

РАЗЛЕТ ПЛОСКОГО СЛОЯ ГАЗА ПРИ ПОСТЕПЕННОМ
ВЫДЕЛЕНИИ ЭНЕРГИИ

И. В. Немчинов

(Москва)

Рассматривается неадиабатический разлет в вакуум плоского слоя газа заданной массы M при учете постепенного выделения в нем энергии по закону $\varphi(t) f(m)$, где φ и f — произвольные функции своих аргументов (времени t и лагранжевой координаты m). Показывается, что при некоторых начальных профилях распределения параметров переменные разделяются. Проводится решение обыкновенных дифференциальных уравнений для определения зависимости характерных давления, плотности и скорости от времени для первоначально покоящегося холодного газа. Находится асимптотический степенной закон изменения параметров, устанавливающийся при длительном по сравнению с характерным газодинамическим временем энерговыделения (для постоянного по времени выделения энергии давление $p \sim 1/\sqrt{t}$, плотность $\rho \sim 1/t\sqrt{t}$ и скорость $u \sim \sqrt{t}$). Находится распределение параметров по слою газа (скорость линейно зависит от расстояния). Определяется импульс, действующий на твердую поверхность, ограничивающую слой газа с одной стороны за время выделения энергии и время последующего адиабатического или изотермического разлета.

1. Рассмотрим неадиабатический разлет в вакуум плоского слоя газа заданной массы M (на единицу поверхности) при учете постепенного выделения энергии в каждой частице.

Пусть энергия выделяется по закону $\varphi(t) f(m)$, где φ и f — произвольные функции своих аргументов: времени t и лагранжевой «массовой» координаты m . Система уравнений, описывающих такое движение газа, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial m} = \dot{v}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial e}{\partial t} + p \frac{\partial V}{\partial t} = \varphi(t) f(m) \dot{Q} \quad (1.1)$$

Здесь u — скорость газа, p — давление, $V = 1/\rho$ — удельный объем (ρ — плотность), e — внутренняя энергия единицы массы газа. Считаем газ идеальным с постоянным показателем адиабаты κ , поэтому $e(\kappa - 1) = pV$. Будем искать такое автомодельное решение системы (1.1), когда переменные разделяются («регулярный режим»)

$$u = u_* u^0(\tau) U(\mu), \quad V = V_* V^0(\tau) v(\mu), \quad p = p_* p^0(\tau) P(\mu) \quad (1.2)$$

$$\mu = m/m_*, \quad \tau = t/t_*$$

Здесь размерные константы u_* , p_* , t_* пока не определены; размерную константу V_* положим равной $1/\rho_0$, где ρ_0 — начальная плотность у твердой стенки, и m_* положим равной заданной массе слоя M .

Тогда система (1.2) преобразуется к виду (индексы 0 у переменных опустим)

$$\frac{du}{d\tau} = ap, \quad \frac{dV}{d\tau} = b\dot{u}, \quad V \frac{dp}{d\tau} + \kappa p \frac{dV}{d\tau} = c\varphi(\tau) \quad (1.3)$$

$$\frac{dP}{d\mu} = -U, \quad \frac{dU}{d\mu} = v, \quad Pv = f(\mu) \quad (1.4)$$

$$a = \frac{p_* t_*}{u_* m_*}, \quad b = \frac{u_* t_*}{v_* m_*}, \quad c = \frac{Q_* t_* (\kappa - 1)}{p_* V_*} \quad (1.5)$$

постоянная Q_* с размерностью энергии на единицу массы в единицу времени предполагается заданной.

Если в начальный момент времени холодный газ покоится, то начальными данными системы (1.3) будут

$$u = 0, \quad p = 0, \quad V = \Omega, \quad \Omega v(1) = 1 \quad (1.6)$$

Граничные условия (1.4) имеют вид

$$P(0) = 0, \quad U(1) = \frac{dP}{dt}(1) = 0, \quad P(1)v(1) = f(1) \quad (1.7)$$

2. Пусть закон выделения энергии по времени имеет степенной вид

$$\varphi(\tau) = \tau^\lambda$$

Тогда система (1.3) среди своих решений имеет решения вида

$$u = A\tau^\alpha, \quad V = B\tau^\beta, \quad p = C\tau^\gamma \quad (2.1)$$

где показатели степени определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \alpha - 1 = \gamma, \quad \beta - 1 = \alpha, \quad \beta + \gamma - 1 = \lambda, \quad \beta = \gamma + 2 \\ 2\gamma = \lambda - 1, \quad 2\alpha = \lambda + 1, \quad 2\beta = \lambda + 3 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Как легко видеть, давление p падает по времени при $\lambda < 1$, но импульс, определяемый выражением

$$I = P(1)p_*t_*J(\tau), \quad J(\tau) = \int_0^\tau p^\circ(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

растет при $\lambda > -1$, что соответствует конечному полному количеству энергии за любой конечный интервал времени.

