

ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В ИЗЛУЧАЮЩЕ-ПОГЛОЩАЮЩЕМ ГАЗЕ ОКОЛО ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНКИ

В. П. Замураев

(Новосибирск)

Стационарная задача о ламинарном течении излучающе-поглощающего газа в пограничном слое около плоской пластинки рассматривалась в ряде работ [1-6]. Однако из-за предположений, делавшихся относительно излучения, область применения полученных при этом решений ограничена; к тому же точность используемых методов учета излучения не известна.

В данной работе рассматривается ламинарный пограничный слой около пластинки при более точном описании переноса излучения. Теплопередача осуществляется обычной теплопроводностью и излучением. Относительно излучения делается ряд упрощающих предположений, используемых и в упомянутых работах. Так принимается гипотеза локального термодинамического равновесия — излучательная способность и коэффициент поглощения связаны законом Кирхгофа. Среда предполагается серой. Потоками излучения вдоль пластины пренебрегается в сравнении с потоками поперек. Последнее допустимо, если изменение температуры вдоль пластины на длине пробега излучения мало. На потоках излучения поперек пластины слабое изменение температуры вдоль пластины скажется таким образом, что эти потоки будут определяться профилем температуры в рассматриваемом сечении. Стенка предполагается абсолютно черной. Физические свойства среды могут зависеть от температуры.

Выясняется характер асимптотического поведения теплопередачи далеко от передней точки пластины. Для решения задачи по всей длине пластины применяется разностный метод решения системы уравнений в частных производных со сложным интегро-дифференциальным уравнением энергии. Этот метод в основных чертах сходен с разностным методом, применявшимся для решения уравнений пограничного слоя без учета излучения [7-9]. В заключение приведены результаты расчетов для одного из случаев, рассматривавшихся в работе [1]. При этом выяснены характер теплопередачи и возможности учета излучения в приближении лучистой теплопроводности.

1. Рассматривается стационарный ламинарный пограничный слой около плоской пластинки.

В переменных x — продольная координата и y — поперечная координата поставленная задача описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0 \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} &= - \frac{\partial q}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u и v — составляющие скорости вдоль и поперек пластины, T — температура, ρ — плотность, μ — коэффициент вязкости, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, q — полный поток тепла по y , равный сумме потоков за счет обычной теплопроводности q_m и за счет излучения q_r

$$q = q_m + q_r \quad (1.2)$$

Поток тепла q_m определяется обычным образом

$$q_m = - \lambda \partial T / \partial y \quad (1.3)$$

где λ — коэффициент теплопроводности.

Поток тепла за счет излучения q_r можно найти, пользуясь его выражением, получающимся интегрированием по спектру и телесному углу интенсивности излучения в виде формального решения уравнения переноса, умноженной на косинус угла между направлением излучения и осью y , с учетом предположения о серости среды и при пренебрежении изменением температуры по x на нескольких длинах пробега излучения

$$q_r = 2\sigma T_0^4 E_3(\tau) + \int_0^\tau 2\sigma T^4 E_2(\tau - t) dt - \int_\tau^\infty 2\sigma T^4 E_2(t - \tau) dt \quad (1.4)$$

Здесь σ — постоянная Стефана — Больцмана; $E_n(\tau)$ — интегральная показательная функция; τ — оптическая толщина слоя газа, определяемая уравнением (l — длина пробега излучения)

$$\tau = \int_0^y \frac{dy}{l} \quad (1.5)$$

Индекс 0 внизу характеризует значения параметров на стенке. Величины ρ , μ , c_p , λ , l , вообще говоря, функции температуры.

