УДК 538.4

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЙ ПОКОЯ ИДЕАЛЬНОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю. Г. Губарев, С. С. Ковылина*

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
* Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

Изучается задача линейной устойчивости состояний покоя идеальной сжимаемой среды с бесконечной проводимостью в магнитном поле. Прямым методом Ляпунова доказано, что эти состояния покоя неустойчивы по отношению к малым пространственным возмущениям, уменьшающим потенциальную энергию (в данном случае сумму внутренней энергии среды и энергии магнитного поля). Выведены двусторонние экспоненциальные оценки роста возмущений, причем показатели экспонент, содержащихся в этих оценках, вычисляются по параметрам состояний покоя и начальным данным для возмущений. Выделен класс наиболее быстрорастущих возмущений и найдена точная формула для определения скорости их нарастания. Построен пример состояний покоя и начальных возмущений, линейная стадия эволюции которых во времени протекает в соответствии с полученными оценками. С математической точки зрения результаты настоящей работы имеют априорный характер, поскольку теоремы существования решений исследуемых задач не доказаны.

1. Постановка точной задачи. Рассматриваются пространственные движения идеальной сжимаемой проводящей среды в магнитном поле [1]. Предполагается, что эти движения происходят в области τ с фиксированной идеально проводящей границей $\partial\tau$ и описываются следующими уравнениями [2]:

$$\rho D v_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{h_k}{4\pi}\Big(\frac{\partial h_i}{\partial x_k} - \frac{\partial h_k}{\partial x_i}\Big), \quad D\rho + \rho\,\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad D h_i = h_k\,\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - h_i\,\frac{\partial v_k}{\partial x_k},$$
$$\frac{\partial h_i}{\partial x_i} = 0, \quad Ds = 0, \quad D = \frac{\partial}{\partial t} + v_i\,\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad e = e(\rho, s), \quad de = T\,ds - pd\Big(\frac{1}{\rho}\Big). \tag{1.1}$$

Здесь ρ, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$, p, s, e, T — поля плотности, скорости, давления, энтропии, внутренней энергии и температуры; $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, h_3)$ — магнитное поле; $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — декартовы координаты; t — время. Если не оговорено особо, то по повторяющимся латинским индексам производится суммирование от 1 до 3.

Полагается, что на границе $\partial\tau$ выполняются условия непротекания

$$v_i n_i = 0, \qquad h_i n_i = 0, \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — единичная внешняя нормаль к $\partial\tau$. Второе из условий (1.2) означает, что магнитное поле целиком сосредоточено внутри области τ и за ее пределы не проникает.

Начальные данные для краевой задачи (1.1), (1.2) задаются в виде

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{v}^0(\boldsymbol{x}), \qquad \rho(\boldsymbol{x}, 0) = \rho^0(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{h}^0(\boldsymbol{x}), \qquad s(\boldsymbol{x}, 0) = s^0(\boldsymbol{x}). \tag{1.3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01771).

При этом функции $\rho^0(\boldsymbol{x})$ и $s^0(\boldsymbol{x})$ произвольные, а функция $\boldsymbol{h}^0(\boldsymbol{x})$ должна, с одной стороны, обращать в тождество четвертое уравнение системы (1.1), с другой — совместно с функцией $\boldsymbol{v}^0(\boldsymbol{x})$ гарантировать выполнение граничных условий (1.2). Принимаем, что все поля обладают достаточной степенью гладкости.

Следует отметить, что смешанная задача (1.1)–(1.3) представляет собой математическую модель плазменной установки, магнитная система которой обеспечивает идеальные условия удержания плазмы, непосредственно соприкасающейся с поверхностью кожуха. Исследование этой задачи необходимо для изучения более общей, но и более реалистичной с физической точки зрения задачи, моделирующей плазменную установку, в которой реализованы идеальные условия удержания плазмы, отделенной от кожуха (в соответствии с требованием термоизоляции) вакуумной прослойкой [3].