Выберем теперь константы разделения a , b и c такими, чтобы в выражении (2.1) константы A , B и C равнялись единице. Для этого должны соблюдаться соотношения

$$a = \alpha, \quad b = \beta, \quad c = \gamma + \kappa\beta \quad (2.4)$$

Найдем теперь p_* , u_* и t_* из (1.5) и (2.4)

$$\begin{aligned} Q_*(\kappa - 1)t_*^3 &= V_*^2 m_* \alpha \beta (\gamma + \kappa\beta) \\ (\gamma + \kappa\beta)^2 V_* p_*^3 &= Q_*^2 (\kappa - 1) \alpha \beta \\ \alpha u_*^2 &= \beta p_* V_* \end{aligned} \quad (2.5)$$

Далее будем рассматривать случай, когда энергия E выделяется равномерно в течение времени T и $Q_* MT = E$.

Тогда $\lambda = 0$. Следовательно,

$$a = \alpha = \frac{1}{2}, \quad b = \beta = \frac{3}{2}, \quad \gamma = -\frac{1}{2}, \quad 2c = 3\kappa - 1 \quad (2.6)$$

$$p_* = \left(\frac{3E^2(\kappa - 1)^2}{V_* T^2 (3\kappa - 1)^2} \right)^{1/3}, \quad t_* = \frac{M}{2} \left(\frac{3V_*^2 T (3\kappa - 1)}{E(\kappa - 1)} \right)^{1/3}$$

При $V_* \rightarrow 0$, когда $L = MV_* \rightarrow 0$ величина $p_* \rightarrow \infty$ и $t_* \rightarrow 0$.

Легко видеть также, что $t_*/T \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$, т. е. в этих случаях степенной закон (2.1) имеет место практически с самого начала процесса разлета.

Интересно отметить, что p_* согласно (2.6) не зависит от массы слоя M .

Сочетание (2.6) с (2.1) приводит к

$$\begin{aligned} p &= p^* p^\circ(\tau) P(\mu) = P(\mu) \sqrt{\frac{3EM(\kappa-1)}{2Tt(3\kappa-1)}} \\ V &= V_* V^\circ(\tau) v(\mu) = v(\mu) \sqrt{\frac{8E(\kappa-1)t^3}{3M^3(3\kappa-1)}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Как легко видеть, в (2.7) не входит V_* и если совершенно исключить V_* из числа определяющих параметров, то $V(0) \neq 1/v(1)$.

Укажем, что помимо автомодельности типа разделения переменных имеет место широкий класс автомодельных задач типа m/t^n при уравнении энергии (1.1), когда $\varphi(\tau)$ — степенная функция своего аргумента.

Например, автомодельна задача о волне разрежения газа в вакуум, край которой бежит по неподвижному газу постоянной плотности, причем газ подогревается равномерно на единицу массы как в области движения газа, так и в области неподвижной области по закону τ^λ . При этом $2n = \lambda + 3$. Если энергия выделяется равномерно по массе и во времени, то в области неподвижного газа давление равномерно повышается по закону

$$V_* p = (\kappa - 1) \frac{Et}{MT}$$

Край волны разрежения, движущийся со скоростью звука (увеличивается $\sim \sqrt{t}$) по следующему закону

$$x = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\kappa E t^3 (\kappa - 1)}{MT}}$$

в момент времени t_i достигает границы слоя $L = MV_*$. В этот момент времени размерное давление на границе с твердой поверхностью

$$p_i = \left(\frac{9E^2(\kappa-1)^2}{4\kappa V_*^2 T^2} \right)^{1/3}, \quad t_i = \frac{M}{2} \left(\frac{18TV_*^2}{\kappa(\kappa-1)E} \right)^{1/3}$$

из сравнения с (2.6) ясно, что

$$\frac{t_i}{t_*} = \left(\frac{6}{\kappa(3\kappa-1)} \right)^{1/3}, \quad \frac{p_i}{p_*} = \left(\frac{3(3\kappa-1)^2}{4\kappa} \right)^{1/3}$$

Таким образом, при $\kappa = 7/5$ безразмерный момент времени $\tau_i = 1,34$, $p_i = 1,76 p_*$.

