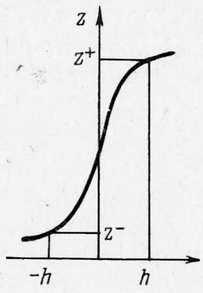
Впервые возможность существования геометрической поверхности разрывов в вязком газе рассматривалась Дюгемом [1]. Он установил, что в вязком газе невозможны особые поверхности сильного разрыва. Если, однако, постулировать, что при переходе через особую поверхность скорость и температура непрерывны, то возможны только контактные разрывы [2].

1. Все дальнейшие рассмотрения будут проводиться в прямоугольной декартовой системе координат x_i. По повторяющимся индексам предполагается суммирование, индекс после запятой означает частное дифференцирование по соответствующей координате.

Пусть реологическая модель сплошной среды R состоит из m элементов упругости и пластичности и n элементов вязкости V_a, соединенных между собой последовательно и параллельно в некотором заданном порядке [3]. Тензор напряжений s_{ij}^a на элементе V_a связан линейной зависимостью с тензором ε_{ij}^a скорости деформаций на этом элементе

$$s_{ij}^a = \xi_a \varepsilon_{kk}^a \delta_{ij} + 2\eta_a \varepsilon_{ij}^a \qquad (a = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1.1)$$

где ξ_a, η_a — два коэффициента вязкости, которые как и прочие физические коэффициенты, считаются постоянными.



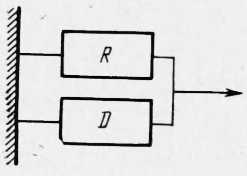
Фиг. 1

Оказывается, что вязкие свойства сплошной среды накладывают дополнительные ограничения на возможность распространения волн разрывов. Для определения этих ограничений поверхность сильного разрыва реологических величин заменяется бесконечно тонким переходным слоем толщиной $2h$. Внутри тонкого переходного слоя скачкообразное изменение разрывных величин заменяется непрерывным изменением (фиг. 1).

Существование переходного слоя ударных волн обычно объясняют [4,5] диссипативными свойствами среды, которые существенно проявляются лишь внутри ударного слоя и которыми можно пренебречь в области течения среды вне этого слоя.

Эти диссипативные свойства среды можно описать, подсоединив параллельно к основной реологической модели R некоторую диссипативную реологическую модель D, на которой действуют напряжения d_{ij} (фиг. 2).

Введем подвижную систему прямоугольных координат так, чтобы ее начало двигалось вместе с поверхностью разрыва Σ со скоростью G. В произвольной рассматриваемой материальной точке на Σ направим ось x_3 по нормали к этой поверхности, тогда оси x_1 и x_2 будут расположены в касательной плоскости к поверхности разрыва. Пусть греческие индексы α, β,... принимают значения 1 или 2, а латинские индексы i, j, k ...— значения 1, 2 или 3. Все величины будем вычислять в неподвижной системе координат, а проектировать на оси подвижной системы.



Фиг. 2

Во всех встречающихся выражениях будем отделять производные от величин по нормали к поверхности разрыва от производных по касательным направлениям, а частную производную по времени заменим δ-ироизводной [6]. Для этого выпишем соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \delta_{i3}\frac{\partial}{\partial x_3} + \delta_{i\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\delta}{\delta t} - G\frac{\partial}{\partial x_3} \tag{1.2}$$

В подвижной системе координат с помощью (1.2) уравнения сохранения массы и движения для сплошной среды запишем соответственно в виде

$$\{\rho(v_3 - G)\}_{,3} + \frac{\delta\rho}{\delta t} + (\rho v_\alpha)_{,\alpha} = 0 \tag{1.3}$$

$$\rho(v_3 - G)v_{i,3} + \rho v_\alpha v_{i,\alpha} + \rho\frac{\delta v_i}{\delta t} = \sigma_{i3,3} + \sigma_{i\alpha,\alpha} \tag{1.4}$$

В неподвижной системе координат первый и второй законы термодинамики [7,8] запишем в виде

$$\rho\frac{dU}{dt} = \varkappa T_{,kk} + \sigma_{ij}v_{i,j} + \varepsilon(T) \tag{1.5}$$

$$\varkappa \geqslant 0, \qquad D_a = s_{ij}^a\varepsilon_{ij}^a \geqslant 0, \qquad D_b = t_{ij}^b\varepsilon_{ij}^b \geqslant 0 \tag{1.6}$$

$$a = 1, 2, \ldots, n; \; b = 1, 2, \ldots, p$$

Здесь ρ — плотность, v_i — скорость частиц среды, σ_{ij} — напряжения в среде, U — внутренняя энергия, T — абсолютная температура, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, ε — мощность внешних тепловых источников, зависящих только от температуры, D_a — диссипация энергии на элементах вязкости, D_b — диссипация энергии на элементах пластичности, p — число элементов пластичности.