Непосредственные вычисления показывают, что на решениях начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) имеет место сохранение интеграла энергии

$$E_1 = K_1 + \Pi_1 = \mathrm{const}, \qquad 2K_1 = \int_\tau [\rho v_i v_i]\, d\tau,$$
$$\Pi_1 = \int_\tau \Big[\rho e(\rho, s) + \frac{1}{8\pi}\, h_i h_i\Big]\, d\tau, \qquad d\tau = dx_1\, dx_2\, dx_3. \tag{1.4}$$

Точные стационарные решения задачи (1.1)–(1.3)

$$\boldsymbol{v} = 0, \quad \rho = \rho_0(\boldsymbol{x}), \quad p = p_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_0(\boldsymbol{x}), \quad s = s_0(\boldsymbol{x}), \tag{1.5}$$

отвечающие состояниям покоя идеальной сжимаемой среды с бесконечной проводимостью в магнитном поле, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{1}{4\pi}\, h_{0k}\Big(\frac{\partial h_{0i}}{\partial x_k} - \frac{\partial h_{0k}}{\partial x_i}\Big) = \frac{\partial p_0}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial h_{0k}}{\partial x_k} = 0, \quad e = e_0(\rho_0, s_0), \quad p_0 = \rho_0^2\, \frac{\partial e}{\partial \rho}\,(\rho_0, s_0) \ \text{ в } \tau \tag{1.6}$$

и условию

$$h_{0i} n_i = 0 \quad \text{на} \quad \partial\tau. \tag{1.7}$$

Целью дальнейших исследований является доказательство неустойчивости состояний покоя (1.5)–(1.7) относительно малых пространственных возмущений.

2. Постановка линеаризованной задачи. Для достижения указанной выше цели проводится линеаризация начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) на точных стационарных решениях (1.5)–(1.7), в результате которой получаем систему уравнений движения

$$\rho_0\, \frac{\partial v_i'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{h_{0k}}{4\pi}\Big(\frac{\partial h_i'}{\partial x_k} - \frac{\partial h_k'}{\partial x_i}\Big) + \frac{h_k'}{4\pi}\Big(\frac{\partial h_{0i}}{\partial x_k} - \frac{\partial h_{0k}}{\partial x_i}\Big), \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\,(\rho_0 v_k') = 0,$$
$$\frac{\partial h_i'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k}\,(v_i' h_{0k} - v_k' h_{0i}), \quad \frac{\partial h_k'}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial s'}{\partial t} + v_k'\, \frac{\partial s_0}{\partial x_k} = 0, \tag{2.1}$$
$$p' = c_0^2 \rho' + \rho_0^2 s'\, \frac{\partial^2 e}{\partial \rho\, \partial s}\,(\rho_0, s_0), \qquad c_0^2 = \rho_0\Big(2\, \frac{\partial e}{\partial \rho}\,(\rho_0, s_0) + \rho_0\, \frac{\partial^2 e}{\partial \rho^2}\,(\rho_0, s_0)\Big),$$

определяющую развитие с течением времени малых возмущений полей скорости $\boldsymbol{v}'$, плотности ρ', давления p', энтропии s' и магнитного поля $\boldsymbol{h}'$ в области τ. Ее дополняют условия непротекания

$$v_i' n_i = 0, \qquad h_i' n_i = 0, \tag{2.2}$$

которые ставятся на границе $\partial\tau$, и начальные данные

$$\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{v}'^0(\boldsymbol{x}), \quad \rho'(\boldsymbol{x}, 0) = \rho'^0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{h}'(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{h}'^0(\boldsymbol{x}), \quad s'(\boldsymbol{x}, 0) = s'^0(\boldsymbol{x}), \tag{2.3}$$

причем на функции $\boldsymbol{v}'^0(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{h}'^0(\boldsymbol{x})$ налагаются ограничения, аналогичные принятым ранее для функций $\boldsymbol{v}^0(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{h}^0(\boldsymbol{x})$ из (1.3). Далее штрихи у величин, обозначающих поля возмущений, которые отличают их от полных решений задачи (1.1)–(1.3), опускаются.