Из приведенных выражений становится ясным физический смысл характерных размерных величин p_* и t_* в автомодельной задаче с разделяющимися переменными.

Запишем вместо системы (1.3) одно уравнение для V

$$V \frac{d^3 V}{d\tau^3} + \kappa \frac{dV}{d\tau} \frac{d^2 V}{d\tau^2} = ab c \varphi(\tau) \quad (2.8)$$

$$u = \frac{1}{b} \frac{dV}{d\tau}, \quad p = \frac{d^2 V}{d\tau^2} \frac{1}{ab} \quad (2.9)$$

Пусть $\varphi(\tau) = 1$. При малых временах τ будем искать решение (2.8) в виде ряда, причем в силу граничных условий (1.6) и зависимости (2.9) u , p от V ясно, что члены порядка τ и τ^2 отсутствуют. Следовательно, ряд имеет вид

$$V = \Omega + D\tau^3 - F\tau^k + \dots \quad (k > 3) \quad (2.10)$$

Из элементарных групповых соображений следует, что решение (2.8) имеет вид

$$V = \Omega \chi(\tau / \Omega^{3/2})$$

Поэтому в дальнейшем положим для удобства $\Omega = 1$. При $\tau \rightarrow \infty$ решение не зависит от Ω , так как $V = \tau^{3/2}$.

Подставляя (2.10) в (2.8), легко находим, что

$$6D = abc, \quad k = 6, \quad 20F = D^2(1 + 3\kappa) \quad (2.11)$$

Подставляя (2.10) в (2.9) с учетом (2.11), находим зависимость p , u и V от τ при малых временах τ

$$\begin{aligned} V &= 1 + \frac{1}{16}(3\kappa - 1)\tau^3 \left[1 - \frac{1}{360}(9\kappa^2 - 1)\tau^3 + \dots \right] \\ u &= \frac{1}{8}(3\kappa - 1)\tau^2 \left[1 - \frac{1}{160}(9\kappa^2 - 1)\tau^3 + \dots \right] \\ p &= \frac{1}{2}(3\kappa - 1)\tau \left[1 - \frac{1}{64}(9\kappa^2 - 1)\tau^3 + \dots \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

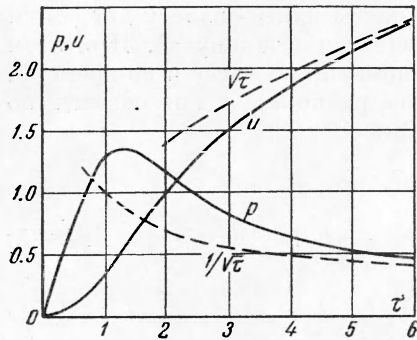
На фигуре показаны результаты численного расчета системы (1.3) с начальными данными (1.6) при $\kappa = 7/5$, т. е. при $c = 8/5$ ($\Omega = 1$). Заметим, что наличие группы позволяет дважды понизить порядок уравнения (2.8).

Зависимость безразмерного импульса J от времени имеет такой же вид, как и скорости: $J = 2u$.

Согласно (2.12) давление имеет максимум в точке

$$\tau_m = \frac{16\Omega^{2/3}}{9\kappa^2 - 1}$$

При $\kappa = 7/5$ в точке $\tau_m = 0,99$ параметры имеют согласно (2.12) следующие значения: $p = 1.19$ (1.28), $u = 0.34$ (0.36), $V = 1.14$ (1.18).



Фиг. 1

В скобках указаны значения по численному расчету. Как видно из сопоставления значений параметров, формулами (2.11) можно пользоваться вплоть до значений времени $\tau \approx 1$.

Из фигуры видно, что, начиная с безразмерного времени $\tau = 1.30$, давление падает, причем закон падения близок к $1/\sqrt{\tau}$. В этот момент максимума давления $p = 1.36$ (1.14), $u = 0.563$ (0.769), $V = 1.39$ (1.48) (в скобках указаны значения по формулам (2.1) с учетом (2.4)).

К моменту времени $\tau = 8$, при котором $p = 0.385$ (0.354), $u = 2.83$ (2.83), $V = 23.0$ (22.6), имеет место весьма хорошее совпадение параметров по численному расчету и асимптотическому степенному закону (2.1) или (2.7) для больших значений V .

