

ции. Удобнее все же перейти к параметрам f и η . Методом множественной регрессии зависимости V_P^*/V_P и V_S^*/V_S от f и η аппроксимируются уравнениями

$$V_P^* = V_P(1 - 0,712f - 0,0776\eta),$$
$$V_S^* = V_S(1 - 0,660f - 0,0617\eta).$$

Средняя ошибка прогноза при такой аппроксимации кривых рис. 1, 2 равна 5,6 % для продольных и 6,2 % для поперечных волн.

Итак, можно сделать выводы. Скорости продольных и поперечных волн в консолидированных зернистых средах зависят как минимум от двух параметров структуры порового пространства, например: пористости и произведения удельной поверхности на средний размер зерна. Причем увеличение последнего ведет к уменьшению скоростей. Скорости продольных волн более чувствительны к изменению параметров структуры по сравнению с поперечными. Это приводит к падению эффективного коэффициента Пуассона. Эффективные упругие параметры зависят лишь от коэффициента Пуассона материала матрицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. — М.: Мир, 1982.
2. Дересевич Г. Механика зернистой среды // Проблемы механики. — М.: ИЛ, 1961. — Вып. 3.
3. Сибиряков Б. П. Упругие свойства пустых скелетов зернистых коллекторов // ЦМТФ. — 1983. — № 4.
4. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. — М.: Гостехиздат, 1955.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. — М.: Наука, 1987.
6. Партон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости. — М.: Наука, 1967.
7. Фенелонов В. Б., Заграфская Р. В. Некоторые вопросы моделирования структуры катализаторов, носителей и адсорбентов // Моделирование пористых материалов. — Новосибирск: ИК СО АН СССР, 1976.
8. Карнаузов А. П. Модели пористых систем // Там же.

г. Новосибирск

Поступила 16/XII 1987 г.
в окончательном варианте — 11/VIII 1988 г.

УДК 539.32

П. В. Гельд, Е. А. Митюшов

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УПРУГИХ СВОЙСТВ ГЕТЕРОГЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Упругие характеристики гетерогенных материалов в течение многих лет остаются предметом многочисленных как экспериментальных, так и теоретических исследований. Это неудивительно, поскольку они являются одними из важнейших характеристик конструкционных, в частности композиционных, материалов, во многом определяющими их служебные свойства.

Однако следует отметить, что многие феноменологические и теоретические методы оценки упругих характеристик гетерогенных материалов по данным об особенностях их структуры и свойствам фазовых составляющих зачастую основываются на формальных допущениях математического характера, облегчающих решение уравнений, учитывающих сложный характер взаимодействия между образующими их структурными элементами. При этом в них отсутствует четкая связь между используемыми упрощающими предположениями и соответствующими изменениями в описываемой физической модели гетерогенной системы. Между тем различные допущения иногда приводят к одинаковым результатам. Это, очевидно, достаточно однозначно свидетельствует об эквивалентности физических моделей, что не всегда принимается во внимание при выборе тех или иных расчетных зависимостей, применяемых при исследовании упругих характеристик реальных гетерогенных материалов статистической и матричной структуры.

© 1990 Гельд П. В., Митюшов Е. А.

Покажем, что многие известные результаты могут быть получены из решения задачи Эшелби [1] о деформации инородного упругого включения, помещенного в бесконечную однородную матрицу. Пусть $\tilde{\epsilon}$ — однородная деформация среды, свойства которой характеризуются тензором модулей упругости c^m , тогда в соответствии с решением Эшелби деформация одиночного включения

$$(1) \quad \epsilon^f = \{I + N : [(c^m)^{-1} : c^f - I]\}^{-1} : \tilde{\epsilon}.$$

Здесь N — тензор Эшелби; c^f — тензор модулей упругости включения; I — единичный тензор.

Если материал матрицы и включения изотропен, а форма последнего является сферической, то тензор N также будет изотропным, в этом случае можно воспользоваться представлением [2]

$$(c^m)^{-1} = \frac{1}{3K^m} V + \frac{1}{2\mu^m} D, \quad c^f = 3K^f V + 2\mu^f D,$$

$$N = \frac{3K^m}{3K^m + 4\mu^m} V + \frac{6(K^m + 2\mu^m)}{5(3K^m + 4\mu^m)} D,$$

где $K^{m(f)}$, $\mu^{m(f)}$ — объемный и сдвиговый модули матрицы и включения; V и D — объемная и девиаторная составляющие единичного тензора ($I = V + D$).