В подвижной системе координат первый закон термодинамики (1.5) при помощи (1.2) запишется в виде (1.7)

$$\rho(v_3 - G)U_{,3} + \rho v_\alpha U_{,\alpha} + \rho\frac{\delta U}{\delta t} = \varkappa(T_{,33} + T_{,\alpha\alpha}) + \sigma_{i3}v_{i,3} + \sigma_{i\alpha}v_{i,\alpha} + \varepsilon(T)$$

Прежде чем перейти к вычислениям, сделаем предположение об ограниченности по модулю внутри переходного слоя величин ρ, v_i, U, T, d_{ij}, компонент тензоров деформаций на любом элементе реологической модели и первого инварианта тензора напряжений на элементах пластичности. Из условия исчезновения свойств среды вне переходного слоя, которые описываются элементом D, вытекает равенство

$$d_{ij}^+ = d_{ij}^- = 0 \tag{1.8}$$

Значок плюс или минус вверху означает, что эта величина вычисляется на переднем или заднем ударном фронте переходного слоя соответственно.

Ограниченность для d_{ij} доказана [1], если элемент D есть элемент вязкости, предположение об ограниченности остальных величин диктуется физическими соображениями.

Связь тензора напряжений и тензора деформаций на элементах упругости может быть задана в виде обобщенного закона Гука [9]. Для каждого элемента пластичности предполагается заданным кусочно-гладкое выпуклое условие пластичности [10].

Из предположений об ограниченности величин, обобщенного закона Гука и замкнутости условия пластичности вытекает ограниченность напряжений t_{ij} на элементах упругости и пластичности внутри переходного слоя.

Проинтегрируем (1.3) поперек переходного слоя по координате x_3 от x_3 до h, после чего найдем

$$\rho(v_3 - G) - \rho^+(v_3^+ - G) = \int_{x_3}^{h} \left\{\frac{\delta\rho}{\delta t} + (\rho v_\alpha)_{,\alpha}\right\} dx_3 \qquad (1.9)$$

Из свойств δ-производной по времени, частных производных по направлениям в касательной плоскости к поверхности разрыва [6] и предположения об ограниченности величин внутри переходного слоя следует что подынтегральное выражение в (1.9) внутри переходного слоя ограничено. Так как интервал интегрирования мал и при $h \to 0$ стремится к нулю, то из (1.9) с точностью до малых величин имеем

$$\rho\,(v_3 - G) = \rho^+\,(v_{,3} - G) \qquad (1.10)$$

Приближенное соотношение (1.10), справедливое внутри переходного слоя, в пределе при $h \to 0$ становится точным. Это уравнение становится точным и при $h \neq 0$ для области одномерного установившегося течения. Уравнение (1.10) можно получить так же непосредственно из закона сохранения массы [4]. Если левую часть в (1.10) вычислить при $x_3 = -h$, то получится известное соотношение в разрывах [6]

$$[\rho\,(v_3 - G)] = 0 \qquad (1.11)$$

Здесь квадратными скобками обозначен скачок величины на поверхности разрыва. Аналогично, интегрируя (1.4) поперек переходного слоя и привлекая те же соображения, с точностью до малых величин получим равенство

$$\sigma_{i3} - \rho^+(v_3^+ - G)\,v_i = \sigma_{i3}^+ - \rho^+(v_3^+ - G)\,v_i^+ + \int_{x_3}^{h} \sigma_{i\alpha,\,\alpha} dx_3 \qquad (1.12)$$

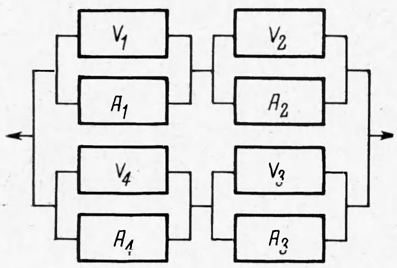
Ниже будет показано, что интеграл в правой части выражения (1.12) будет малой величиной.

Если провести сечение реологической модели (фиг. 2), то полное напряжение σ_{ij} внутри переходного слоя может быть представлено в виде суммы напряжений s_{ij}^a на n_1 элементах вязкости, суммы напряжений t_{ij}^b на m_1 элементах упругости и пластичности, которые попали в выбранное сечение, сложенных с d_{ij}

$$\sigma_{ij} = \sum_{a=1}^{n_1} s_{ij}^a + \sum_{b=1}^{m_1} t_{ij}^b + d_{ij}, \qquad n_1 \leqslant n, \quad m_1 \leqslant m \qquad (1.13)$$

[1] См. Чернышов А. Д. Кандидатская диссертация, Воронежский государственный университет, 1966.