Неустойчивость любого из состояний покоя (1.5)–(1.7) по отношению к малым пространственным возмущениям можно считать доказанной только в том случае, если удастся найти хотя бы одно возмущение, которое будет экспоненциально нарастать во времени. Исходя из этого целесообразно сузить область поиска такого возмущения. Далее изучается класс движений, в котором возмущения энтропии жидких частиц (лагранжевы возмущения поля энтропии) равны нулю. Другими словами, предполагается, что энтропия каждой жидкой частицы при возмущениях не меняется, возмущения представляют собой исключительно смещения частиц из их равновесных положений. Наиболее просто эти возмущения могут быть описаны посредством введения поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ [4], для которого выполняется соотношение

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} = v_i. \tag{2.4}$$

С помощью поля $\boldsymbol{\xi}$ линеаризованную начально-краевую задачу (2.1)–(2.3) перепишем следующим образом:

$$\begin{gathered}
\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{h_{0k}}{4\pi}\Big(\frac{\partial h_i}{\partial x_k} - \frac{\partial h_k}{\partial x_i}\Big) + \frac{h_k}{4\pi}\Big(\frac{\partial h_{0i}}{\partial x_k} - \frac{\partial h_{0k}}{\partial x_i}\Big), \\
\rho = -\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho_0 \xi_k), \qquad h_i = \frac{\partial}{\partial x_k}(\xi_i h_{0k} - \xi_k h_{0i}), \qquad s = -\xi_k \frac{\partial s_0}{\partial x_k}, \\
p = c_0^2 \rho + \rho_0^2 s \frac{\partial^2 e}{\partial \rho\, \partial s}(\rho_0, s_0), \qquad c_0^2 = \rho_0 \Big(2 \frac{\partial e}{\partial \rho}(\rho_0, s_0) + \rho_0 \frac{\partial^2 e}{\partial \rho^2}(\rho_0, s_0)\Big) \ \text{ в } \tau, \\
\xi_i n_i = 0, \qquad h_i n_i = 0 \ \text{ на } \partial\tau, \qquad \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{\xi}^0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{v}^0(\boldsymbol{x}).
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Для решений задачи (2.4), (2.5) справедлив линейный аналог интеграла энергии

$$\begin{gathered}
E = K + \Pi = \text{const}, \qquad 2K = \int\limits_\tau [\rho_0 v_i v_i]\, d\tau, \\
2\Pi = \int\limits_\tau \Big\{ -p \frac{\partial \xi_k}{\partial x_k} + \frac{h_i}{4\pi}\Big[h_i - \xi_k\Big(\frac{\partial h_{0k}}{\partial x_i} - \frac{\partial h_{0i}}{\partial x_k}\Big)\Big]\Big\}\, d\tau.
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Можно показать, что вторая вариация функционала Π_1 (1.4), записанная в подходящих обозначениях, совпадает с функционалом Π, а его первая вариация обращается в нуль на состояниях покоя (1.5) в силу условий (1.6), (1.7).

Если для всех допустимых полей лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}$ (2.4) имеет место неравенство $\Pi \geqslant 0$, которое соответствует достижению функционалом Π_1 своего минимума на точных стационарных решениях (1.5)–(1.7) задачи (1.1)–(1.3), то из независимости функционала E от времени вытекает устойчивость состояний покоя (1.5)–(1.7) относительно малых пространственных возмущений. Этот результат является, по сути, одной из форм теоремы Лагранжа [5–7] об устойчивости равновесия механической системы при наличии в нем минимума потенциальной энергии.

Ниже будет получено обращение теоремы Лагранжа, т. е. доказана неустойчивость состояний покоя (1.5)–(1.7) к малым пространственным возмущениям при условии, что функционал Π_1 не достигает на них своего минимального значения. В терминах поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}$ это означает, что существует такое начальное поле $\boldsymbol{\xi}^{0*}(\boldsymbol{x})$ (2.5), которое обладает следующим важным свойством:

$$\Pi(0) < 0, \quad \text{если} \quad \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^{0*}(\boldsymbol{x}). \tag{2.7}$$

При этом для других начальных полей лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}^0(\boldsymbol{x})$ неравенство (2.7) может смениться на противоположное, т. е. состояния покоя (1.5)–(1.7) представляют собой бесконечномерный аналог «седловой» точки функционала Π_1 (1.4).