Таким образом, если задать автомоделный профиль распределения параметров газа по массе, то за характерное газодинамическое время порядка t_* закон изменения характерных величин становится близким к степенному закону (2.1). Можно ожидать, что за время такого же порядка установится и профиль распределения параметров в газе, близкий к автомоделному, даже если в начальный момент он отличался от автомоделного, как это имеет место, например, в задаче о коротком ударе [1-3]. Конечно, этот вопрос может быть решен более точно лишь путем численного расчета системы (1.1) так же, как это было сделано в [3].

Замечание. Можно показать, что профили распределения параметров в автомоделной задаче о волне разрежения в вакуум при равномерном подогреве и в задаче о регулярном режиме разлета близки по характеру в момент подхода края волны разрежения к твердой поверхности (с этого момента процесс нагрева и повышения давления конкурирует с процессом разлета и понижения давления; переход от одного автомоделного режима к другому обычно происходит весьма быстро).

Укажем, что близкую к задаче о регулярном режиме разлета рассматривал К. П. Станюкевич [4], предполагая малыми перепады давления, что приближенно имеет место при метании газом тяжелых тел (большой массы), а не при истечении в пустоту или метании легких пластин (малой массы).

3. Если время выделения энергии T велико по сравнению с характерным газодинамическим временем t_* , т. е. $\tau_0 \gg 1$, то, так как импульс давления растет по времени и в основном набирается за времена порядка T , можно, пренебрегая начальным участком, использовать для определения импульса на твердую поверхность, ограничивающую массу газа с одной стороны, закон $p \sim 1 / \sqrt{\tau}$. К моменту окончания энергодвыделения этот импульс будет равен

$$I = P(1) p_* t_* 2 \sqrt{\tau_0} = 2P(1) p_* \sqrt{T t_*} \quad (3.1)$$

Используя (2.6), находим, что импульс зависит от полной выделившейся энергии E и массы слоя газ M с точностью до коэффициента таким же образом, как и в случае мгновенного равномерного выделения энергии и последующего адиабатического разлета [4] (коэффициент $P(1)$ зависит от закона распределения энергии по слою газа, но для заданного закона, например равномерного, постоянен, причем не зависит от κ).

$$I = P(1) \sqrt{2EM \frac{3(\kappa-1)}{3\kappa-1}} \quad (3.2)$$

Для случая равномерного выделения, т. е. когда $f = 1$, систему (1.4) легко проинтегрировать. Функция f отнормирована так, что

$$\int_0^1 f(\mu) d\mu = 1$$

Действительно, при $f = 1$ система (1.4) сводится к

$$\frac{dP}{d\mu} = -U, \quad P \frac{dU}{d\mu} = 1 \quad \text{или} \quad PU \frac{dU}{dP} = -1 \quad (3.3)$$

что при граничных условиях (1.7) дает

$$P = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{U^2}{2}\right), \quad 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{-U}{\sqrt{2}}\right) = \mu \quad (3.4)$$

где $\operatorname{erf}(x)$ — интеграл вероятности.

Таким образом, коэффициент $P(1) = \sqrt{2/\pi}$ и импульс

$$I = \xi(\kappa) \sqrt{2EM}, \quad \xi(\kappa) = \sqrt{\frac{6(\kappa-1)}{\pi(3\kappa-1)}} \quad (3.5)$$

причем значения коэффициента $\xi(\kappa)$ приведены во второй строке табл. 1

Таблица 1

κ	1	6/5	4/3	7/5	5/3	3	∞
$\xi(\kappa)$	0	0.383	0.460	0.489	0.565	0.691	0.798
	0	0.289	0.354	0.378	0.447	0.577	0.707
	0.799			0.825	0.839	0.865	—

В предпоследней строке таблицы приведен коэффициент $\xi(\kappa)$ в аналогичной формуле для импульса, возникающего при разлете мгновенно и равномерно нагретого слоя газа с момента начала разлета до момента, когда край волны разрежения не достигнет твердой поверхности (этот коэффициент элементарно вычисляется, он равен $\sqrt{(\kappa-1)/2\kappa}$). Как видно, эти коэффициенты близки.

Введем безразмерную пространственную координату x по соотношению $dx = Vd\mu$. Тогда из (1.4) легко видно, что скорость линейно распределена по пространству. Это позволяет для расчета адиабатического разлета газа, следующего за разлетом с подогревом, начиная с момента выключения источника энергии, воспользоваться решением, найденным в [5] и изложенным в [6].