Будем называть включение системы элементов вязкости в реологическую модель внутренним способом, если найдется хотя бы одно сечение реологической модели, которое не пересекает ни одного из элементов вязкости. Например, такой случай имеем для тела Максвелла [9]. Если любое сечение реологической модели пересекает хотя бы один элемент вязкости, то такое включение системы элементов вязкости в реологическую модель сплошной среды будем называть внешним. Например, в теле Кельвина элемент вязкости включен внешним способом. При включении системы элементов вязкости внешним способом, очевидно, найдутся такие α_a, что будет иметь место равенство



Фиг. 3

$$\Sigma\alpha_a \varepsilon_{ij}^{a} = \varepsilon_{ij} \qquad (1.14)$$

Коэффициенты α_a могут принимать значения только 0 или 1. Совокупностей значений α_a может быть несколько, в зависимости от конкретной реологической модели. Если система элементов вязкости включена внутренним способом, то равенство (1.14) не имеет места. Элементы вязкости, кроме внутреннего и внешнего способа, можно соединять кинематически зависимо или кинематически независимо. Будем называть соединение системы элементов вязкости кинематически зависимым, если существует между скоростями деформаций на этих элементах связь вида

$$\Sigma\beta_a \varepsilon_{ij}^{a} = 0 \qquad (1.15)$$

Коэффициенты β_a могут принимать значения 1, 0 или —1. На фиг. 3 изображен вариант зависимого соединения элементов вязкости. Для этого случая кинематическая связь (1.15) запишется в форме

$$\varepsilon_{ij}^{1} + \varepsilon_{ij}^{2} - \varepsilon_{ij}^{3} - \varepsilon_{ij}^{4} = 0, \quad \beta_1 = \beta_2 = -\beta_3 = -\beta_4 = 1 \qquad (1.16)$$

Число кинематических связей типа (1.15) равно числу замкнутых контуров из элементов вязкости (таких, как на фиг. 3). Эти замкнутые контуры и являются необходимой причиной существования зависимостей (1.15). Зависимости (1.14) и (1.15) можно рассматривать как реологические соотношения кинематического характера для данной сплошной среды. Если равенство (1.15) не выполняется, то система элементов вязкости соединена кинематически независимо.

Рассмотрим случай внутреннего включения системы n элементов вязкости в реологическую модель сплошной среды. Для сечения, не пересекающего элементы вязкости, из (1.13) будем иметь

$$\sigma_{ij} = \sum_{b=1}^{m_2} t_{ij}^{b} + d_{ij} \qquad (1.17)$$

Так как напряжения t_{ij}^{b} и d_{ij} предполагаются ограниченными внутри переходного слоя, то и полное напряжение σ_{ij} в сплошной среде будет ограниченным. Интервал интегрирования в (1.12) мал, поэтому интеграл является малой величиной в данном случае. С точностью до малых величин равенство (1.12) будет иметь вид

$$\sigma_{i3} - \sigma_{i3}^{+} = \rho^{+} (v_3^{+} - G)(v_i - v_i^{+}) \qquad (1.18)$$

Подсчитывая левую часть в (1.18) на заднем ударном фронте, получаем известное соотношение в скачках [6]

$$[\sigma_{i3}] = \rho^{+} (v_3^{+} - G) [v_i] \qquad (1.19)$$

Если проинтегрировать (1.5) поперек переходного слоя так же, как это делалось для выражения (1.3) и (1.4), используя при этом уже полученные соотношения (1.10) и (1.18), с точностью до малых величин найдем

$$\rho^{+}(v_3^{+} - G)\{U - U^{+} - {}^1/_2(v_k - v_k^{+})^2\} = \varkappa(T_{,3} - T_{,3}^{+}) + \sigma_{k3}^{+}(v_k - v_k^{+}) \qquad (1.20)$$

Уравнения (1.10), (1.18) и (1.20) будут первыми интегралами уравнений сохранения массы, движения и первого закона термодинамики соответственно, справедливыми внутри переходного слоя ударной волны, распространяющейся в сплошной среде. Как уже отмечалось, уравнение (1.10) было известно ранее, уравнение (1.18) впервые получено в работе [1], а интеграл (1.20) выводится здесь впервые. В частном случае, когда тензор напряжений имеет только гидростатическую часть, эти уравнения были известны [4]. После вычисления левой и правой частей в (1.20) на заднем ударном фронте получим известное выражение закона сохранения энергии в скачках [8]

$$\rho^+(v_3^+ - G)[U + v_k(v_k^+ - {}^1/_2\, v_k)] = \varkappa[T_{,3}] + \sigma_{k3}^+\,[v_k] \tag{1.21}$$

Заметим, что в пределе при $h \to 0$ уравнения (1.10) — (1.12), а также и (1.18) — (1.21) становятся точными, так как при этом отбрасываемые члены стремятся к нулю. Так, например, из (1.12) имеем

$$\lim_{h\to 0} \int_{-h}^{h} \sigma_{i\alpha,\,\alpha}\, dx_3 = 0 \tag{1.22}$$

Выберем такое сечение реологической модели, которое пересекает n_1 элементов вязкости и для которого справедливо соотношение (1.13). При помощи (1.13) и (1.1) равенство (1.22) преобразуется к виду

$$\sum_{a=1}^{n_1} \xi_a b_{kk,\,\alpha}^{a}\delta_{i\alpha} + 2\eta_a b_{i\alpha,\,\alpha}^{a} = 0, \quad b_{ij}^{a} = \lim_{h\to 0}\int_{-h}^{h} \varepsilon_{ij}^{a}\, dx_3 \tag{1.23}$$

Если для сечения реологической модели, не пересекающего элементы вязкости, (1.22) выполняется тождественно, то для сечения, пересекающего элементы вязкости, соотношения (1.22) и (1.23) уже не будут выполняться тождественно. В связи с этим (1.23) представляет собой дополнительное ограничение, накладываемое на разрывы деформаций на элементах вязкости.