Используя такое представление тензоров, а также соотношение (1), для деформации инородного включения, помещенного в бесконечную среду, можно записать

$$(2) \quad \epsilon^f = \left[\frac{V}{1 + a(K^f - K^m)} + \frac{D}{1 + b(\mu^f - \mu^m)} \right] : \tilde{\epsilon}$$

$$\left(a = \frac{3}{3K^m + 4\mu^m}, \quad b = \frac{6(K^m + 2\mu^m)}{5\mu^m(3K^m + 4\mu^m)} \right).$$

Воспользуемся теперь формулой (2) для определения эффективных упругих характеристик двухфазной гетерогенной системы. Пусть упругие характеристики первой фазы определяются изотропным тензором $c^{(1)}$, а второй — тензором $c^{(2)}$.

Для установления эффективных свойств указанных систем рассмотрим однородное тело сравнения с упругими характеристиками K_c и μ_c . Это тело сравнения обладает той особенностью, что упругое поле в помещаемом в него одиночном сферическом включении с упругими характеристиками отдельной фазовой составляющей тождественно среднему по объему, занятому данной фазой в гетерогенном материале. При этом, естественно, предполагается, что деформация тела сравнения и макродеформация реальной системы совпадают, т. е. в среднем упругое поведение фазовых составляющих приравнивается таковому в соответствующих одиночных включениях, помещаемых поочередно в гомогенную среду. Тогда, согласно формуле (2), для средних значений тензоров деформации по первой и второй фазе можно записать

$$(3) \quad \epsilon_i = \left[\frac{V}{1 + a_c(K_i - K_c)} + \frac{D}{1 + b_c(\mu_i - \mu_c)} \right] : \langle \epsilon \rangle, \quad i = 1, 2.$$

При этом, как и ранее (см. выражение (2)),

$$(4) \quad a_c = \frac{3}{3K_c + 4\mu_c}, \quad b_c = \frac{6(K_c + 2\mu_c)}{5\mu_c(3K_c + 4\mu_c)}.$$

Для средней деформации в гетерогенной системе, кроме того, справедливо равенство

$$(5) \quad \langle \epsilon \rangle = c_1 \epsilon_1 + c_2 \epsilon_2$$

(c_1 и c_2 — объемные содержания материала первой и второй фазы в гете-

рогенном материале). Подставляя соотношения (3) в равенство (5), имеем

$$(6) \quad \frac{c_1}{1 + a_c(K_1 - K_c)} + \frac{c_2}{1 + a_c(K_2 - K_c)} = 1,$$

$$\frac{c_1}{1 + b_c(\mu_1 - \mu_c)} + \frac{c_2}{1 + b_c(\mu_2 - \mu_c)} = 1.$$

Эффективные упругие характеристики двухфазного гетерогенного материала (c^*) нетрудно найти из условия

$$(7) \quad \langle \sigma \rangle = c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2,$$

где σ_1 и σ_2 — тензоры средних напряжений по объемам гетерогенного материала, занятым первой и второй фазой соответственно. Равенство (7) при выполнении обобщенного закона Гука может быть переписано в следующем эквивалентном виде:

$$(8) \quad c^* : \langle \varepsilon \rangle = c^{(1)} : \varepsilon_1 c_1 + c^{(2)} : \varepsilon_2 c_2.$$

Из этого уравнения с учетом разложений $c^{(1)} = 3K_1 V + 2\mu_1 D$, $c^{(2)} = 3K_2 V + 2\mu_2 D$, $c^* = 3K^* V + 2\mu^* D$ и выражения (3) находим

$$(9) \quad K^* = \frac{K_1 c_1}{1 + a_c(K_1 - K_c)} + \frac{K_2 c_2}{1 + a_c(K_2 - K_c)},$$

$$\mu^* = \frac{\mu_1 c_1}{1 + b_c(\mu_1 - \mu_c)} + \frac{\mu_2 c_2}{1 + b_c(\mu_2 - \mu_c)}.$$

Эффективный объемный модуль K^* и сдвиговой модуль μ^* полностью характеризуют упругие свойства изотропного гетерогенного материала.

Выполняя тождественные преобразования в равенствах (9), с учетом (4) и (6) находим выражения для объемного и сдвигового модулей:

