

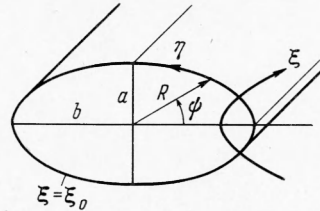
**О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ ФОКУСИРОВКЕ ПУЧКОВ  
С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ**

*В. А. Сыровой (Москва)*

В работе [1] приведено точное аналитическое решение задачи о формировании ленточного пучка при немонотонном изменении потенциала на границе. Показано, что построение периодической фокусирующей системы сводится к расчету эквипотенциалей на участке с симметричным относительно его середины распределением потенциала и к сопряжению двух таких элементов, осуществляемому при помощи достаточно густых экранирующих сеток, плотность зарядов на которых изменяется по определенному закону. Ниже получено простое аналитическое решение задачи о формировании пучков с эллиптическим поперечным сечением, основывающееся на аппроксимации потенциала на границе квадратной параболой [2]. Оно позволяет исследовать геометрии, характеризующиеся большим эксцентриситетом, которые могут служить моделью для учета краевых эффектов в ленточных пучках конечной ширины.

Будем вести рассмотрение в эллиптических цилиндрических координатах  $\xi, \eta, z$  (фиг. 1), связанных с декартовыми координатами  $x, y, z$  формулами

$$\begin{aligned} x &= a \sqrt{\beta-1} \operatorname{sh} \xi \sin \eta, & y &= a \sqrt{\beta-1} \operatorname{ch} \xi \cos \eta \\ z &= z \end{aligned} \quad (1)$$



Фиг. 1

Пусть  $\xi_0 \leq \xi < \infty, 0 \leq \eta \leq 2\pi$  — лапласовская область,  $a$  — меньшая полуось эллипса-границы  $\xi = \xi_0, \beta = (b/a)^2$ . Задача состоит в отыскании решения уравнения

$$\partial^2 \varphi / \partial \xi^2 + \partial^2 \varphi / \partial \eta^2 + a^2 (\beta-1) (\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta) \partial^2 \varphi / \partial z^2 = 0 \quad (2)$$

удовлетворяющего следующим условиям на границе пучка  $\xi = \xi_0$

$$\varphi = \varphi_0(z) = \alpha + (1-\alpha) (z/\sigma - 1)^2 = \alpha + (1-\alpha) Z^2, \quad \partial \varphi / \partial \xi = \varphi_1 = 0 \quad (3)$$

Здесь  $\alpha$  — минимальное значение потенциала  $\alpha \leq \varphi \leq 1$  в интервале  $0 \leq z \leq 2\sigma, \sigma = (1 + 2\alpha^{1/2}) \sqrt{1-\alpha^{1/2}}$ . В работе используются безразмерные переменные, введенные в [1]. Будем искать решение в виде ряда по  $(\xi - \xi_0)$  с коэффициентами, зависящими от  $\eta, z$

$$\varphi = \varphi_k (\xi - \xi_0)^k \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (4)$$

представляя в виде аналогичного разложения выражение перед  $\partial^2 \varphi / \partial z^2$  в (2)

$$a^2 (\beta-1) (\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta) = \gamma_k (\xi - \xi_0)^k \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (5)$$

Для  $\gamma_k$  получаем

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \gamma_0(\eta) = a^2 (\beta-1) (\operatorname{sh}^2 \xi_0 + \sin^2 \eta) \\ \gamma_{2k-1} &= a^2 (\beta-1) \operatorname{sh} 2\xi_0 \frac{2^{2k-2}}{(2k-1)!} = \text{const}, \quad \gamma_{2k} = a^2 (\beta-1) \operatorname{ch} 2\xi_0 \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} = \text{const} \end{aligned} \quad (6)$$

$(k = 1, 2, \dots)$

Учитывая, что  $\operatorname{th}^2 \xi_0 = 1/\beta$ , приходим к следующим окончательным формулам

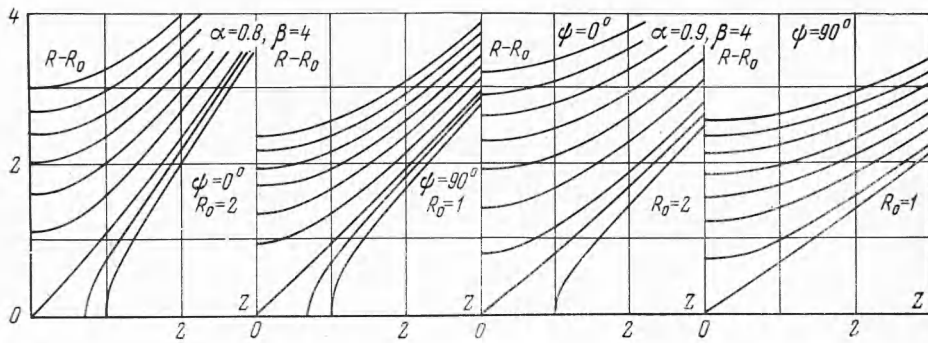
$$\begin{aligned} \gamma_0 &= a^2 H(\eta) = \frac{1}{2} a^2 [(\beta+1) + (\beta-1) \cos 2\eta] \\ \gamma_{2k-1} &= a^2 \sqrt{\beta} \frac{2^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad \gamma_{2k} = a^2 (\beta+1) \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя (4), (5) в (2), получаем рекуррентные соотношения для определения  $\varphi_k$