Кроме (1.23) из (1.12) можно получить еще аналогичное ограничение на разрывы деформаций на элементах вязкости. Проинтегрируем (1.12) поперек переходного слоя от $-h$ до h для сечения (1.13) и перейдем к пределу при $h \to 0$. Учитывая при этом (1.22), в пределе получаем

$$\sum_{a=1}^{n_1} \xi_a b_{kk}^{a}\delta_{i3} + 2\eta_a b_{i3}^{a} = 0 \tag{1.24}$$

Соотношений (1.23) и (1.24) будет столько, сколько различных сечений реологической модели, пересекающих элементы вязкости. Оказывается, число таких сечений, сложенное с числом зависимостей (1.15), равно числу элементов вязкости в реологической модели. Для доказательства этого утверждения используется предположение об ограниченности величин и правила построения реологических моделей.

Из шести уравнений (1.23) и (1.24) одно зависимое. Так, если уравнение из (1.24) при $i = \alpha$ продифференцировать по координате x_α, то придем к уравнению из (1.23) при $i = 3$. Можно получить соотношение из закона сохранения энергии (1.20). Проинтегрируем его по x_3 от $-h$ до h, переходя к пределу при $h \to 0$, придем к равенству

$$\varkappa\,[T] = 0 \tag{1.25}$$

Таким образом, в теплопроводной сплошной среде с внутренним включением элементов вязкости температура не может терпеть разрыв.

Докажем, что кроме (1.25) из законов термодинамики можно получить дополнительные зависимости типа (1.24), которые имеют вид

$$b_{kk}^a = [e_{kk}^a] = 0 \qquad (1.26)$$

$$c_{ij}^a = 0, \qquad c_{ij}^a = \lim_{h\to 0} \int_{-h}^{h} dx_3 \int_{x_3}^{h} (\varepsilon_{ij}^a)^2 dx_3 \qquad (1.27)$$

Для доказательства соотношений (1.26) и (1.27) мощность напряжений в сплошной среде, входящую в правую часть (1.5), представим в виде суммы

$$\sigma_{ij} v_{i,j} = \sum_{a=1}^{n} s_{ij}^a \varepsilon_{ij}^a + \sum_{b=1}^{m} t_{ij}^b \varepsilon_{ij}^b + d_{ij} v_{i,j} \qquad (1.28)$$

Справедливость этого выражения можно установить методом индукции, привлекая правила построения реологических моделей.

Проинтегрируем (1.28) поперек переходного слоя от x_3 до h при помощи (1.18)

$$\sigma_{k3}^+ [v_k] - \rho^+ (v_3{}^+ - G) \left[v_k \left(v_k{}^+ - \frac{1}{2} v_k \right) \right] = \sum_{a=1}^{n} \int_{x_3}^{h} s_{ij}^a \varepsilon_{ij}^a \, dx_3 + \qquad (1.29)$$

$$+ \sum_{b=1}^{m} \int_{x_3}^{h} t_{ij}^b \varepsilon_{ij}^b \, dx_3 + \int_{x_3}^{h} d_{ij} v_{i,j} \, dx_3$$

Зададим связь тензоров деформаций e_{ij}^a и тензоров скорости деформаций одним из соотношений

$$\varepsilon_{ij}^a = \frac{\partial e_{ij}^a}{\partial t}, \qquad \varepsilon_{ij}^a = \frac{d e_{ij}^a}{dt} \qquad (1.30)$$

$$\varepsilon_{ij}^a = \frac{De_{ij}}{Dt} = \frac{de_{ij}}{dt} + \frac{1}{2} e_{ik}^a (v_{j,k} - v_{k,j}) + \frac{1}{2} e_{jk}^a (v_{i,k} - v_{k,i})$$

Здесь D / Dt — ковариантная производная по времени в смысле Яумана [11]. В выражениях (1.18) следует перейти к подвижной системе координат при помощи (1.2) Обозначим максимальное значение $|t_{ij}|$ и $|d_{ij}|$ через m_{ij}, причем m_{ij} — ограниченные величины. Докажем ограниченность третьего интеграла в правой части выражения (1.29)

$$\left| \int_{x_3}^{h} d_{ij} v_{i,j} \, dx_3 \right| \leqslant m_{ij} \left| \int_{x_3}^{h} v_{i,j} \, dx_3 \right| = m_{i3} \, | v_i{}^+ - v_i | + \ldots \qquad (1.31)$$

Для второго интеграла в правой части выражения (1.29) аналогично можно получить неравенство

$$\left| \int_{x_3}^{h} t_{ij}^b \varepsilon_{ij}^b \, dx_3 \right| \leqslant m_{ij} \left| \int_{x_3}^{h} \varepsilon_{ij}^b \, dx_3 \right| \qquad (1.32)$$