Вместо уравнения неразрывности можно рассматривать два эквивалентных уравнения (ψ — функция тока)

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.6)$$

Решение системы уравнений (1.1) — (1.5) ищется в области $x > 0$, $y \geq 0$ при граничных условиях:

$$u = v = 0, \quad T = T_0 \quad \text{при } y = 0; \quad u = u_\infty, \quad T = T_\infty \quad \text{при } y = \infty \quad (1.7)$$

2. Сформулированная выше задача решается численно. При этом передняя точка $x = y = 0$ является особой (напряжение трения и поток тепла из-за обычной теплопроводности ведут себя в окрестности этой точки как $1/\sqrt{x}$), поэтому для создания единого во всей области алгоритма численного счета вводятся новые независимые переменные

$$\xi = \frac{2\sigma T_1^4}{\rho_1 u_\infty c_{p1} T_{1\perp}} \frac{x}{l_1}, \quad \eta = \left(\frac{\rho_1 u_\infty}{\mu_1 x} \right)^{1/2} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_1} dy \quad (2.1)$$

а вместо функции тока $\psi(x, y)$ — новая функция $f(\xi, \eta)$

$$\psi = \sqrt{\rho_1 u_\infty \mu_1 x} f \quad (2.2)$$

В результате все производные, входящие в уравнения сохранения, становятся конечными, а искомые функции f , u и T в новых переменных слабо меняются вдоль пластины, благодаря чему счет при той же точности можно вести с более крупным шагом по ξ .

Граничные условия при $y = \infty$ приходится рассматривать на некотором конечном расстоянии от пластины, начиная с которого функции u и T отличаются от своих предельных значений u_∞ и T_∞ на величину, не превосходящую погрешности разностной схемы. В новых переменных толщина пограничного слоя меняется слабо и решение можно искать в стандартной области $\xi \geq 0$, $0 \leq \eta \leq \eta_\infty$.

Введем безразмерные величины (2.3)

$$u' = \frac{u}{u_\infty}, \quad T' = \frac{T}{T_1}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_1}, \quad \mu' = \frac{\mu}{\mu_1}, \quad c_p' = \frac{c_p}{c_{p1}}, \quad \lambda' = \frac{\lambda}{\lambda_1}, \quad l' = \frac{l}{l_1}, \quad q' = \frac{q}{\sigma T_1^4}$$

где физические параметры, помеченные индексом 1, взяты при температуре T_1 . Система уравнений (1.1) — (1.6) с граничными условиями (1.7)

в безразмерных величинах примет вид

$$u' = \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \rho' \mu' \frac{\partial u'}{\partial \eta} + \frac{f}{2} \frac{\partial u'}{\partial \eta} + \xi \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial u'}{\partial \eta} - u' \frac{\partial u'}{\partial \xi} \right) = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{P_1} \frac{\partial}{\partial \eta} \rho' \lambda' \frac{\partial T'}{\partial \eta} + \frac{f}{2} c_p' \frac{\partial T'}{\partial \eta} + \xi c_p' \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial T'}{\partial \eta} - u' \frac{\partial T'}{\partial \xi} \right) + \xi \Phi + \varepsilon_1 \rho' \mu' \left(\frac{\partial u'}{\partial \eta} \right)^2 = 0 \quad (2.6)$$

$$\Phi = -\frac{1}{2 \sqrt{\xi \varepsilon}} \frac{\partial q_r'}{\partial \eta}, \quad \rho' l' \Phi = (\theta_0^4 - T'^4) E_2(\tau) +$$

$$+ (\theta_\infty^4 - T'^4) E_2(\tau_\infty - \tau) + \int_0^{\tau_\infty} [T'^4(t) - T'^4] E_1(|\tau - t|) dt \quad (2.7)$$

$$\tau = \sqrt{\varepsilon \xi} \int_0^\eta \frac{d\eta}{\rho' l'} \quad (2.8)$$

Граничные условия:

$$f = u' = 0, \quad T' = \theta_0 \quad \text{при } \eta = 0, \quad u' = 1, \quad T' = \theta_\infty \quad \text{при } \eta = \eta_\infty \quad (2.9)$$

Здесь P_1 — число Прандтля,

$$P_1 = \frac{c_{p1} \mu_1}{\lambda_1}, \quad \varepsilon = \frac{\mu_1 c_{p1} T_1}{2 \sigma T_1^4 l_1}, \quad \varepsilon_1 = \frac{u_\infty^2}{c_{p1} T_1} \quad (2.10)$$

