

СПЕКТР НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ С ДИССИПАЦИЕЙ

1. Введение. В последние годы появилось большое число публикаций, в которых идеи калибровочных теорий поля используются для описания динамики дефектов в конденсированных средах (см., например, [1—5]). В отличие от теории упругости в теориях, описывающих механику деформирования тела с дефектами, помимо так называемых внешних степеней свободы (роль которых могут играть полные смещения точек тела $u_i(r)$) вводится то или иное число (в зависимости от модели) внутренних степеней свободы. В простейшем случае, рассматривая лишь трансляционные дефекты, в качестве внутренних степеней свободы (в каждой точке) можно выбрать девять компонент пластической дисторсии β_{ij} . С помощью выбранных переменных записывается калибровочно-инвариантный лагранжиан [6], варьирование которого приводит к динамическим уравнениям рассматриваемой модели среды. Важно отметить, что поскольку уравнения движения среды получаются из принципа наименьшего действия с лагранжианом, не зависящим явно от времени и инвариантным относительно глобальных поворотов и смещений системы координат, то автоматически оказываются выполненными законы сохранения механической энергии, импульса и момента импульса, и система, таким образом, является строго бездиссипативной. Отсутствие диссипации является одной из основных причин, затрудняющих физическую интерпретацию теории в качестве модели упругопластической среды и сравнение ее с экспериментом. Как показано в [1], в рамках этой теории все же можно говорить о диссипации, если подразумевать под ней процесс перехода энергии из одних степеней свободы, которые рассматриваем как внешние, в другие степени свободы этой же среды, которые рассматриваем как внутренние. Такой обмен энергией между степенями свободы обязан происходить в любой модели. В протяженной же системе с обменом энергией на границе этот процесс будет происходить необратимым образом, имея тем самым все особенности диссипации энергии. Однако ясно, что такой подход к диссипации не исчерпывает всех каналов необратимости энергии. Вопрос состоит в том, описывает ли он основные каналы диссипации, имеющие место в реальных средах, или же они остаются за рамками этой модели. На наш взгляд, основной канал диссипации в этой модели остается неучтенным и требует специального исследования. Очевидно, что диссипация, происходящая при упругих движениях среды, во много раз меньше таковой при пластической деформации. Последняя связана с акустическим излучением при преодолении дефектами барьеров Пайерлса и другими процессами, имеющими место только в дискретной среде, какой является любая реальная среда. В калибровочных теориях механики такие процессы вообще не рассматриваются, т. е. не учитывается основной канал диссипации.

Настоящая работа посвящена учету диссипации, связанной с пластическими степенями свободы. Диссипация вводится явно путем включения в уравнения движения соответствующим образом определенных диссипативных членов. Предполагается, что диссипация достаточно мала. В этом случае она может быть описана так называемой диссипативной функцией [7]. Система уравнений движения такой модели линейна и позволяет полностью определить дисперсионные соотношения для нормальных колебаний, которые при введении диссипации оказываются

комплексными. Аналогичная процедура для сред без диссипации ранее уже была проделана в [8, 9].

2. Лагранжиан и диссипативная функция. Исходим из калибровочного лагранжиана в простейшей модели «минимальной связи» [6], который ранее уже использовался в [8, 9]:

$$(2.1) \quad L_{el-pl} = \int dV \left\{ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} - \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \beta_{ki} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \beta_{ki} \right) - \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \beta_{ki} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \beta_{ik} \right) - \lambda \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \beta_{ii} \right) \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \beta_{kk} \right) + B \frac{\partial \beta_{km}}{\partial t} \frac{\partial \beta_{km}}{\partial t} - C \alpha_{km} \alpha_{km} \right\}.$$

Здесь $u_i(x)$ — вектор смещения точки с начальной координатой x ; ρ — плотность среды; λ, μ — коэффициенты Ламэ; dV — дифференциал объема; β_{ij} — тензор пластической дисторсии; B, C — новые материальные компоненты; $\alpha_{km} = e_{kij} \partial \beta_{jm} / \partial x_i$ — тензор плотности дислокаций. В (2.1) и ниже по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Предполагается также выполнение условия несжимаемости среды при пластической деформации

$$(2.2) \quad \text{Sp } \beta_{ij} = \beta_{kk} = 0,$$

которое является хорошим приближением для реальных тел.