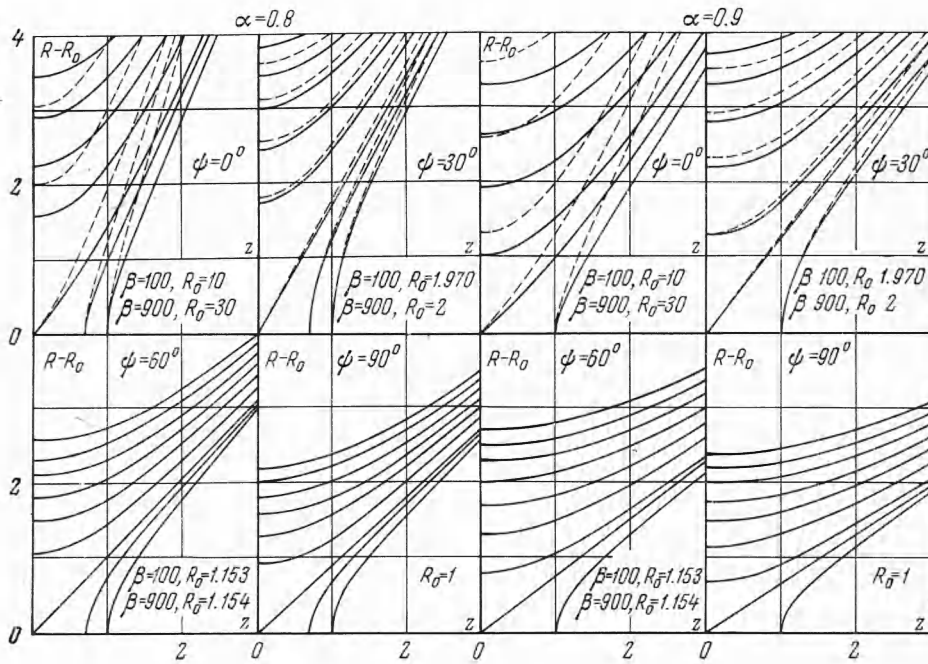
$$s(s+1) \varphi_{s+1} + (\varphi_{s-1})_{\eta}'' + \sum_{k=0}^{s-1} \gamma_k (\varphi_{s-k-1})_z'' = 0 \quad (s = 1, 2, \dots) \quad (8)$$

Используя (8), находим

$$\begin{aligned} (s=1) \quad \varphi_2 &= -1/2 \gamma_0 \varphi_0'', & (s=2) \quad \varphi_3 &= -1/6 \gamma_1 \varphi_0'' \\ (s=3) \quad \varphi_4 &= -1/12 (-1/2 \gamma_0'' + \gamma_2) \varphi_0'', & (s=4) \quad \varphi_5 &= -1/20 \gamma_3 \varphi_0'' \\ (s=5) \quad \varphi_6 &= -1/30 (1/24 \gamma_0^{IV} + \gamma_4) \varphi_0'', & (s=6) \quad \varphi_7 &= -1/42 \gamma_5 \varphi_0'' \\ (s=7) \quad \varphi_8 &= -1/56 (-1/720 \gamma_0^{IV} + \gamma_6) \varphi_0'', & (s=8) \quad \varphi_9 &= -1/72 \gamma_7 \varphi_0'' \end{aligned} \quad (9)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Вообще, нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} \Phi_{2k+1} &= -\frac{\gamma_{2k-1}}{2k(2k+1)} \Phi_0'' = -a^2 \sqrt{\beta} \frac{2^{2k-1}}{(2k+1)!} \Phi_0'' \quad (k=1, 2, \dots) \\ \Phi_{2k} &= -\frac{1}{(2k-1) \cdot 2k} \left[ (-1)^{k-1} \frac{\gamma_0^{(2k-2)}}{(2k-2)!} + \gamma_{2k-2} \right] \Phi_0'' = -\frac{2^{2k-2}}{(2k)!} \gamma_0(\eta) \Phi_0'' \quad (k=2, 3, \dots) \end{aligned} \tag{10}$$

Подставляя (3) и (10) в (4) и суммируя получающиеся ряды, приходим к следующему выражению для потенциала в области, внешней к пучку:

$$\begin{aligned} \varphi &= \alpha + (1-\alpha) Z^2 - \frac{1}{2} a^2 \sigma^{-2} (1-\alpha) \left\{ \sqrt{\beta} (\operatorname{sh} 2\xi - 2\xi) + \frac{1}{2} \right. \\ &\quad \left. + [(\beta+1) - (\beta-1) \cos 2\eta] (\operatorname{ch} 2\xi - 1) \right\}, \quad \xi = \xi - \xi_0 \end{aligned} \tag{11}$$