Выражение для Φ получено с учетом того, что $T' = \theta_\infty$ при $\eta \geq \eta_\infty$.
Потоки тепла можно найти по следующим формулам

$$q_m' = -\frac{2 \sqrt{\varepsilon}}{P_1 \sqrt{\xi}} \rho' \lambda' \frac{\partial T'}{\partial \eta} \quad (2.11)$$

$$q_r' = 2\theta_0^4 E_3(\tau) - 2\theta_\infty^4 E_3(\tau_\infty - \tau) + 2 \int_0^\tau T'^4 E_2(\tau - t) dt -$$

$$- 2 \int_\tau^{\tau_\infty} T'^4 E_2(t - \tau) dt \quad (2.12)$$

3. Из уравнения (2.8) видно, что при малых значениях ξ пограничный слой оптически прозрачен, причем чем меньше ε , тем он дольше остается прозрачным. Член в уравнении энергии (2.6), связанный с излучением, представляет собой произведение ξ на ограниченную функцию Φ и при малых ξ мал в сравнении с другими членами уравнения. Соответственно этому мало влияние излучения. При $\xi \rightarrow 0$ оно исчезает. Профиль температуры стремится при этом к автомодельному профилю при отсутствии излучения. Однако особенность при $\xi = 0$ до конца не исчезает. Будучи ограниченной, функция Φ имеет неограниченные производные по ξ . Первая ее производная ведет себя, как $\xi^{-1/2} \ln \xi$. Это связано с тем, что оптическая толщина пограничного слоя, растет по $\sqrt{\xi}$ (при малых ξ). В результате функция Φ очень резко меняется.

4. Интегрируя в правой части уравнения (1.4) по частям и используя (1.5), можно получить выражение для q_r в безразмерном виде

$$q_r' = -\frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \xi}} \frac{\partial T'^4}{\partial \alpha} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \xi}} \frac{\partial T'^4}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} 2E_4(\sqrt{\varepsilon \xi} \alpha) + \left(\alpha = \int_0^\eta \frac{d\eta}{\rho' l'} \right)$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{\varepsilon \xi}} \int_0^\alpha \frac{\partial^2 T'^4}{\partial t^2} E_4[\sqrt{\varepsilon \xi} (\alpha - t)] dt - \frac{2}{\sqrt{\varepsilon \xi}} \int_\alpha^\infty \frac{\partial^2 T'^4}{\partial t^2} E_4[\sqrt{\varepsilon \xi} (t - \alpha)] dt \quad (4.1)$$

Если величина $\sqrt{\varepsilon \xi} \rightarrow 0$, то подынтегральные выражения в (4.1) стремятся к нулю всюду как $(\sqrt{\varepsilon \xi} |\alpha - t|)^{-1} \exp(-\sqrt{\varepsilon \xi} |\alpha - t|)$ за исключением стремящейся к нулю окрестности точки $t = \alpha$, где они конечны. В результате соответствующие члены имеют порядок $(\varepsilon \xi)^{-1}$. Поэтому при $\sqrt{\varepsilon \xi} \gg \alpha^{-1}$ вместо (2.12) для q_r' можно приближенно использовать такое выражение

$$q_r' = -\frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \xi}} \rho' l' \frac{\partial T^4}{\partial \eta} \quad \text{или} \quad q_r = -\frac{l}{3} \frac{\partial 4\sigma T^4}{\partial y} \quad (4.2)$$

Таким образом, при больших значениях величины $\varepsilon \xi$ поток излучения вне стенки получается в приближении лучистой теплопроводности.