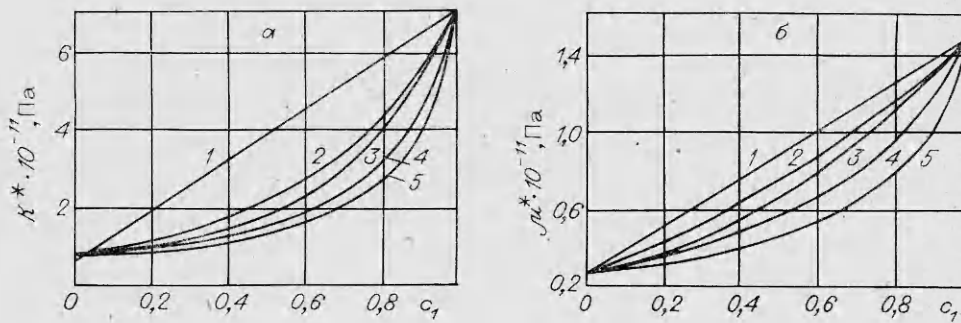
$$(10) \quad K^* = \langle K \rangle - \frac{c_1 c_2 (K_1 - K_2)^2}{\frac{4}{3} \mu_c + c_1 K_2 + c_2 K_1},$$

$$\mu^* = \langle \mu \rangle - \frac{c_1 c_2 (\mu_1 - \mu_2)^2}{\frac{\mu_c (9K_c + 8\mu_c)}{6(K_c + 2\mu_c)} + c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1}.$$

Здесь $\langle K \rangle$ и $\langle \mu \rangle$ — средние значения объемного и сдвигового модулей упругости гетерогенного материала: $\langle K \rangle = c_1 K_1 + c_2 K_2$, $\langle \mu \rangle = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2$.

Выражения (10) совпадают с формулами обобщенного сингулярного приближения [2], из которых могут быть получены многие известные решения, если рассматривать характеристики тела сравнения в качестве варьируемых параметров. При этом с изменением характеристик тела сравнения получаемые решения приводятся к виду, соответствующему различным физическим моделям гетерогенного материала. Так, если положим $K_c = K^*$ и $\mu_c = \mu^*$, приходим к самосогласованному решению [3], присущему симметричным статистическим системам с взаимопроницающими компонентами. Предложенное выше решение является ничем иным, как обобщением этого подхода за счет одновременного использования уравнений аддитивности для усредненных полей микродеформаций и микронапряжений. Кроме того, как показано в [2], полагая $K_c = 0$, $\mu_c = 0$ и $K_c = \infty$, $\mu_c = \infty$, получим нижнюю и верхнюю границы эффективных характеристик, отвечающих простейшим моделям гетерогенного материала с однородным распределением напряжений и деформаций:

$$\langle K^{-1} \rangle^{-1} \leq K^* \leq \langle K \rangle, \quad \langle \mu^{-1} \rangle^{-1} \leq \mu^* \leq \langle \mu \rangle.$$



Далее, если положим $K_c = K_1$, $\mu_c = \mu_1$ и $K_c = K_2$, $\mu_c = \mu_2$, найдем вариационные границы Хашина—Штрикмана [4]:

$$K_1 + \frac{c_2(K_2 - K_1)}{1 + c_1 a_1(K_2 - K_1)} \leq K^* \leq K_2 + \frac{c_1(K_1 - K_2)}{1 + c_2 a_2(K_1 - K_2)},$$

$$\mu_1 + \frac{c_2(\mu_2 - \mu_1)}{1 + c_1 b_1(\mu_2 - \mu_1)} \leq \mu^* \leq \mu_2 + \frac{c_1(\mu_1 - \mu_2)}{1 + c_2 b_2(\mu_1 - \mu_2)},$$

где $K_2 > K_1$ и $\mu_2 > \mu_1$.

Как отмечено в [2], эти выражения, соответствующие граничным значениям упругих характеристик, могут быть использованы для отыскания эффективных упругих характеристик матричных систем.

Наконец, при $K_c = \langle K \rangle$ и $\mu_c = \langle \mu \rangle$ формулы (10) переходят в выражения, отвечающие полученным в рамках методов сингулярного приближения [2] сильной изотропии [5], условных моментов [6] и предельной локальности [7]. Это еще раз подчеркивает эквивалентность физических моделей, соответствующих различным математическим решениям.

Иллюстрацией применения полученных выше соотношений служат приведенные на рисунке результаты расчета концентрационных зависимостей объемного (а) и сдвигового (б) модулей упругости композита W—Al при различных характеристиках тела сравнения: 1 — $K_c = \infty$, $\mu_c = \infty$; 2 — $K_c = K_1$, $\mu_c = \mu_1$; 3 — $K_c = K^*$, $\mu_c = \mu^*$; 4 — $K_c = K_2$, $\mu_c = \mu_2$; 5 — $K_c = 0$, $\mu_c = 0$. Как видно из рисунка, в зависимости от выбора физической модели материала (путем задания соответствующих характеристик тела сравнения) ход концентрационных кривых оказывается существенно различным. При этом обращает на себя внимание зависимость упругих свойств от объемного содержания в композите вольфрама (c_1), полученная для модели материала в виде статистической системы геометрически равноправных фазовых составляющих ($K_c = K^*$, $\mu_c = \mu^*$). При малой объемной концентрации вольфрама, когда эта равноправность не проявляется, рассчитанные значения близки к соответствующим для системы с алюминиевой матрицей (кривая 4). Тогда как при $c_1 \rightarrow 1$ вольфрам, очевидно, становится матричной фазой, что и отражается на графике в сближении кривых 2 и 3.