3. Функционал Ляпунова. Следуя [8–10], введем вспомогательный функционал

$$M = \int\limits_{\tau} [\rho_0 \xi_i \xi_i]\, d\tau, \tag{3.1}$$

двукратное дифференцирование которого по времени и последующие преобразования с использованием (2.4)–(2.6) приводят к соотношению

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = 4(K - \Pi) = 8K - 4E,$$

называемому вириальным равенством [4]. Умножая в свою очередь это равенство на произвольный постоянный множитель λ и вычитая из (2.6), получаем уравнение

$$\begin{gathered} \frac{dE_\lambda}{dt} = 2\lambda E_\lambda - 4\lambda K_\lambda, \qquad E_\lambda = K_\lambda + \Pi_\lambda, \qquad 2\Pi_\lambda = 2\Pi + \lambda^2 M, \\ 2K_\lambda = 2K - \lambda \frac{dM}{dt} + \lambda^2 M = \int\limits_{\tau} \rho_0 \Big(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} - \lambda \boldsymbol{\xi}\Big)^2 d\tau. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Если положить $\lambda > 0$, то из (3.2) в силу неотрицательности функционала K_λ следует дифференциальное неравенство

$$\frac{dE_\lambda}{dt} \leqslant 2\lambda E_\lambda,$$

интегрирование которого позволяет получить основное для дальнейшего изложения соотношение

$$E_\lambda(t) \leqslant E_\lambda(0) \exp{(2\lambda t)}. \tag{3.3}$$

Необходимо отметить, что неравенство (3.3) справедливо как для любых решений задачи (2.4), (2.5), так и для любых положительных значений параметра λ. Кроме того, при выводе этого неравенства не требуется никаких ограничений на знак функционала Π (2.6).

Неравенство (3.3) свидетельствует о том, что функционал E_λ изменяется с течением времени монотонно. Это обстоятельство дает возможность рассматривать его далее как функционал Ляпунова [5, 8].

4. Оценки снизу и сверху. Задавая подходящим образом начальные данные для полей лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}$ и возмущений поля скорости $\boldsymbol{v}$ (2.4), (2.5), с помощью неравенства (3.3) можно получить двусторонние экспоненциальные оценки роста малых пространственных возмущений состояний покоя (1.5)–(1.7), а также найти точную формулу для вычисления скорости нарастания наиболее быстрорастущих возмущений.

Действительно, пусть начальное поле лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}^0$ таково, что для него выполняется условие (2.7). Учитывая, что поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}$ и возмущения поля скорости $\boldsymbol{v}$ в начальный момент времени задаются независимо друг от друга, в качестве последних можно выбрать функции $\boldsymbol{v}^0$ такие, чтобы удовлетворяли неравенству $K(0) < |\Pi(0)|$. В этом случае функционал $E_\lambda(0)$ в соответствии с (3.2) будет не чем иным, как полиномом второй степени от λ с положительным коэффициентом $M(0)$ (3.1) при λ^2 и отрицательным свободным членом $E(0)$ (2.6):

$$E_\lambda(0) = E(0) - \frac{\lambda}{2} \frac{dM}{dt}(0) + \lambda^2 M(0). \tag{4.1}$$

Пусть $\lambda > 0$, тогда из (4.1) следует, что на интервале

$$0 < \lambda < \Lambda_1 = B + C^{1/2} \qquad \Big(B = \frac{1}{4M(0)}\,\frac{dM}{dt}(0), \quad C = B^2 - \frac{E(0)}{M(0)}\Big) \tag{4.2}$$

имеет место соотношение

$$E_\lambda(0) < 0. \tag{4.3}$$

Неравенства (3.3), (4.3) показывают, что решения начально-краевой задачи (2.4), (2.5) нарастают во времени экспоненциально.

Если $\lambda = \Lambda_1 - \delta$ (с любым δ из интервала $]0, \Lambda_1[$), то соотношение (3.3) принимает вид

$$E_{\Lambda_1-\delta}(t) \leqslant E_{\Lambda_1-\delta}(0)\exp\left[2(\Lambda_1 - \delta)t\right] \qquad (E_{\Lambda_1-\delta}(0) < 0). \tag{4.4}$$

Пользуясь определением функционалов E_λ, K_λ и Π_λ (3.2), можно вывести неравенство $E_\lambda(t) > \Pi(t)$, которое позволяет придать соотношению (4.4) форму

$$\Pi(t) < E_{\Lambda_1-\delta}(0)\exp\left[2(\Lambda_1 - \delta)t\right]. \tag{4.5}$$