Иначе обстоит дело вблизи стенки в слое толщиной в несколько длин пробега излучения (толщина этого слоя в переменных η, ξ стремится к нулю как $1/\sqrt{\varepsilon \xi}$). Так при $l/L \rightarrow 0$, L — характерный размер задачи (и, следовательно, $1/\sqrt{\varepsilon \xi} \rightarrow 0$), для потока излучения в этом слое получим

$$q_r' = -\frac{4}{3} \left[1 - \frac{3}{2} E_4(\tau) \right] \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \xi}} \rho' l' \frac{\partial T^4}{\partial \eta} \quad (4.3)$$

отличающееся от (4.2) множителем $[1 - \frac{3}{2} E_4(\tau)]$, который меняется от 0.5 на стенке до 1 в потоке газа (при $\tau = 4$ отличие его от единицы составляет менее 0.4%). Взаимная доля потоков тепла соответственно определяется так

$$\frac{q_r}{q_m} = \frac{16}{3} \left[1 - \frac{3}{2} E_4(\tau) \right] \frac{\sigma T^3 l}{\lambda}$$

Таким образом, при l/L малом около стенки в слое газа толщиной в несколько длин пробега происходит перераспределение тепла, переносимого излучением и обычной теплопроводностью, в сторону увеличения молекулярного потока тепла и соответствующего уменьшения радиационного потока (суммарный поток тепла почти не меняется). Это осуществляется за счет более резкого снижения температуры к стенке. Но относительная толщина этого слоя мала. Поэтому, рассматривая излучение в приближении лучистой теплопроводности, можно получить правильный суммарный поток тепла; радиационная же составляющая потока тепла будет завышена как минимум в 2 раза при изменении параметра l/L от нуля до бесконечности. В работе [1] этот недостаток приближения лучистой теплопроводности в известной мере устранен введением тонкого пристеночного слоя, где коэффициент в выражении для радиационного потока тепла в 2 раза меньше, чем в остальной области.

5. Систему уравнений (2.4) — (2.8) с граничными условиями (2.9) решаем методом конечных разностей.

Область течения $\xi \geq 0, 0 \leq \eta \leq \eta_\infty = \text{const}$ разбивается на характеристические полоски ширины h . Рассматриваются средние арифметические значений искомых функций f_p ($f_p = f, u', T'$) на левой ($i-1$)-й и правой i -й границах полоски

$$f_p^\circ = 1/2 (f_{p, i-1} + f_{p, i}) \quad (5.1)$$

Индекс i здесь означает, что функция берется при ξ , равном $\xi_i = ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots$).

Эти средние значения отличаются от точных значений на средней линии полоски на величину порядка h^2 .

Система уравнений (2.4) — (2.6) с граничными условиями (2.9) записывается на средней линии характеристической полоски, при этом точные величины заменяются средними f_p° , а производные по ξ — разностным аналогом

$$\frac{\partial f_p}{\partial \xi} \rightarrow \frac{f_p^\circ - f_{p, i-1}}{h/2} \quad (5.2)$$

Чтобы не прибегать к итеративному процессу, сильно увеличивающему при наличии излучения затраты машинного времени, и в то же время не увеличить погрешность аппроксимации системы, величина Φ , описывающая излучение, а заодно и величины $\rho' \mu', \rho' \lambda', c_p'$ и скорость u' в (2.4) — каждая из этих величин заменяется линейной

комбинацией своих значений на границах предыдущей полоски, так что погрешность аппроксимации системы остается порядка h^2

$$f_q \rightarrow f_q'' = (1 + \frac{1}{2}b) f_{q, i-1} - \frac{1}{2}b f_{q, i-2} \quad (b = h_2 / h_1) \quad (5.3)$$

где h_1 — предыдущий шаг, h_2 — новый шаг.

В результате система линейных уравнений в частных производных (2.4) — (2.6) сводится к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{df^\circ}{d\eta} = u'' \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} (\rho\mu)'' \frac{du^\circ}{d\eta} + \frac{f^\circ}{2} \frac{du^\circ}{d\eta} + \xi^\circ \left(\frac{f^\circ - f_{i-1}}{h/2} \frac{du^\circ}{d\eta} - u'' \frac{u^\circ - u_{i-1}'}{h/2} \right) = 0 \quad (5.5) \\ \frac{1}{P_1} \frac{d}{d\eta} (\rho\lambda)'' \frac{dT^\circ}{d\eta} + \frac{f^\circ}{2} c_p'' \frac{dT^\circ}{d\eta} + \xi^\circ c_p'' \left(\frac{f^\circ - f_{i-1}}{h/2} \frac{dT^\circ}{d\eta} - u^\circ \frac{T^\circ - T_{i-1}'}{h/2} \right) + \\ + \xi^\circ \Phi'' + \varepsilon_1 (\rho\mu)'' \left(\frac{du^\circ}{d\eta} \right)^2 = 0 \quad (5.6) \end{aligned}$$