В дальнейшем в качестве характерного линейного размера в плоскости  $\xi, \eta$  выберем меньшую полуось эллипса-границы. При  $\beta = N(\eta) = a = 1$  формула (11) определяет потенциал для случая цилиндрического пучка  $R = 1$

$$\varphi = \alpha + (1-\alpha) Z^2 - \frac{1}{2} a^2 \sigma^{-2} (1-\alpha) (R^2 - 2 \ln R - 1) \tag{12}$$

Это — еще одна форма приближенного аналитического решения, отличная от рассмотренной в [3]. На фиг. 2, 3 приведены кривые, получающиеся от пересечения эквипотенциальных поверхностей  $\varphi = \text{const}$

$$Z = \left\{ \frac{\varphi - \alpha}{1 - \alpha} + \frac{1}{2\sigma^2} \left[ \sqrt{\beta} (\text{sh } 2\xi - 2\xi) + \text{H}(\eta) (\text{ch } 2\xi - 1) \right] \right\}^{1/2} \quad (13)$$

полуплоскостями  $\psi = \text{const}$  при различных значениях параметров  $\alpha, \beta$ . При построении этих кривых удобно пользоваться формулами, связывающими координаты  $\xi, \eta$  с полярными координатами  $R, \psi$

$$\xi = 1/2 \ln \left( \sqrt{\beta + 1} \right)^{-2} \left\{ R^2 + \sqrt{2} R (\cos \psi \left[ \sqrt{R^4 - 2(\beta - 1) R^2 \cos 2\psi + (\beta - 1)^2} + R^2 \cos 2\psi - (\beta - 1) \right]^{1/2} + \sin \psi \left[ \sqrt{R^4 - 2(\beta - 1) R^2 \cos 2\psi + (\beta - 1)^2} - R^2 \cos 2\psi + (\beta - 1) \right]^{1/2} + \sqrt{R^4 - 2(\beta - 1) R^2 \cos 2\psi + (\beta - 1)^2} \right\}$$

$$\text{tg } \eta = \frac{\sqrt{2} R \sin \psi + \left[ \sqrt{R^4 - 2(\beta - 1) R^2 \cos 2\psi + (\beta - 1)^2} - R^2 \cos 2\psi + (\beta - 1) \right]^{1/2}}{\sqrt{2} R \cos \psi + \left[ \sqrt{R^4 - 2(\beta - 1) R^2 \cos 2\psi + (\beta - 1)^2} + R^2 \cos 2\psi - (\beta - 1) \right]^{1/2}}$$

а также уравнением эллипса-границы в этих координатах

$$R_0 = \sqrt{\beta} [1 + (\beta - 1) \sin^2 \psi]^{-1/2}$$

Кривые  $\varphi = \text{const}$  (справа налево) соответствуют потенциалам  $\varphi = 1, 0.9, 0.8$  и далее с шагом 0.2. На фиг. 3 сплошные кривые отвечают случаю  $\beta = 100$ , пунктирные —  $\beta = 900$ . Видно, что при  $\psi = 30^\circ$  отличие двух этих семейств эквипотенциальных поверхностей невелико, а при  $\psi = 60^\circ$  и  $90^\circ$  практически не имеет места.

На фиг. 4 представлены поверхности вращения  $\varphi = \text{const}$ , вычисленные по формуле (12). Заметим, что потенциал экранирующих сеток в случае эллиптических пучков должен быть двумерным. Закон его изменения  $\varphi(R, \psi)$  легко получить из фиг. 2, 3.

Можно ожидать, что отличие приближенного решения (11) от точного имеет тот же порядок, что и в плоском случае [1], особенно в области, где кривизна границы невелика.

Поступила 8 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Сыровой В. А. Периодическая электростатическая фокусировка ленточного пучка. ПМТФ, 1965, № 4.
2. Молоковский С. И. Аналитический расчет геометрии электродов для электростатической фокусировки ленточного пучка. Радиотехника и электроника, 1962, т. 7, № 6.
3. S i e k a n o w i c z W. W. Derivation of the Ideal Electrode Shapes for Electrostatic Beam Focusing. RCA Rev., 1962, vol. 23, No. 1.

ИЗУЧЕНИЕ БЕГУЩИХ СТРАТ МИКРОВОЛНОВЫМ МЕТОДОМ

А. А. Зайцев, Г. С. Леонов

(Москва)

Микроволновым методом измерена плотность электронов  $n_e$  в бегущих стратах в разрядах He, Ne и Ar. Показано, что распределение колебаний светового излучения  $S$  вдоль положительного столба совпадает с распределением колебаний  $n_e$ . Получена зависимость профилей  $n_e(x)$  и  $S(x)$  и  $(x$  — координата вдоль оси разряда) от рода газа.

Разрядная трубка помещается в прямоугольный волновод через отверстия в широких стенках параллельно вектору электрического поля волны  $TE_{10}$ . Для обеспечения достаточной продольной локализации измеряемой плотности отношение высоты