При помощи дополнительного функционала

$$J(t) = \int\limits_\tau \Big\{\rho^2 + s^2 + \Big(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}\Big)^2 + h_i h_i + \xi_i\xi_i\Big\}\,d\tau \tag{4.6}$$

неравенство (4.5) преобразуется к более информативному соотношению

$$J(t) > |cE_{\Lambda_1-\delta}(0)|\exp\left[2(\Lambda_1 - \delta)t\right] \tag{4.7}$$

(c — известная постоянная), из которого можно сделать вывод, что параметр $\Lambda_1 - \delta$ (4.2), (4.4) оценивает инкременты решений задачи (2.4), (2.5) снизу.

Оценка (4.7) существенно улучшается, если начальные возмущения поля скорости $\boldsymbol{v}^0$ (2.5) связаны с начальным полем лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}^{0*}$ (2.5), (2.7) следующим образом:

$$\boldsymbol{v}^0(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{\xi}^{0*}(\boldsymbol{x}). \tag{4.8}$$

Действительно, при наличии связи (4.8) из (3.2) следует

$$K_\lambda(0) = 0, \qquad E_\lambda(0) = \Pi_\lambda(0). \tag{4.9}$$

Полагая $\lambda > 0$, в силу (4.1), (4.9) нетрудно убедиться, что на интервале

$$0 < \lambda < \Lambda = \Big(-\frac{2\Pi(0)}{M(0)}\Big)^{1/2} \tag{4.10}$$

справедливо соотношение $\Pi_\lambda(0) < 0$. Если $\lambda = \Lambda - \delta_1$ (с произвольным δ_1 из интервала $]0, \Lambda[$), то с учетом (4.9) неравенство (3.3) может быть приведено к соотношению

$$E_{\Lambda-\delta_1}(t) \leqslant \Pi_{\Lambda-\delta_1}(0)\exp\left[2(\Lambda - \delta_1)t\right] \qquad (\Pi_{\Lambda-\delta_1}(0) < 0). \tag{4.11}$$

Из (4.6) и (4.11) получаем неравенство

$$J(t) > |c_1\Pi_{\Lambda-\delta_1}(0)|\exp\left[2(\Lambda - \delta_1)t\right] \tag{4.12}$$

(c_1 — известная постоянная), свидетельствующее о том, что параметр $\Lambda - \delta_1$ (4.10), (4.11) оценивает снизу инкременты решений начально-краевой задачи (2.4), (2.5), (4.8).

Сопоставление оценок (4.7) и (4.12) показывает, что решения задачи (2.4), (2.5), начальные данные для которых удовлетворяют условию (4.8), растут быстрее остальных возмущений.

Более того, можно доказать, что возмущения с начальными данными (4.8) наиболее опасные, поскольку наибыстрый рост решений задачи (2.4), (2.5) наблюдается при

$$\Lambda^+ = \sup_{\boldsymbol{\xi}^{0*}(\boldsymbol{x})} \Lambda. \tag{4.13}$$

Для этого необходимо вывести оценку, дающую ограничение сверху на рост малых пространственных возмущений состояний покоя (1.5)–(1.7). С этой целью в качестве параметра λ выбирается такое положительное число, которое по величине больше, чем Λ^+. Тогда для всех возможных начальных полей лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}^0$ (2.5) имеет место соотношение $\Pi_\lambda(0) > 0$. Следовательно, функционал E_λ (3.2) также положительно определен для всех возможных начальных полей лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}^0$ и возмущений поля скорости $\boldsymbol{v}^0$ (2.4), (2.5). Это означает, что при $\lambda = \Lambda^+ + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ из основного неравенства (3.3) следует соотношение

$$E_{\Lambda^+ + \varepsilon}(t) \leqslant E_{\Lambda^+ + \varepsilon}(0) \exp\left[2(\Lambda^+ + \varepsilon)t\right],$$

которое с помощью неравенства $\Pi_{\Lambda^+}(t) \geqslant 0$ может быть переписано в более наглядной форме

$$2K_{\Lambda^+ + \varepsilon}(t) + \varepsilon(2\Lambda^+ + \varepsilon)M(t) \leqslant 2E_{\Lambda^+ + \varepsilon}(0) \exp\left[2(\Lambda^+ + \varepsilon)t\right]. \tag{4.14}$$

Из соотношения (4.14) следует, что параметр $\Lambda^+ + \varepsilon$ (4.10), (4.13) оценивает инкременты решений начально-краевой задачи (2.4), (2.5) сверху.