Если взять первую зависимость из (1.30), то для интеграла в (1.32) имеем

$$\int_{x_3}^{h} \varepsilon_{ij}^b \, dx_3 = G (e_{ij}^b - e_{ij}^{b+}) + \ldots \qquad (1.33)$$

Для второй зависимости из (1.30) этот интеграл при помощи теоремы о среднем можно представить в форме

$$\int_{x_3}^{h} \varepsilon_{ij}^b \, dx_3 = (v_3{}^* - G) (e_{ij}^{b+} - e_{ij}^b) + \ldots \qquad (1.34)$$

Третья зависимость из (1.30) позволяет преобразовать интеграл в (1.32) к виду

$$\int\limits_{x_3}^{h} \varepsilon_{ij}^{b}\, dx_3 = (v_3^* - G)\,(e_{ij}^{b+} - e_{ij}^{b}) + {}^1/_2\, e_{i_3}^{b*}(v_j^+ - v_j) -$$

$$- {}^1/_2\, e_{ik}^{b*}(v_k^+ - v_k)\,\delta_{j3} + {}^1/_2\, e_{j3}^{b*}(v_i^+ - v_i) - {}^1/_2\, e_{jk}^{b*}(v_k^+ - v_k)\,\delta_{i3} + \ldots \qquad (1.35)$$

Точками в выражениях (1.31), (1.33)—(1.35) обозначены слагаемые, которые стремятся к нулю при $h \to 0$, звездочка означает среднее значение величины в переходном слое. Подставляя последовательно (1.33) — (1.35) в (1.32), получаем доказательство того, что последние два интеграла в (1.29) ограничены по модулю всюду внутри переходного слоя. Проинтегрируем (1. 29) поперек переходного слоя от — h до h. Учитывая ограниченность всех членов в (1.29) за исключением первого интеграла в правой части, в пределе при $h \to 0$ будем иметь

$$\sum_{a=1}^{n} \lim_{h\to 0} \int\limits_{-h}^{h} dx_3 \int\limits_{x_3}^{h} s_{ij}^{a}\, \varepsilon_{ij}^{a}\, dx_3 = 0 \qquad (1.36)$$

В силу второго закона термодинамики (1.6) каждое слагаемое в (1.36) не может быть отрицательным, и при наличии равенства в (1.36) при помощи (1.1) приходим к системе уравнений

$$(\xi_a + {}^2/_3\eta_a) \lim_{h\to 0} \int\limits_{-h}^{h} dx_3 \int\limits_{x_3}^{h} (\varepsilon_{kk}^{a})^2\, dx_3 = 0 \qquad (1.37)$$

$$\eta_a \lim_{h\to 0} \int\limits_{-h}^{h} dx_3 \int\limits_{x_3}^{h} \left(\varepsilon_{ij}^{a} - \frac{1}{3}\, \varepsilon_{kk}^{a}\delta_{ij} \right)^2 dx_3 = 0 \qquad (1.38)$$

После подстановки в (1.37) одного из выражений скорости деформаций через компоненты деформаций из (1.30) придем к соотношениям

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_{-h}^{h} dx_3 \int\limits_{x_3}^{h} S \left(\frac{\partial e_{kk}^{a}}{\partial x_3} \right)^2 dx_3 = 0 \qquad (1.39)$$

Если из (1.30) использовать первую зависимость, то $S = G^2$, для второй и третьей зависимостей $S = (G - v_3)^2$. В обоих случаях S — ограниченная величина внутри переходного слоя, поэтому ее по теореме о среднем можно вынести из-под интеграла. Затем (1.39) при помощи интегрирования по частям и теоремы о среднем преобразуется к виду

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_{-h}^{h} dx_3 \int\limits_{x_3}^{h} \left(\frac{\partial e_{kk}^{a}}{\partial x_3} \right)^2 dx_3 = [e_{kk}^{a}]\,(\delta^* - {}^1/_4\, [e_{nn}^{a}]) = 0 \qquad (1.40)$$

$$\delta^* = \{{}^1/_2\,(e_{kk}^{a} - e_{kk}^{a+}) - e_{kk}^{a*}\}^*$$

В случае $[e_{kk}{}^a] \neq 0$ величина δ^* зависит от характера изменения величины $e_{kk}{}^a$ внутри переходного слоя, который может быть изменен для заданного скачка $[e_{kk}{}^a]$ вариацией свойств реологических элементов. Следовательно, можно считать, что

$$\delta^* - {}^1/_4 [e_{nn}{}^a] \neq 0$$

но тогда будем иметь противоречие с равенством (1.40). Отсюда получаем доказательство выражения (1.26).

Вычислениями, аналогичными тем, которые применялись при получении (1.36) из (1.27), равенство (1.38) преобразуется при помощи (1.28) к виду (1.29).

Уравнения (1.26) и (1.27) представляют собой дополнительные условия распространения ударных волн в сплошных средах с вязкими свойствами. Эту систему можно дополнить. Выше отмечалось, что число уравнений типа (1.23) и (1.15) или (1.24) и (1.15) равно числу элементов вязкости. Это обстоятельство позволяет систему уравнений типа (1.24) и

(1.15) простыми преобразованиями, используя (1.36), свести к замкнутой системе однородных линейных уравнений относительно величин $b_{i\ 3}^{\ a}$. В силу независимости уравнений этой системы, по построению, получим

$$b_{i3}^{a} = 0 \tag{1.41}$$

Если элементы вязкости в реологической модели соединены кинематически независимо, то доказательство справедливости (1.41) очевидно.