При адиабатическом разлете (энтропия частиц может быть различной) уравнения движения имеют тот же вид, что и в (1.1), а уравнение энергии принимает вид

$$\frac{\partial \ln pV^\kappa}{\partial t} = 0 \quad (3.6)$$

Будем вновь искать решение, когда переменные разделяются в том же виде, как и выше, с теми же значениями размерных и безразмерных констант. Вместо последних уравнений системы (1.3) и (1.4) будем иметь

$$p_0 V_0^\kappa = pV^\kappa, \quad P v^\kappa = \chi(\mu) \quad (3.7)$$

Постоянные p_0 , V_0 и произвольная функция $\chi(\mu)$ находятся из начальных данных (в момент τ_0). Используя (3.7) и первые два уравнения (1.3), получим уравнение

$$u \frac{du}{d\omega} \omega^\kappa = \frac{a}{b} p_0 V_0, \quad \omega = \frac{V}{V_0} \quad (3.8)$$

решение которого имеет вид

$$u^2 = u_\infty^2 - \frac{2}{\kappa-1} \frac{a}{b} p_0 V_0 \omega^{1-\kappa} \quad (3.9)$$

Импульс за время адиабатического разлета J_s легко найти из следующего соотношения, получающегося при использовании (2.8):

$$J_s = \int_{\tau_0}^{\infty} p(\tau) d\tau = \frac{1}{a} (u_\infty - u_0) \quad (3.10)$$

Если момент времени окончания энерговыделения τ_0 столь велик, что можно пользоваться степенным законом изменения во времени, то

$$u_\infty = u_0 \sqrt{1 + \frac{2}{3(\kappa-1)}} \quad (3.11)$$

$$J_s + J_0 = J_0 \frac{u_\infty}{u_0} = \sqrt{\frac{6(\kappa-1)}{\pi(3\kappa-1)}} \sqrt{\frac{3\kappa-1}{3(\kappa-1)}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Здесь J_s — импульс за время адиабатического разлета, который находится из (3.10) и (3.11) и J_0 — импульс за время разлета с подогревом.

Интересно, что коэффициент в законе (3.6) для полного импульса в автомоделной задаче за все время адиабатического и неадиабатического разлета не зависит от κ . В последней строке табл. 1 приведен коэффициент в аналогичной формуле [4] для импульса при разлете мгновенно нагретого слоя газа за все время до момента подхода края волны разрежения к твердой поверхности и в течение отражения центрированной волны разрежения. Вместо отсутствующего в работе [4] и табл. 1 коэффициента для $\kappa = 6/5 = 1.20$ может быть взят коэффициент для близкого значения $\kappa = 11/9 = 1.22$, равный 0.816.

Таким образом, импульс при постепенном выделении энергии в слое заданной массы газа пропорционален импульсу при мгновенном выделении энергии при тех же значениях полной выделившейся энергии E и массе слоя M и в автомоделной задаче весьма близок к нему по численной величине.

Сравним получающийся импульс с импульсом при выделении энергии в процессе детонации плоского слоя ВВ. Импульс при отражении детонационной волны в предположении $\kappa = 3$ был найден [7] и оказался равным $8MD/27$, где D — скорость детонации. Импульс слоя ВВ был измерен экспериментально [8] и оказалось [9], что он удовлетворительно описывается этой же расчетной формулой, если в нее подставлять экспериментальное значение скорости детонации. Если бы уравнение состояния ВВ строго описывалось бы политропическим законом с показателем $\kappa = 3$, то

$$I = \frac{8}{27} MS \sqrt{2q} = \frac{8}{27} S \sqrt{2EM}, \quad S = \frac{D}{\sqrt{2q}} = \sqrt{\kappa^2 - 1} = \sqrt{8} \quad (3.12)$$

где $q = \sqrt{E/M}$ — калорийность единицы массы ВВ. Следовательно,

$$S = 2.828, \quad \xi(x) = 0.838$$

т. е. немного меньше, чем при мгновенном выделении энергии (0.865); но больше, чем при равномерном постепенном выделении (0.799). Реально при взрыве ВВ $S \neq \sqrt{8}$ и зависит от вида ВВ и плотности его заряжения ρ_0 . Например, для тротила при $\rho_0 = 1.5 \text{ г/см}^3$, калорийности $1 \text{ ккал/г} = 4.18 \cdot 10^{10} \text{ эрг/г}$ и скорости детонации $6.61 \cdot 10^5 \text{ см/сек}$ коэффициент $S = 2.29$ и $\xi = 0.679$.