Сравнение неравенств (4.12) и (4.14) позволяет заключить, что параметр Λ^+ оценивает скорость нарастания решений задачи (2.4), (2.5), (4.8) как снизу, так и сверху:

$$\Lambda^+ - \delta_1 \leqslant \omega_* \leqslant \Lambda^+ + \varepsilon. \tag{4.15}$$

Оценка (4.15) показывает, что наиболее быстро растут те решения начально-краевой задачи (2.4), (2.5), у которых инкремент равен Λ^+ (4.13).

Итак, если выполнено условие (2.7), то, вычислив значение Λ^+ по формулам (4.10), (4.13), можно ответить на вопрос: за какое характерное время «испортятся» состояния покоя (1.5)–(1.7) идеальной сжимаемой среды с бесконечной проводимостью в магнитном поле?

Отметим, что задача линейной устойчивости магнитогидродинамического равновесия идеально проводящей плазмы с уравнением состояния в форме адиабаты Пуассона исследовалась ранее в [11]. Основной недостаток полученных в этой работе достаточных условий удержания плазмы в магнитной ловушке состоит в том, что при построении соответствующего функционала Ляпунова были использованы первые интегралы спиральности, которые привели, по сути, к неявному исключению из рассмотрения возмущений, обладающих нулевой спиральностью, но уменьшающих тем не менее эффективную потенциальную энергию. Результаты настоящей работы свободны от указанного недостатка.

Другим важным обстоятельством, на которое следует обратить внимание, является то, что изложенная выше методика вывода двусторонних экспоненциальных оценок роста малых пространственных возмущений может быть применена и к задаче о неустойчивости пространственно-периодических магнитных полей, находящихся в покоящейся безграничной идеальной сжимаемой среде бесконечной проводимости. При этом область τ представляет собой аналог элементарных ячеек этих магнитных полей, а ее граница $\partial\tau$ — аналог поверхности ячеек.

5. Пример. Пусть невязкая сжимаемая идеально проводящая среда, заполняющая безграничное пространство, покоится в магнитном поле вида [12–16]

$$\boldsymbol{h}_0 = A(\cos\alpha x_3 + \sin\alpha x_2,\ \cos\alpha x_1 + \sin\alpha x_3,\ \cos\alpha x_2 + \sin\alpha x_1), \tag{5.1}$$

где A и α — произвольные положительные постоянные, первая из которых является амплитудой поля, а вторая — его обратным пространственным масштабом. Магнитное поле $\boldsymbol{h}_0$ представляет собой частный случай пространственно-периодического поля, именуемого бессиловым полем Бельтрами [15, 16].

Предполагается, что рассматриваемая покоящаяся среда однородна, т. е.

$$\rho = \rho_0 = \text{const}\,, \qquad p = p_0 = \text{const}\,, \qquad s = s_0 = \text{const}\,. \tag{5.2}$$

Далее, в безграничном пространстве фиксируется некоторая точка O как начало декартовой системы координат. В этой системе координат геометрически выделяется область, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда:

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2, x_3): \ -\frac{\pi}{2\alpha} \leqslant x_1 \leqslant \frac{\pi}{2\alpha}; \ -a \leqslant x_2 \leqslant a; \ 0 \leqslant x_3 \leqslant \frac{\pi}{2\alpha} \right\}. \tag{5.3}$$

Здесь a — некоторая положительная постоянная.

Можно убедиться, что состояние покоя (5.1), (5.2) является точным решением стационарных уравнений (1.6), причем поле $\boldsymbol{h}_0$ удовлетворяет условию (1.7) на поверхности параллелепипеда Ω.

Данное состояние покоя будет неустойчиво, например, к полю лагранжевых смещений, которое в начальный момент времени имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{\xi}^0 = b(x_2^2, 0, 0) \tag{5.4}$$

(b — постоянный положительный коэффициент).