Диссипация энергии может быть учтена путем добавления в уравнения движения, полученные с помощью лагранжиана (2.1), сил трения. Как известно [7], при достаточно малой величине диссипации силы трения являются линейными функциями обобщенных скоростей (в данном случае $\partial \beta_{ij} / \partial t$) и могут быть определены с помощью диссипативной функции R . Последняя должна быть скалярной квадратичной функцией тензора $\partial \beta_{ij} / \partial t$. Для качественного анализа ограничимся простейшим видом такой функции:

$$(2.3) \quad R = \eta \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial t} \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial t}.$$

3. Уравнения движения и дисперсионные соотношения. Уравнения движения для какой-либо обобщенной координаты есть уравнения Эйлера — Лагранжа, в правые части которых добавлены вязкие силы

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}}.$$

Принимая во внимание (2.1) — (2.3), получим динамические уравнения

$$(3.1) \quad \rho \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} - \lambda \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_p \partial x_q} - \mu \left(\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_q \partial x_q} + \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_q \partial x_p} \right) + \mu \left(\frac{\partial \beta_{pq}}{\partial x_q} + \frac{\partial \beta_{qp}}{\partial x_q} \right) = 0, \\ B \frac{\partial^2 \beta_{pq}}{\partial t^2} - C \left(\frac{\partial^2 \beta_{pq}}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial^2 \beta_{iq}}{\partial x_j \partial x_p} \right) - \lambda \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \delta^{pq} - \\ - \mu \left(\frac{\partial u_p}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q}{\partial x_p} \right) + \mu (\beta_{pq} + \beta_{qp}) + 2\eta \frac{\partial \beta_{pq}}{\partial t} - \gamma \delta^{pq} = 0$$

(γ — неопределенный множитель Лагранжа). Будем искать решения вида

$$u_p, \beta_{pq} \sim \exp(-i\omega t + ikr).$$

Подстановка их в систему уравнений (3.1) и решение получающегося характеристического уравнения дают одиннадцать характеристических частот при каждом значении k . Возможны две формы представления дисперсионных соотношений. Если выбрать k действительным, то частоты окажутся комплексными, причем мнимая часть частоты дает величину, обратную времени затухания соответствующей нормальной моды. Если же задаться действительным значением ω , то комплексными окажутся волновые векторы, причем мнимая часть волнового вектора определяет обратную глубину проникновения возбуждения данной частоты в глубь среды. Имея в виду последующие приложения к распростра-

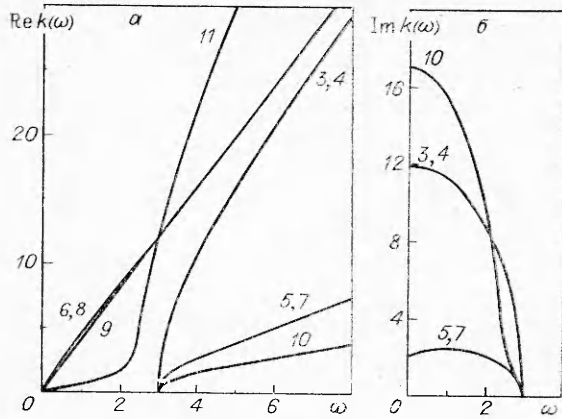


Рис. 1

4. Конфигурация нормальных мод при нулевой диссипации. На рис. 1 представлены дисперсионные кривые при нулевой диссипации ($\eta = 0$). Константы материала выбраны те же, что и в работе [8] ($\lambda = 2$, $\mu = 1$, $B = 2/9$, $C = 1/72$, $\rho = 1$), в которой обсуждается возможность их экспериментального определения. Видно, что из одиннадцати ветвей нормальных колебаний две равны нулю, четыре соответствуют акустическим колебаниям ($\omega \rightarrow 0$ при $k \rightarrow 0$) и пять — оптическим колебаниям ($\omega \rightarrow \omega_0 \neq 0$ при $k \rightarrow 0$). Девять ненулевых мод определяют различные виды возбуждений, распространяющихся в кристалле, а две нулевые моды — остаточные деформации.

Анализ конфигураций нормальных колебаний показывает, что в длинноволновом пределе ($k \rightarrow 0$) оптические моды $k_{3,4}$, $k_{5,7}$ и k_{10} представляют собой колебания внутренних степеней свободы с малой примесью внешних мод ($u \sim k\beta$). Мода k_9 отвечает колебаниям внутренних степеней свободы ($u_i = 0$, $\beta_{ij} \neq 0$) при любых k . Колебания внешних степеней свободы при $k \rightarrow 0$ описываются модами $k_{6,8}$ и k_{11} . Однако для этих же ветвей примесь эластических мод не мала (упругие и пластические дисторсии имеют один и тот же порядок величин). Отметим, что закон дисперсии моды k_{11} при $k \rightarrow 0$ имеет вид

$$k_{11}^2 = \frac{\rho}{K} \omega^2,$$

где $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ — модуль объемного сжатия упругого континуума. Поперечные звуковые колебания при $\omega \rightarrow 0$ отсутствуют. Таким образом, спектр рассматриваемой среды в длинноволновом пределе обнаруживает черты спектра обычной жидкости. В коротковолновом пределе спектр исследуемой среды обнаруживает сходство со спектром твердого тела. Так, при $\omega \rightarrow \infty$ моды $k_{5,7}$ и k_{10} описывают чисто упругие колебания ($\beta \sim u/k$), что проявляется и в законах дисперсии: при $\omega \rightarrow \infty$ они линейны и соответствуют распространению волн со скоростями продольного $C_{||} = \sqrt{(2\mu + \lambda)/\rho}$ и поперечного $C_{\perp} = \sqrt{\mu/\rho}$ звуков в упругой среде. Остальные моды в пределе больших k описывают колебания внутренних степеней свободы. Аналогия со спектром жидкости при $\omega \rightarrow 0$ и твердого тела при $\omega \rightarrow \infty$ становится особенно близкой при учете диссипации энергии.