Граничные условия

$$f^\circ = u^\circ = 0, \quad T^\circ = \theta_0^\circ \quad \text{при } \eta = 0; \quad u^\circ = 1, \quad T^\circ = \theta_\infty^\circ \quad \text{при } \eta = \eta_\infty \quad (5.7)$$

Эта система решается в такой последовательности. Вначале из уравнения (5.4) находится функция $f^\circ(\eta)$. Затем решается уравнение (5.5) для $u^\circ(\eta)$. И, наконец, из уравнения (5.6) находится функция $T^\circ(\eta)$.

После того как система (5.4) — (5.6) решена, из алгебраических соотношений $f_{pi}^\circ = 2f_p^\circ - f_{p, i-1}$, являющихся следствием (5.1), находятся значения искомых функций f , u' и T' при $\xi = \xi_i = ih$ с погрешностью порядка h^2 .

Для решения линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5.4) — (5.6) область течения в плоскости ξ, η разбивается на n горизонтальных полосок ширины $\Delta = \eta_\infty / n$, и каждое из уравнений (5.4) — (5.6) аппроксимируется разностным уравнением второго порядка точности. В результате значения функции $f^\circ(\eta)$ при $\eta = j\Delta$ находятся по формуле

$$f_j^\circ = f_{j-1} + \frac{\Delta}{2} (u_{j-1}'' + u_j''), \quad f_0^\circ = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

А вместо уравнений (5.5) и (5.6) используются соответственно разностные уравнения

$$\begin{aligned} [(\rho\mu)_j'' + (\rho\mu)_{j+1}'' + \frac{\Delta}{2} f_j^\circ + 2\xi^\circ \frac{\Delta}{h} (f_j^\circ - f_{i-1j})] u_{j+1}^\circ - [(\rho\mu)_{j-1}'' + 2(\rho\mu)_j'' + \\ + (\rho\mu)_{j+1}'' + 4\xi^\circ \frac{\Delta^2}{h} u_j''] u_j^\circ + [(\rho\mu)_{j-1}'' + (\rho\mu)_j'' - \frac{\Delta}{2} f_j^\circ - \\ - 2\xi^\circ \frac{\Delta}{h} (f_j^\circ - f_{i-1j})] u_{j-1}^\circ + 4\xi^\circ \frac{\Delta^2}{h} u_j'' u_{i-1j}' = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(\rho\lambda)_j'' + (\rho\lambda)_{j+1}'' + \frac{\Delta}{2} P_1 f_j^\circ c_{pj}'' + 2\xi^\circ \frac{\Delta}{h} P_1 c_{pj}'' (f_j^\circ - f_{i-1j})] T_{j+1}^\circ - [(\rho\lambda)_{j-1}'' + \\ + 2(\rho\lambda)_j'' + (\rho\lambda)_{j+1}'' + 4\xi^\circ \frac{\Delta^2}{h} P_1 c_{pj}'' u_j^\circ] T_j^\circ + [(\rho\lambda)_{j-1}'' + (\rho\lambda)_j'' - \frac{\Delta}{2} P_1 f_j^\circ c_{pj}'' - \\ - 2\xi^\circ \frac{\Delta}{h} P_1 c_{pj}'' (f_j^\circ - f_{i-1j})] T_{j-1}^\circ + 4\xi^\circ \frac{\Delta^2}{h} P_1 c_{pj}'' u_j^\circ T_{i-1j}' + 2\xi^\circ \Delta^2 P_1 \Phi_j'' + \\ + \frac{\varepsilon_1}{2} P_1 (\rho\mu)_j'' (u_{j+1}^\circ - u_{j-1}^\circ)^2 = 0 \end{aligned}$$

$$u_0^\circ = 0, \quad u_n^\circ = 1; \quad T_0^\circ = \theta_0^\circ, \quad T_n^\circ = \theta_\infty^\circ$$

Каждое из этих уравнений — уравнение второго порядка с известными значениями искомых функций на разных концах интервала. Решаются они методом прогонки.