Как видно, все коэффициенты близки один к другому и к единице. Если бы вся энергия, полученная данной частицей, не перераспределяясь в процессе разлета, полностью переходила в кинетическую энергию, то

$$I = \int_0^M u_\infty dm = \int_0^M \sqrt{2 \frac{de}{dm}} dm \quad (3.13)$$

и при равномерном выделении энергии коэффициент ξ точно равнялся бы единице $I = \sqrt{2EM}$. Следовательно, перераспределение энергии по частицам в процессе разлета хотя и имеет место, но не столь велико, чтобы оказать существенное влияние на импульс.

4. Оценим влияние различных видов распределения энергии по слою газа, т. е. различных $f(\mu)$. Уравнение (1.4) легко сводится к одному нелинейному уравнению для P

$$P \frac{d^2 P}{d\mu^2} = f(\mu), \quad P(0) = \frac{dP}{d\mu}(1) = 0 \quad (4.1)$$

которое необходимо для каждого $f(\mu)$ считать отдельно. Используем метод последовательных приближений

$$P^{(n)} \frac{d^2 P^{(n+1)}}{d\mu^2} = -f(\mu) \quad (4.2)$$

причем в нулевом приближении ($n = 0$) положим

$$P^0(\mu) = \frac{1}{2} P^{(1)}(1)$$

Тогда, используя условие нормировки, получим

$$\frac{1}{2} P^{(1)}(1) \frac{dP^{(1)}(\mu)}{d\mu} = - \int_0^\mu f(\mu) d\mu + 1, \quad P^{(1)}(1) P^{(1)}(\mu) = 2 \left[\int_0^\mu \int_0^1 f(\xi) d\xi d\mu \right]$$

Следовательно, искомое значение давления на поверхности твердого тела в первом приближении равно

$$[P^{(1)}(1)]^2 = 2 \int_0^1 \int_0^1 f(\xi) d\xi d\mu \quad (4.4)$$

Проверим быстроту сходимости последовательных приближений на случае равномерного выделения энергии, т. е. $f(\mu) = 1$, когда известно точное значение $P(1) = \sqrt{2/\pi} = 0.799$. В первом приближении $P^{(1)}(1) = 1$, т. е. отличается от точного на +25%. Во втором приближении

$$P^{(2)}(\mu) = \ln \frac{2}{2-\mu} + \frac{\mu}{2} \ln \frac{\mu}{2-\mu} \quad (4.5)$$

Согласно (4.5) давление $P^{(2)}(1) = \ln 2 = 0.693$, т. е. отличается от точного на -15%. Среднеарифметическое по двум приближениям 0.846 отличается от точного на +6%.

Если имеет место экспоненциальный закон выделения энергии

$$f(u) = W e^{-\delta u}, \quad W = \delta [1 - e^{-\delta}]^{-1} \quad (4.6)$$

то в первом приближении

$$[P^{(1)}(1)]^2 = 2 \left[\frac{1}{\delta} - \frac{1}{e^{\delta} - 1} \right] \quad (4.7)$$

и при $\delta \rightarrow \infty$ величина $P^{(1)}(1) \rightarrow \sqrt{2/\delta}$, т. е. в создании импульса как бы участвует лишь масса $2M/\delta$ с равномерно распределенной энергией E . При $\delta \gg 1$ могут иметь место эффекты типа «короткого удара» [1-3] из-за перераспределения энергии по частицам ударной волной. При $\delta \rightarrow 0$, когда распределение близко к равномерному, получаем естественный результат $P^{(1)}(1) \rightarrow 1$.

5. Пусть, начиная с некоторого момента времени, когда $p = p_0$, $V = V_0$, $u = u_0$, имеет место не адиабатический, а изотермический разлет газа. Заметим, что при этом полная внутренняя энергия массы газа не изменяется, а кинетическая энергия растет. Тогда вместо последнего из уравнений (1.3) имеет место соотношение $pV = p_0V_0$, а первые два уравнения (1.3) можно записать в виде

$$u \frac{du}{d\omega} - \frac{a}{b} p_0 V_0 \frac{1}{\omega}, \quad \omega = \frac{V}{V_0} \quad (5.1)$$

$$u^2 - u_0^2 = 2 \frac{a}{b} p_0 V_0 \ln \omega \quad (5.2)$$

Отсюда для функции и получаем уравнение

$$\frac{du}{d\tau} = a p_0 \exp \left[-\frac{u^2 - u_0^2}{2(a/b) p_0 V_0} \right] \quad (5.3)$$