Для кинематически зависимого соединения элементов вязкости принципиальную схему доказательства равенства (1.41) покажем для случая, изображенного на фиг. 3.

Для простоты будем считать, что элементы A_b, на которых действуют напряжения $t_{ij}^{\ b}$, состоят из элементов упругости и пластичности. Для такой модели справедливы равенства

$$s_{ij}^{1} + t_{ij}^{1} = s_{ij}^{2} + t_{ij}^{2}, \qquad s_{ij}^{3} + t_{ij}^{3} = s_{ij}^{4} + t_{ij}^{4} \tag{1.42}$$

Интегрируя (1.42) поперек переходного слоя при $j = 3$, найдем

$$\begin{gathered}(\xi_1 b_{kk}^{1} - \xi_2 b_{kk}^{2})\,\delta_{i3} + 2\eta_1 b_{i3}^{1} - 2\eta_2 b_{i3}^{2} = 0\\ (\xi_3 b_{kk}^{3} - \xi_4 b_{kk}^{4})\,\delta_{i3} + 2\eta_3 b_{i3}^{3} - 2\eta_4 b_{i3}^{4} = 0\end{gathered} \tag{1.43}$$

При помощи (1.26) равенства (1.43) упрощаются

$$\eta_1 b_{i3}^{1} - \eta_2 b_{i3}^{2} = 0, \qquad \eta_3 b_{i3}^{3} - \eta_4 b_{i3}^{4} = 0 \tag{1.44}$$

Присоединим сюда одно уравнение из (1.24) для сечения модели, пересекающего первый и третий элементы вязкости

$$\eta_1 b_{i3}^{1} + \eta_3 b_{i3}^{3} = 0 \tag{1.45}$$

Замыкающее уравнение в системе (1.44), (1.45) получим, интегрируя (1.16) поперек переходного слоя при $j = 3$

$$b_{i3}^{1} + b_{i3}^{2} - b_{i3}^{3} - b_{i3}^{4} = 0 \tag{1.46}$$

Определитель системы (1.44)—(1.46) относительно $b_{i3}^{\ a}$ отличен от нуля, следовательно $b_{i3}^{\ a} = 0$, что и требовалось доказать.

Можно доказать из (1.23) и (1.15), что выполняется равенство

$$[b_{\alpha\beta,\beta}^{a}] = 0 \tag{1.47}$$

Выражения (1.41) и (1.47), как и (1.27), накладывают ограничения на разрывы компонент тензоров деформаций на элементах вязкости и их производных по касательным направлениям к поверхности разрыва. Если из (1.30) использовать первое или второе выражение тензора скорости деформаций через тензор деформаций, то (1.27), (1.41) и (1.47) можно значительно упростить. В этом случае точно так же, как было получено (1.26) из (1.37), из (1.27) найдем

$$[e_{ij}^{\ a}] = 0 \tag{1.48}$$

Из (1.41) и (1.47) получим, что этим уравнениям решение (1.48) тоже удовлетворяет. Таким образом, в рассматриваемом случае на поверхности ударной волны компоненты деформаций на всех элементах вязкости непрерывны.

Если из (1.30) использовать третье выражение тензора скорости деформаций через тензор деформаций, то наличие нелинейных членов, учитывающих эффект вращения окрестности рассматриваемой частицы среды, не позволяет непосредственно вычислить интегралы (1.27), (1.41) и (1.47).

Вообще говоря, равенство (1.48) теперь не будет иметь места, и на элементах вязкости тензоры деформаций будут терпеть разрывы. Эти разрывы присутствуют из-за нелинейных членов в (1.30), поэтому отличие скачков $[e_{ij}{}^{a}]$ от нуля на поверхности ударной волны следует понимать как эффект второго порядка.

При распространении поверхности слабого разрыва n-го порядка необходимо, чтобы плотность, скорость, компоненты деформаций и напряжений на любом элементе реологической модели вместе со всеми своими производными вплоть до $(n-1)$-го порядка были непрерывными. Чтобы на элементе V_a производные до $(n-1)$-го порядка от компонент напряжений были непрерывными, вследствие (1.1), необходимо потребовать непрерывность производных $(n-1)$-го порядка от компонент тензора скорости деформаций на элементе V_a или непрерывность производных n-го порядка от компонент тензора деформаций на этом элементе. Если в реологической модели параллельно с элементом вязкости соединена некоторая система реологических элементов упругости и пластичности, то на этой системе элементов компоненты деформаций вместе со своими производными до n-го порядка будут непрерывными. Разрывными могут быть только их высшие производные. В этом случае поверхность разрыва называется нейтральной [12] по отношению к системе реологических элементов, соединенных параллельно с элементом вязкости.