Величина $(\rho' l \Phi)_{ij}$ вычисляется по формуле

$$(\rho' l \Phi)_{ij} = (\theta_0^4 - T_{ij}'^4) E_2(\tau_{ij}) + (\theta_{\infty}^4 - T_{ij}'^4) E_2(\tau_{\infty i} - \tau_{ij}) + \sqrt{\varepsilon \xi_i} \frac{\Delta}{2} \sum_{k=1}^n (F_{ik-1j} + [F_{ikj}])$$

где

$$[F_{ikj}] = (T_{ik}'^4 - T_{ij}'^4) E_1(|\tau_{ik} - \tau_{ij}|) \frac{1}{(\rho' l)_{ik}}$$

Оптическая толщина τ_{ij} вычисляется по разностному аналогу уравнения (2.8)

$$\tau_{ij} = \tau_{ij-1} + \sqrt{\varepsilon \xi_i} \frac{\Delta}{2} \left[\frac{1}{(\rho' l)_{ij-1}} + \frac{1}{(\rho' l)_{ij}} \right] \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\tau_{i0} = 0$$

Для того чтобы начать счет, нужно знать профили скорости и температуры в начальном ($\xi = 0$) и первом ($\xi = h$) сечениях. Решение в этих сечениях ищется методом последовательных приближений.

6. Результаты расчетов приведены для случая: $\theta_{\infty} = 1, \theta_0 = 0.1, \varepsilon = 0.2, P_1 = 1, \varepsilon_1 = 0$. Физические свойства в этом случае полагались постоянными — величины $\rho' \mu', \rho' \lambda', c_p', \rho' l'$ приравнялись единице. Все эти условия в точности соответствуют одному из вариантов работы [1].

Задача считалась с переменным по ξ шагом. Точность проверялась повторным счетом с другими значениями шага как по ξ , так и по η . Первоначально счет проводился при следующих значениях шага по ξ :

$h = 0.002$	при $0 \leq \xi \leq 0.008$
$h = 0.004$	при $0.008 \leq \xi \leq 0.02$
$h = 0.008$	при $0.02 \leq \xi \leq 0.06$
$h = 0.02$	при $0.06 \leq \xi \leq 0.3$
$h = 0.1$	при $0.3 \leq \xi \leq 5.1$

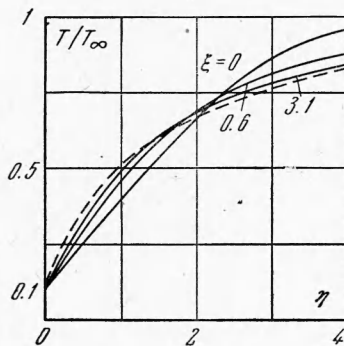
Шаг по η в этом случае равнялся 0.4, а значение η на внешней границе равнялось 16. Счет на электронно-вычислительной машине занял 5 мин.

Повторный счет проводился до $\xi = 3.1$ при значениях шага в два раза меньших как по ξ , так и по η . Значение η_{∞} до $\xi = 0.5$ полагалось равным 13, а затем увеличивалось до 16.

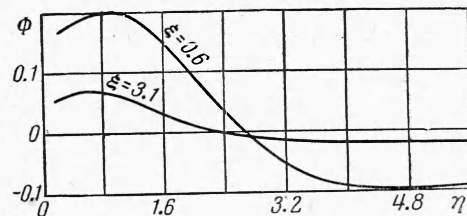
Максимальное различие между первым и вторым счетом в значениях температуры составляет 0.3%, а в потоках тепла на стенку — 0.7% (при $\xi = 3.1$). Различия в значениях величины Φ доходит до нескольких процентов.