В случае гетерогенных материалов, содержащих включения эллипсоидальной или цилиндрической формы, схема расчета эффективных упругих характеристик не изменяется. Однако при этом следует учитывать, что тензор Эшелби не будет характеризоваться двумя константами, как, между прочим, и тензор эффективных упругих характеристик гетерогенной системы. Так, для волокнистого композиционного материала матрица модулей упругости содержит пять независимых постоянных. В соответствии с равенствами (2) и (8) тензор эффективных модулей упругости найдется из соотношения

$$c^* = \sum c_i c^i : \{ \mathbf{I} + \mathbf{N} : [(c^c)^{-1} : c^{(i)} - \mathbf{I}] \}^{-1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций.— М.: ИЛ, 1963.
2. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред.— М.: Наука, 1977.
3. Hill R. Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles/J. Mech. Phys. Solids.— 1963.— V. 11, N 5. Рус. пер. // Механика: Сб. пер.— 1964.— № 5.
4. Hashin Z., Shtrikmen S. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity/J. Mech. Phys. Solids.— 1962.— V. 10, N 4.
5. Болотин В. В., Москаленко В. Н. К расчету макроскопических постоянных сильно изотропных композиционных материалов//Изв. АН СССР. МТТ.— 1969.— № 3.
6. Хорошун Л. П., Маслов Б. П. Методы автоматизированного расчета физико-механических постоянных композиционных материалов.— Киев: Наук. думка, 1980.
7. Волков С. Д., Ставров В. П. Статистическая механика композитных материалов.— Минск: БГУ, 1978.

г. Свердловск

Поступила 15/VIII 1988 г.

УДК 519.6:532,5

В. М. Белолипецкий, В. Ю. Костюк

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЦИРКУЛЯЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ В ТРЕХМЕРНОЙ КАВЕРНЕ

Рассматривается задача о течении вязкой несжимаемой жидкости в трехмерной полости, иницируемом движущейся верхней крышкой. Численное решение уравнений Навье — Стокса ищется на сетке с разнесенными скоростями в переменных векторный потенциал — вихрь. Численно получены новые структуры — угловые вихри и вихри типа Тейлора — Гертлера, присущие трехмерным течениям. Исследована зависимость характера течения от числа Рейнольдса Re и от отношения ширины полости к глубине.

Пространственные эффекты в ряде случаев могут существенно влиять на картину течения несжимаемой жидкости. Поэтому решения, полученные при использовании двумерных приближений, значительно отличаются от экспериментальных данных. Типичный пример — задача о течении вязкой несжимаемой жидкости в трехмерной полости с подвижной верхней крышкой. Применение двумерных уравнений Навье — Стокса предполагает, что ширина полости L (рис. 1) много больше ее глубины H . В известных экспериментах [1, 2] отношение ширины к глубине выемки изменялось от 1 до 3. Наличие торцевых стенок и ограниченность ширины выемки вызывают значительную перестройку течения в сравнении с плоским случаем. В [3, 4] выполнены численные расчеты течений вязкой жидкости в кубической каверне с помощью псевдоспектрального и неявного многосеточного методов.

Постановка задач о течении жидкости в дву- и трехмерной выемках с движущейся крышкой. Для тестирования различных численных алгоритмов типичной является задача о двумерном течении жидкости в полости прямоугольного сечения с движущейся крышкой [5, 6]. Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольной области длиной B и глубиной H . В начальный момент времени жидкость покоится, а верхняя крышка приводится в движение с постоянной скоростью u_0 . На границах каверны задаются условия прилипания. Требуется определить картину стационарного ламинарного течения в зависимости от Re .

Для течений в трехмерной каверне задача ставится следующим образом. Решение ищется в области D (рис. 1):

$$D = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq B, 0 \leq y \leq H, 0 \leq z \leq L\}.$$

Подвижная крышка ($y = 0$) движется справа налево. Граничные условия: $u(x, 0, z) = 1$, $v(x, 0, z) = w(x, 0, z) = 0$ при $y = 0$; на остальных границах составляющие вектора скорости u , v , w равны нулю. Начальные условия выбираются либо как покой ($u = v = w = 0$), либо используются значения искомых параметров при некотором меньшем Re .

Описание алгоритма расчета. В данной работе для изучения течений вязкой несжимаемой жидкости уравнения записываются в переменных векторный потенциал — вихрь. Применяется численный алгоритм, кото-