Распространение слабых разрывов должно подчиняться динамическим, геометрическим и кинематическим условиям совместности разрывов реологических величин [6]. В отличие от слабых разрывов на ударных волнах кроме перечисленных условий должны выполняться дополнительные условия (1.27), (1.28) и (1.47). Для любого выражения тензора скорости деформаций через тензор деформаций из (1.30) шаровая часть тензора деформаций на каждом элементе вязкости в реологической модели сплошной среды непрерывна на ударной волне. Если скорость деформаций определить через частную или материальную производную по времени от деформаций, то из дополнительных условий следует, что на элементах вязкости компоненты деформаций непрерывны на ударной волне. Если же определить скорость деформаций через ковариантную производную по времени от деформаций, то деформации на элементах вязкости могут быть разрывными, что можно считать эффектом второго порядка.

2. Пусть один элемент вязкости включен в реологическую модель сплошной среды внешним способом, а остальные $(n-1)$ элементов вязкости представляют систему, включенную внутренним способом. Поэтому найдется такое сечение реологической модели, которое из элементов вязкости пересекает только первый. Согласно (1.13) и (1.14) для этого сечения справедливы равенства

$$\sigma_{ij} = \xi_1 \varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\eta_1\varepsilon_{ij} + \sum_{b=1}^{m} t_{ij}^{b} + d_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}^{1} = \varepsilon_{ij} = {}^1/_2\,(v_{i,j} + v_{j,i}) \qquad (2.1)$$

Теперь получить соотношение (1.23) невозможно, так как любое сечение реологической модели пересекает элементы вязкости, а соотношения (1.12) и (1.24), где $n_1 = 1$, остаются справедливыми, так как они выводились для произвольного сечения. Подставляя $\varepsilon_{ij}{}^{1}$ в (1.24), придем к уравнению

$$\xi_1\,[v_3]\,\delta_{i3} + \eta_1\,[v_i + v_3\delta_{i3}] = 0 \qquad (2.2)$$

или

$$(\xi_1 + 2\eta_1)\,[v_3] = 0, \;\; \eta_1\,[v_\alpha] = 0 \qquad (2.3)$$

В общем случае при $\eta_1 > 0$ из (2.3) получаем, что компоненты скорости непрерывны на поверхности сильного разрыва. Из непрерывности скорости следует непрерывность тензора дисторсий при $v_3{}^{+} \neq G$ и поэтому непрерывность тензора деформаций. Вследствие (2.3), уравнение (1.19) упрощается

$$[\sigma_{i3}] = 0 \qquad (2.4)$$

Предположим, что если непрерывен тензор деформаций сплошной среды, то непрерывны и тензоры деформаций на любом реологическом элементе. Такое же соответствие предполагается и относительно непрерывности частных производных от этих тензоров деформаций. Из (2.4) вытекает, что на поверхности разрывов динамические силы не проявляются. Если в этом случае компоненты тензоров напряжений на элементах пластичности терпят разрыв, то такие поверхности являются либо поверхностями скольжения [3,6], либо поверхностями контактного разрыва. Эти поверхности не распространяются по среде. Исключая из рассмотрения такие поверхности, тем самым предполагаем непрерывность напряжений на элементах пластичности, т. е. на рассматриваемой поверхности разрывов компоненты напряжений на элементах упругости и пластичности в данном случае непрерывны. Если предполагаемая распространяющаяся поверхность — ударная волна, то существует переходный слой, внутри которого среда проявляет те же свойства, что и вблизи ударных фронтов. Значение каждой величины с индексом плюс или минус можно вычислить, как предельное значение этой величины внутри переходного слоя при приближении к соответствующему ударному фронту. Поэтому независимо от состояния среды перед и за ударной волной, при помощи (1.13) можно вычислить из (2.4) разрыв

$$\xi_1 [v_{3,3}] \delta_{i3} + \eta_1 [v_{i,3} + v_{3,3}\delta_{i3}] = 0 \qquad (2.5$$

или

$$(\xi_1 + 2\eta_1) [v_{3,3}] = 0, \; \eta_1 [v_{\alpha,3}] = 0 \qquad (2.6)$$

При помощи геометрических условий совместности разрывов из (2.6) при $\eta_1 > 0$ находим, что на рассматриваемой поверхности разрыва компоненты тензора $v_{i,j}$ непрерывны. Тогда плотность и компоненты напряжений на всех элементах непрерывны на поверхности разрыва. Следовательно, Σ может быть только слабой поверхностью разрыва. Лишь в частном случае при $\eta_1 = 0$, как это вытекает из (2.3) или (2.6), возможна эквиволюминальная волна сильного или слабого разрывов, на которой $[v_3] = 0$ или $[v_{3,3}] = 0$ соответственно. Если $(\xi_1 + 2\eta_1) = 0$, то вследствие второго закона термодинамики, необходимо, чтобы $\xi_1 = \eta_1 = 0$, а это равносильно отсутствию первого элемента вязкости. Тогда приходим к случаю внутреннего включения системы элементов вязкости в реологическую модель, который рассматривался в предыдущем пункте.