Результаты расчета представлены в виде графиков. Пунктиром нанесены соответствующие кривые из работы [1].

На фиг. 1 изображены профили температуры по переменной η при различных значениях ξ . С ростом ξ профиль температуры деформируется от автомодельного без излучения в профиль, соответствующий рассмотрению излучения в приближении нелинейной (лучистой) теплопроводности. Деформация происходит таким образом, что горячий газ при наличии излучения становится более холодным, а газ около стенки — более горячим. В физической плоскости это соответствует тому, что горячий газ охлаждается быстрее, а газ вблизи стенки — медленнее (в сравнении со случаем, когда излучение не рассматривается). Объясняется это тем, что горячий газ отдает тепло не только моле-



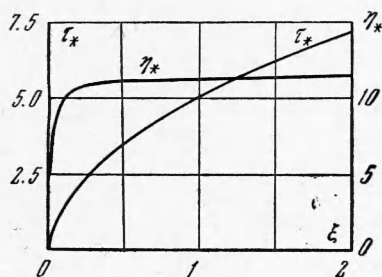
Фиг. 1



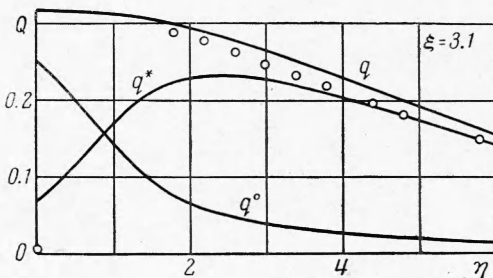
Фиг. 2

кулярной теплопроводностью, но и излучением, а холодный газ около стенки больше поглощает, нежели излучает (фиг. 2, где при различных значениях ξ изображена зависимость от η величины Φ , пропорциональной $-\partial q_r / \partial \eta$).

На фиг. 3 построена толщина пограничного слоя η_* , вычисленная по значению температуры, отличающемуся от предельного на 1%. При малых ξ наблюдается очень резкое утолщение пограничного слоя. В дальнейшем толщина пограничного слоя по переменной η почти не меняется и близка к предельной (при $\xi \rightarrow \infty$).

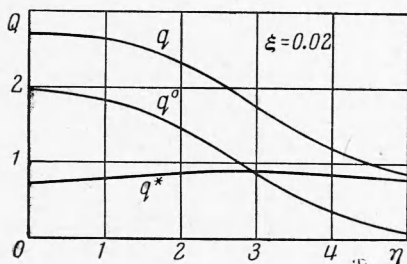


Фиг. 3

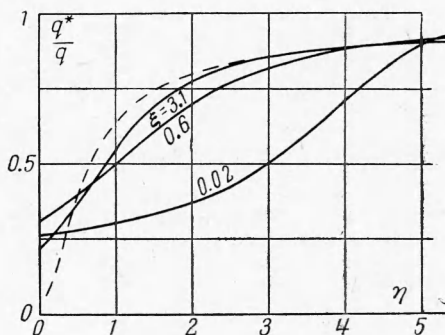


Фиг. 4

При рассматриваемых условиях деформация профиля температуры при небольших значениях ξ происходит резко, что связано с быстрым ростом оптической толщины пограничного слоя (фиг. 3), причем в глубине потока она завершается быстрее. Последнее означает, что приближение нелинейной теплопроводности для излучения становится приемлемым первоначально в наиболее горячей области пограничного слоя. Этот же факт виден из фиг. 4, где кружочками отмечены радиационные потоки тепла, вычислен-



Фиг. 5



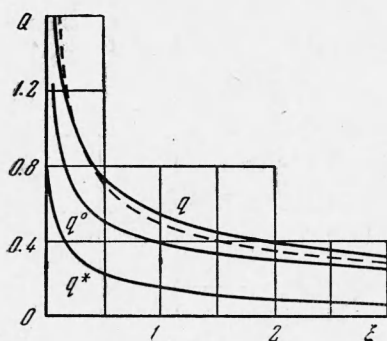
Фиг. 6

ные в приближении нелинейной теплопроводности по неавтономному профилю температуры при $\xi = 3.1$.