5. Обсуждение результатов. В зависимости от соотношения упругих и вязких сил в уравнениях движения (3.1) можно говорить о величине диссипации в среде. Сравнивая динамический член $\mu \ddot{\beta}_{pq}$ с вязким $\eta \partial \beta_{pq} / \partial t$ и полагая $\partial \beta_{pq} / \partial t \sim \omega_0 \beta_{pq}$, находим, что сила диссипации определяется безразмерным параметром

$$\kappa = \frac{\eta \omega_0}{\mu} = \frac{\eta}{(\mu B)^{1/2}}.$$

нению волн в среде, выберем второе представление. Решения характеристического уравнения системы (3.1) относительно k могут быть найдены аналитически. Даже при нулевой диссипации они определяются громоздкими выражениями, которые здесь не приводятся. Результаты численных расчетов, демонстрирующие изменения спектра нормальных колебаний с учетом диссипации, приведены на рис. 1—3.

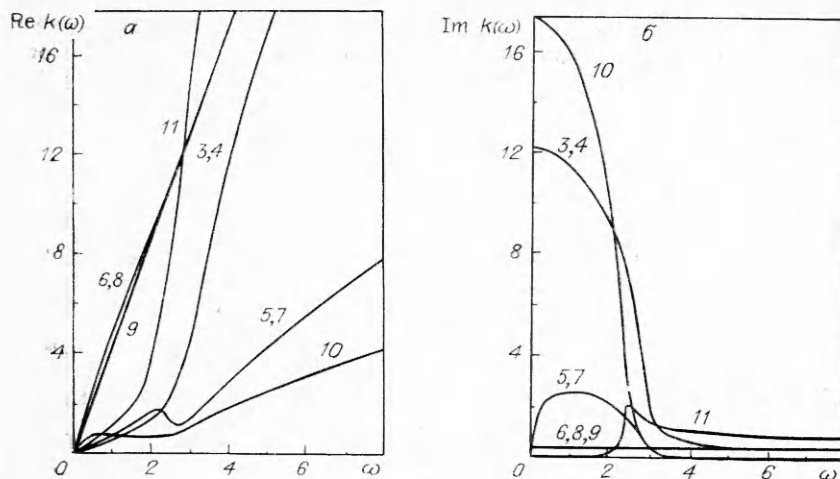


Рис. 2

Рис. 2 дает представление о ходе дисперсионных кривых при $\kappa = 0,05$. Остальные константы такие же, как на рис. 1. Обращает на себя внимание то, что включение диссипации в наименьшей мере сказывается на коротковолновой части спектра. В области малых частот происходит качественная перестройка спектра при сколь угодно малой диссипации. Поскольку область малых частот подвергается наиболее сильной перестройке, на рис. 3 отдельно приведены $\text{Im } k(\omega)$ при $\kappa = 0,02$ в области $\omega \ll \omega_0$. При включении диссипации бывшие акустические ветви 6, 8, 9, 11 становятся комплексными при любых ω . Затухание $k_{6,8}$ и k_9 не зависит от частоты и определяется коэффициентом вязкости. Особый интерес представляет ветвь k_{11} , которая до некоторой частоты (порядка $\omega_0 = (2\mu/B)^{1/2}$) является слабозатухающей ($\text{Im } k_{11} \sim \omega^2$). Затем на зависимости $\text{Im } k_{11}(\omega)$ наблюдается излом, после которого кривая стремится к некоторому постоянному пределу, отличному от нуля, поэтому возмущения данной ветви на определенной глубине будут затухать.

Перейдем к рассмотрению оптических ветвей $k_{3,4}$, $k_{5,7}$ и k_{10} . В отсутствие диссипации волновые векторы этих ветвей являются чисто действительными при $\omega > \omega_0$ и чисто мнимыми при $\omega < \omega_0$ (рис. 1, а, б). При включении диссипации в области малых ω оптические ветви по-прежнему затухающие, а в высокочастотном пределе три ветви ($k_{5,7}$ и k_{10}), соответствующие продольному звуку и двум поляризациям поперечного звука, описывают распространение возмущений без затухания. Таким образом, дисперсионные соотношения, представленные на рис. 1, 2, позволяют детально проследить перестройку отклика среды на периодическое внешнее воздействие от жидкоподобного в низкочастотном пределе к твердотельному в высокочастотном.