Введем новую переменную η и константу G по соотношениям

$$\eta = \frac{u}{\sqrt{2(a/b) p_0 V_0}}; \quad G = \frac{\exp(-\eta_0^2)}{a p_0 \tau_0} \sqrt{2 \frac{a}{b} p_0 V_0} \quad (5.4)$$

Тогда (5.3) интегрируется в виде

$$G [Z(\eta) - Z(\eta_0)] = \frac{\tau}{\tau_0} - 1, \quad Z(\eta) = \int_0^{\eta} \exp \eta^2 d\eta \quad (5.5)$$

При малых η разность квадратов $\eta^2 - \eta_0^2 = (\eta + \eta_0)(\eta - \eta_0)$ можно приближенно положить равной $2\eta_0(\eta - \eta_0)$ и тогда можно получить следующее соотношение:

$$Z(\eta) - Z(\eta_0) = \int_0^{\eta} \exp(\eta^2 - \eta_0^2) d\eta \approx \frac{1}{2\eta_0} \{ \exp[2\eta_0(\eta - \eta_0)] - 1 \} \quad (5.6)$$

Функция $Z(\eta)$ табулирована [10] от $\eta = 0$ до $\eta = 2$. Если момент времени τ_0 столь велик, что уже имеет место $p_0 = \tau_0^{-1/2}$ и т. д., то

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1.225, \quad G = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \exp\left(-\frac{3}{2}\right) = 0.3642$$

Импульс за время изотермического разлета J_{τ} можно найти из соотношений (3.10) и (5.4)

$$J_{\tau} = \int_{\tau_0}^{\tau_{00}} p d\tau = 2 \sqrt{\tau_0} \left(\frac{\eta}{\eta_0} - 1 \right) \quad (5.7)$$

Таблица 2

η/η_0	1.224	1.306	1.388	1.469	1.633
τ/τ_0	1.66	2.07	2.62	3.40	6.18
ω	2.12	2.89	4.01	5.70	12.2
θ	0.953	0.911	0.857	0.796	0.657
λ	0.863	0.826	0.794	0.766	0.721
η/η_0	1.755	1.877	1.918	1.959	2.000
τ/τ_0	10.0	17.8	21.8	26.9	33.4
ω	22.7	44.3	55.8	70.8	90.2
θ	0.554	0.445	0.411	0.378	0.346
λ	0.693	0.670	0.663	0.657	0.650

В табл. 2 приведены значения отношения полного импульса $I_1 + I_0$ при изотермическом разлете, начиная с момента τ_0 и предшествующего импульса за время подогрева газа к импульсу I_0 , равного η/η_0 . Зависимость скорости и времени находилась по (5.5). Функция $Z(\eta)$ при значениях $\eta > 2$ определялась по асимптотической формуле для больших η

$$Z(\eta) \approx \frac{1}{2\eta} e^{\eta^2} \left[1 + \frac{1}{2\eta^2} + \frac{3}{4\eta^4} + \frac{15}{18\eta^6} \right] \quad (5.8)$$

Например, при $\eta = 2$ согласно (5.8) получаем $Z(2) = 16.40$, в то время как $Z(2) = 16.47$ по таблицам [10]. В предпоследней строке таблицы приведено отношение импульса с учетом изотермичности разлета, начиная с τ_0 до τ_{00} к импульсу, который имел бы место к моменту времени τ_{00} , если бы подогрев продолжался. Заметим, что к моменту времени τ_{00} при продолжающемся подогреве температура и полная энергия слоя выросли бы в отношении τ_{00}/τ_0 раз.

Из табл. 2 видно, что хотя импульс при изотермическом разлете и продолжает нарастать, но медленнее, чем если бы имел место продолжающийся подогрев газа.

В течение адиабатического разлета после окончания изотермического периода импульс также несколько возрастает. Используя (5.2) и (3.9), получим

$$\lambda = \frac{u_\infty \eta_0}{u_{00} \eta} = \sqrt{1 + \frac{2}{3(\kappa-1)} \left(\frac{\eta_0}{\eta} \right)^2} \quad (5.9)$$

Легко видеть, что при длительном периоде изотермичности, когда $u_{00} \gg u_0$ и $\omega \rightarrow \infty$, импульс при адиабатическом разлете практически не увеличивается, так как кинетическая энергия велика по сравнению с внутренней, переход которой в кинетическую в процессе адиабатического разлета уже не может значительно увеличить скорость газа и, следовательно, его импульс на твердую поверхность. Однако, увеличение скорости в процессе изотермического разлета, как это видно из табл. 2, происходит медленно. Поэтому адиабатический разлет следует учесть даже при большом отношении τ_{00}/τ_0 .