Область, где профиль температуры близок к линейному, при наличии излучения сужается с ростом ξ . Это видно непосредственно из фиг. 1, а также при рассмотрении фиг. 4 и 5, где нанесены потоки тепла $Q = q/\sigma T_\infty^4$ за счет излучения q^* , обычной теплопроводности q^o и суммарный q в зависимости от η при ξ , равных 0,02 и 3,1. При малых значениях ξ молекулярный поток тепла вблизи стенки убывает медленнее, а при больших ξ быстрее. Так как поток тепла за счет обычной теплопроводности пропорционален наклону профиля температуры, кривизна профиля растет с ростом ξ .

При малых значениях ξ поток излучения меняется слабо по толщине пограничного слоя (фиг. 5), так как пограничный слой еще оптически прозрачен (фиг. 3). Но уже при $\xi = 0.02$ в рассматриваемом случае ясно вырисовывается максимум радиационного потока, связанный с тем, что первоначально тепло переносится излучением, и лишь у стенки происходит перераспределение, и тепло передается и молекулярной теплопроводностью, тогда как суммарный поток тепла почти не меняется. Причем при больших ξ этот эффект проявляется в большей степени. Это хорошо видно из фиг. 6, где изображена

доля потока излучения в зависимости от η при различных ξ . В довольно широкой области внутри пограничного слоя доля потока излучения растет с ростом ξ , причем особенно быстро при небольших значениях ξ . Этот рост доли излучения в теплопередаче связан



Фиг. 7

с тем, что профиль температуры в этой области становится более пологим. Около стенки наоборот: крутизна профиля нарастает, доля потока излучения падает. (При малых ξ доля потока излучения растет и вблизи стенки из-за резкого падения молекулярного потока.)

На фиг. 7 построены поток тепла на стенку за счет излучения, поток тепла за счет обычной теплопроводности, а также суммарный поток. Там же нанесены суммарные потоки тепла при учете излучения в приближении нелинейной теплопроводности (из работы [1]). Различия при рассматриваемых условиях несколько больше 10%. Различия в радиационной составляющей потока тепла больше (при $\xi = 3.1$ они отличаются при рассматриваемых условиях в 40 раз).

В заключение благодарю А. Т. Онуфриева за полезное обсуждение работы.

Поступила 17 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Viskanta R., Grosch R. I. Boundary layer in thermal radiation absorbing and emitting media. Int. J. Heat. and Mass Transfer, 1962, 5, 795—806.
2. Кох, Де-Сильва. Взаимодействие между излучением и конвекцией в пограничном слое плоской пластины при гиперзвуковых скоростях. Ракетная техника, русск. пер. журн. ARS. Journal, 1962, т. 32, № 5, 103—105.
3. Курбацкий А. Ф., Онуфриев А. Т. Об охлаждении излучением газа, обтекающего плоскую пластинку. ПМТФ, 1964, № 3.
4. Румынский А. Н. Пограничный слой в излучающих и поглощающих средах. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 2, 47—53.
5. Андреев Г. Н. К учету радиационного потока в ламинарном пограничном слое. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 6, 109—111.
6. Ромишевский Е. А. Пограничные слои и стабилизированный газовый разряд при диффузионном характере излучения. Инж. ж., 1962, т. 2, вып. 1, 170—174.
7. Лью Шэнь-Цюань. Расчет ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости при наличии отсоса или вдува. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 4, 666—683.
8. Численные методы в газовой динамике. Сб. работ Вычисл. центра МГУ, под ред. Рослякова Г. С. и Чудова Л. А., Изд. МГУ, 1963, II.
9. Громов В. Г. Применение трехслойной разностной схемы для решения уравнений пограничного слоя. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 5, 124—133.