Действительно, непосредственные вычисления с использованием (2.6), (5.1)–(5.4) показывают, что в этом случае

$$\Pi(0) = \frac{b^2 A^2 a^3}{2\pi\alpha^2} \left[\frac{1}{3} (\pi^2 + 8) - \frac{1}{5} a^2 \alpha^2 \right],$$

откуда следует, что условие (2.7) выполнено тогда, когда

$$\alpha > \frac{1}{a} \left[\frac{5}{3} (\pi^2 + 8) \right]^{1/2}. \tag{5.5}$$

Выбирая α и a так, чтобы имело место неравенство (5.5), нетрудно увидеть, что возмущения (5.4), налагаемые на состояние покоя (5.1), (5.2), нарастают в соответствии с двусторонними экспоненциальными оценками (4.7), (4.12) и (4.14). При этом по формулам (4.10), (4.13) можно определить скорость нарастания Λ^+ наиболее быстрорастущих из возмущений (5.4).

Построенный пример позволяет сделать ряд важных заключений. Во-первых, условие (5.5) на обратный пространственный масштаб α поля $\boldsymbol{h}_0$ (5.1) согласуется с выводом автора работ [12–14] о неустойчивости бессилового поля Бельтрами относительно малых крупномасштабных возмущений. Во-вторых, существование поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}^0$ (5.4), по отношению к которому состояние покоя (5.1), (5.2) является неустойчивым, свидетельствует об ошибочности результата работы [15], в силу которого бессиловое поле Бельтрами должно быть абсолютно устойчивым к любым малым пространственным возмущениям. На ошибочность этого результата указывалось в работе [16], однако представленный в ней пример начального поля лагранжевых смещений, для которого вторая вариация энергии магнитного поля при выполнении определенного условия становится отрицательной, нельзя считать доказательным, поскольку это поле противоречит принятому автором работы требованию соленоидальности.

Авторы выражают благодарность Л. Г. Бадратиновой за полезные обсуждения и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Губарев Ю. Г., Ковылина С. С.** Неустойчивость состояния покоя идеального сжимаемого газа в магнитном поле // Тез. докл. III Междунар. семинара по устойчивости гомогенных и гетерогенных жидкостей, Новосибирск, 10–12 апр. 1996 г. Новосибирск: Новосиб. академия стр-ва, 1996. С. 33, 34.
2. **Демуцкий В. П., Половин Р. В.** Основы магнитной гидродинамики. М.: Энергоатомиздат, 1987.
3. **Кадомцев Б. Б.** Гидромагнитная устойчивость плазмы // Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2. С. 132–176.
4. **Чандрасекхар С.** Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973.
5. **Четаев Н. Г.** Устойчивость движения. М.: Наука, 1965.
6. **Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.** Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965.
7. **Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д. и др.** Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976.
8. **Владимиров В. А.** К неустойчивости равновесия жидкостей // ПМТФ. 1989. № 2. С. 108–116.
9. **Ильин К. И.** К устойчивости бароклинного вихря // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1991. Т. 27, № 5. С. 584–588.
10. **Губарев Ю. Г.** Неустойчивость самогравитирующей сжимаемой среды // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 4. С. 68–77.
11. **Гордин В. А., Петвиашвили В. И.** Устойчивость по Ляпунову МГД-равновесия плазмы с ненулевым давлением // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1989. Т. 95, вып. 5. С. 1711–1722.
12. **Molodensky M. M.** Equilibrium and stability of the force-free magnetic field // Solar Phys. 1974. V. 39. P. 393–404.
13. **Molodensky M. M.** Equilibrium and stability of the force-free magnetic field. II. Stability // Solar Phys. 1975. V. 43. P. 311–316.
14. **Molodensky M. M.** Equilibrium and stability of the force-free magnetic field. III // Solar Phys. 1976. V. 49. P. 279–282.
15. **Moffatt H. K.** Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrarily complex topology. Pt 2. Stability considerations // J. Fluid Mech. 1986. V. 166. P. 359–378.
16. **Маков Ю. Н.** Неустойчивость пространственно-периодического магнитостатического поля в условиях синхронизма с возмущением // Журн. техн. физики. 1988. Т. 58, вып. 11. С. 2093–2097.

Поступила в редакцию 28/VII 1997 г.