Включение диссипативных членов в уравнение движения рассматриваемой модели среды приводит к существенной перестройке спектра нормальных колебаний. Частота оптических колебаний ω_0 остается при этом характеристической частотой среды. При изменении частоты вынуждающих сил в рассматриваемой среде при $\omega \ll \omega_0$ будет возбуждаться только одна слабозатухающая ветвь, отвечающая волнам сжатия в жидкости. В обратном пределе ($\omega \gg \omega_0$) слабозатухающими являются три ветви,

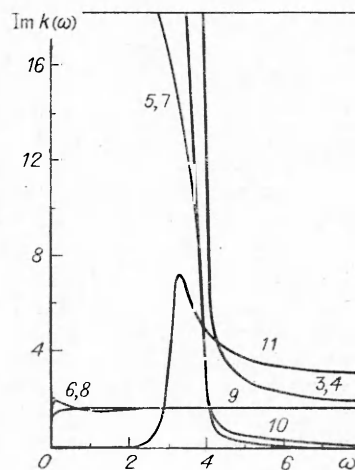


Рис. 3

конфигурация которых соответствует продольному и поперечному звуку в упругой среде. Таким образом, при частотах ниже определенной характеристической частоты ω_0 среда ведет себя как жидкость, а при более высоких частотах — как твердое тело.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kadic A., Edelen D. G. B. A gauge theory of dislocations and disclinations.— Berlin e. a.: Springer, 1983.— (Lect. notes in phys.; v. 174).
2. Kroner E. Gauge field theories of defects in solids.— Stuttgart: Max-Plank Inst., 1982.
3. Lagoudas D. C., Edelen D. G. B. Material and spatial gauge theories of solids.— I. Gauge constructs, geometry, and kinematics // Intern. J. Engng Sci.— 1989.— V. 27, N 4.
4. Edelen D. G. B. Material and spatial gauge theories of solids — II. Problems with given material dislocations densities // Intern. J. Engng Sci.— 1989.— V. 27, N 6.
5. Edelen D. G. B. Material and spatial gauge theories of solids — III. Dynamics of disclination free states // Ibid.
6. Kadic A., Edelen D. G. B. A Yang-Mills type minimal coupling theory for materials with spatial defects // Intern. J. Engng. Sci.— 1982.— V. 20, N 4.
7. Landau L. D., Lifshitz E. M. Course of theoretical physics. V. 1. Mechanics.— N. Y.: Pergamon Press, 1976; V. 5, pt 1. Statistical physics.— N. Y.: Pergamon Press, 1980.
8. Edelen D. G. B., Lagoudas D. C. Dispersion relations for linearized field equations of dislocation dynamics // Intern. J. Engng Sci.— 1988.— V. 26, N 8.
9. Гриняев Ю. В., Попов В. Л. Спектр возбуждений изотропной бездиссипативной упругопластической среды // Изв. вузов. Физика.— 1990.— № 6.

г. Томск

Поступила 29/VII 1991 г.,
в окончательном варианте —
7/VIII 1992 г.

УДК 539.3

В. В. Кузнецов, С. В. Левяков

НЕЛИНЕЙНЫЙ ИЗГИБ ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ, НАГРУЖЕННЫХ ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

В работе выведены полные геометрически нелинейные соотношения задачи об изгибе тороидальной оболочки произвольного поперечного сечения. Найдено точное выражение для потенциала сил внутреннего давления, справедливое при любом искажении формы сечения. Рассмотрены алгоритм и численное решение задач о деформировании цилиндрических и тороидальных оболочек в области больших упругих перемещений. Полученные результаты сравниваются с известными аналитическими решениями и экспериментальными данными.

1. Введение. Начиная с [1, 2], задаче изгиба тонкостенных криволинейных труб были посвящены многочисленные исследования, большинство из которых проведено в рамках линейной теории оболочек. Случай совместного действия внутреннего давления и изгибающих моментов на трубу кругового поперечного сечения рассмотрен в [3, 4] с использованием вариационных принципов. В [5] применен иной подход, состоящий в решении дифференциальных уравнений изгиба тороидальной оболочки, предварительно нагруженной внутренним давлением. Установлено, что жесткостные свойства и напряжения в оболочке нелинейно зависят от давления. При этом изучались малые перемещения и задача ставилась как линейная относительно изгибающих моментов. В [6] рассматривались большие перемещения при чистом изгибе цилиндрических оболочек, получено значение предельного момента, при котором происходит потеря устойчивости оболочек, и впервые проведено исследование устойчивости оболочки при изгибе с учетом изменения ее формы в докрити-

© В. В. Кузнецов, С. В. Левяков, 1993