До сих пор полученные результаты в этом пункте не зависели от того, будет ли сплошная среда находиться в состоянии течения по обе стороны от поверхности разрыва или только по одну из сторон. Однако в дальнейшем анализе этот вопрос имеет существенное значение.

Пусть среда находится в состоянии течения по обе стороны от поверхности разрыва и проявляет, таким образом, одинаковые свойства при переходе через эту поверхность. В этом случае уравнение (1.13), где $n_1 = 1$, остается справедливым по обе стороны от предполагаемой поверхности разрывов. Подставляя (1.13) в уравнение движения (1.4), вычисляя операцию разрыва от этого уравнения, учитывая при этом (2.3) и (2.6), приходим к уравнению

$$\xi_1[v_{3,33}]\delta_{i3} + \eta_1[v_{i,33} + v_{3,33}\,\delta_{i3}] = 0 \qquad (2.7)$$

При помощи геометрических условий совместности разрывов из (2.7) находим, что при $\eta_1 > 0$ на предполагаемой поверхности разрывов скорость непрерывна вместе со всеми своими первыми и вторыми производными. По предположению отсюда следует непрерывность тензоров деформаций на всех реологических элементах и тензоров напряжений на элементах упругости и пластичности вместе со всеми своими первыми производными. Если (1.44) последовательно дифференцировать несколько раз, каждый раз вычисляя операцию разрыва с учетом (1.13), (2.3), (2.6) и аналогичных новых соотношений, найдем, что на предполагаемой поверхности разрывов плотность и скорость со всеми своими производными непрерывны.

Тогда, по предположению, на всех реологических элементах тензоры деформаций и напряжений вместе со всеми своими производными непрерывны, т. е. распространение поверхности разрывов любого порядка в рассматриваемом случае невозможно.

Если среда находится в состоянии течения только по одну сторону от поверхности разрывов, то свойства среды проявляются только по эту сторону и внутри переходного слоя. По другую сторону поверхности разрывов среда проявляет другие свойства, согласно другим определяющим уравнениям. Отсюда следует, что не имеет смысла вычислять операцию разрыва от уравнения (1.13) и от производных этого уравнения. В связи с этим остаются верными только условия (2.2) и (2.5), которые получены в результате введения переходного слоя. Условия (2.7) и все последующие выводы теряют силу. Таким образом, в этом случае возможно распространение слабых разрывов, которые отделяют область течения вязкой сплошной среды от жесткой области [13]. На этих поверхностях скорость, плотность, деформация среды и все первые производные от этих величин непрерывны. При $\eta_1 = 0$ возможна также эквиволюминальная поверхность разрывов любого порядка.

Очевидно, что (1.25) остается в силе, т. е. температура не может терпеть разрыв в теплопроводной сплошной среде.

Если $G = v_3^+$, то даже при условии непрерывности компонент тензоров деформаций и напряжений на всех реологических элементах из (1.8) находим, что возможен разрыв плотности, т. е. контактные разрывы возможны при любом включении элементов вязкости в реологическую модель сплошной среды.

Поступила 22 II 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. D u h e m P. Recherches sur L'hydrodynamique, Ann. Toulouse (2), 1901—1903
2. S e r r i n J. Mathematical principles of classical fluid mechanics. Berlin, Springer — Verlag, 1959. (Русс. перев.: Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости М., Изд-во иностр. лит., 1963.)
3. И в л е в Д. Д. К теории сложных сред. Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 1.
4. З е л ь д о в и ч Я. Б., Р а й з е р Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматгиз, 1963.
5. Ч е р н ы ш о в А. Д. О распространении ударных волн в средах с вязкостью. ПМТФ, 1967, № 1.
6. T h o m a s T. J. Plastic flow and fructure in solids. New York — London, Acad. Press., 1961. (Рус. перев.: Томас Т., Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964.)
7. D e G r o o t S. R., M a z u r P. Non - equilibrium thermodynamics. Amsterdam, North — Holland. Publ. Company, 1962. (Рус. перев.: Де-Гроот С. Р., Мазур П. Неравновесная термодинамика, М., «Мир», 1964.)
8. E r i n g e n A. C. A unified theory of thermomechanical materials. Internat. J. Engng. Sci., 1966, vol. 4, No. 2. (Русс. перев.: Эринген А. К. Единая теория термомеханических материалов. «Механика», Период. сб. перев. иностр. статей, 1967, № 1.)
9. R e i n e r M. Rheology. Berlin, Springer — Verlag, 1958. (Русс. перев.: Рейнер М. Реология, М., «Наука», 1965.)
10. И в л е в Д. Д. Идеальная пластичность. М., «Наука», 1966.
11. С е д о в Л. И. Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
12. M a n d e l J. Ondes plastiques dans un milieu indéfini á trois dimensions. J. méc., 1962, vol. 1, No. 1. (Рус. перев.: Мандель Ж. Пластические волны в неограниченной трехмерной среде. «Механика», Период. сб. перев. иностр. статей, 1963, № 5.)
13. С а ф р о н ч и к А. И. Неустановившееся течение вязко-пластического материала между параллельными стенками. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.