Таким образом, импульс при учете изотермического периода можно записать в виде

$$I = \sqrt{\frac{4}{\pi}} EM \theta \lambda, \quad \theta = \frac{\eta}{\eta_0} \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} \quad (5.10)$$

Здесь $\theta(\tau_{00}/\tau_0)$ — поправочный коэффициент, учитывающий изотермический период, и $\lambda(\tau_{00}/\tau_0, \kappa)$ находится по (5.9). Значение λ при $\kappa = 6/5$ приведено в последней строке табл. 2. Под энергией в (5.10) понимается энергия, которая выделилась бы в слое за все время до τ_{00} , если бы не было ограничения подогрева.

6. Пусть выделение энергии в частице не будет заданной функцией от времени, а зависит от самих параметров газа (давления и плотности) степенным образом. В этом случае уравнение энергии имеет вид

$$V \frac{\partial p}{\partial t} + \kappa p \frac{\partial V}{\partial t} = (\kappa - 1) Q p^r V^s \quad (6.1)$$

Разделение переменных вместо последних уравнений системы (1.3) и (1.4) и последнего из соотношений (1.5) (индекс опустим) приводит к

$$V \frac{dp}{d\tau} + \kappa p \frac{dV}{d\tau} = c p^r V^s \quad (6.2)$$

Система двух первых уравнений (1.3) и первого из уравнений (6.2) имеет степенное решение типа (2.1), причем по-прежнему $\beta = \gamma + 2$, но β и γ связаны соотношением

$$\beta + \gamma - 1 = \gamma r + \beta s \quad (6.3)$$

В частности, в случае объемного тормозного высвечивания $r = 1/2$ и $s = 1/2$, т. е. $\gamma = -1$, $\beta = 1$.

Истинная зависимость p от V на диаграмме (p, V) зависит от положения начальной точки (p_0, V_0) . Могут иметь место три предельных случая: быстрое понижение давления при неизменной плотности ρ (при малой скорости u); изменение давления при заданном законе $V(\tau)$, если скорость u велика и постоянна (инерционный разлет); почти адиабатическое изменение параметров.

Укажем, что автомодельна и задача о сильном взрыве с объемным высвечиванием по закону (6.1), причем s произвольна, но должно иметь место соотношение между r и v , а именно $2rv = 2 + 3v$, где $v = 1$ в плоском случае и $v = 3$ в сферическом случаях, т. е. при этом $r = 5/2$, $r = 11/6$ соответственно. Сохранение полной энергии при прозрачности области за фронтом ударной волны может обеспечиваться непрозрачностью области перед фронтом ударной волны (вся высвечиваемая энергия поглощается на фронте ударной волны).

Приношу благодарность С. А. Христановичу за интерес к работе, А. А. Милкстину, Е. М. Рабиновичу, Ю. П. Райзеру за ценные обсуждения ее результатов.

Поступила 17 I 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. З е л ь д о в и ч Я. Б. Движение газа под действием кратковременного давления удара. Акуст. ж., 1956, т. II, № 1, стр. 25—38.
2. А д а м с к и й В. Б. Интегрирование системы автомодельных уравнений в задаче о коротком ударе по холодному газу. Акуст. ж., 1956, т. II, № 1, стр. 3—9.
3. Ж у к о в А. И., К а ж д а н Я. М. О движении газа под действием кратковременного импульса. Акуст. ж., 1956, т. II, № 4, стр. 352—357.
4. С т а н ю к о в и ч К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. Гостехиздат, 1955.
5. С е д о в Л. И. Об интегрировании уравнений одномерного движения газа. ДАН СССР, т. XC, № 5, 1953, стр. 753.
6. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 4, Гостехиздат, 1957.
7. З е л ь д о в и ч Я. Б. и С т а н ю к о в и ч К. П. Об отражении плоской детонационной волны. ДАН СССР, 1947, т. 55, № 7, стр. 591.
8. П о х и л П. Ф. и С а д о в с к и й М. А. Импульс взрыва и его зависимость от формы и размеров заряда и свойств взрывчатого вещества. Сб. Физика взрыва, Изд-во АН СССР, 1952, № 1, стр. 148—160.
9. Б а у м Ф. А., С т а н ю к о в и ч К. П., Ш е х т е р Б. И. Физика взрыва. Физматгиз, 1959.
10. Я н к е Е. и Э м д е Ф. Таблицы функций. Изд. 3, Физматгиз, 1959, стр. 129.