

## О СИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ ДИСЛОКАЦИЙ\*

М. И. Карякин, О. Г. Пустовалова

*Ростовский государственный университет,  
344000 Ростов-на-Дону*

Использование теории дислокаций Вольтерра — упругих моделей дефектов кристаллической структуры — для описания механических явлений в области ядра дислокации требует учета нелинейных эффектов и, следовательно, привлечения аппарата нелинейной теории упругости. В настоящей работе на примере задач о клиновой дисклинации и винтовой дислокации показано, что учет физической и геометрической нелинейности в задачах о равновесии упругого тела, содержащего изолированный дефект, может приводить к качественно новым результатам по сравнению с линейной теорией. Одним из таких результатов является возможность существования так называемого «сингулярного» решения, описывающего образование в сплошном теле полости вдоль оси дефекта. В работе сформулировано интегральное соотношение, служащее как для анализа возможности существования сингулярного решения, так и для определения зависимости радиуса образующейся полости от характеристик дефекта. Для конкретных семейств нелинейно-упругих потенциалов определены интервалы изменения параметров материала, при которых существует сингулярное решение, и проведены расчеты размеров образующихся полостей. Установлено, что сингулярное решение энергетически более выгодно. Кроме того, его существование не является следствием нарушения неравенства Адамара.

1. Рассмотрим следующую деформацию сплошной среды:

$$R = R(r), \quad \Phi = \alpha\varphi, \quad Z = z. \quad (1.1)$$

Здесь  $r, \varphi, z$  — цилиндрические координаты в отсчетной конфигурации упругого тела;  $R, \Phi, Z$  — цилиндрические координаты в пространстве;  $\alpha$  — положительная постоянная.

Преобразование (1.1) описывает [1] распределение перемещений в круговом цилиндре с клиновой дисклинацией. При  $\alpha < 1$  в цилиндр, предварительно разрезанный полуплоскостью  $\varphi = 0$ , вводится клин с углом раствора  $2\pi(1 - \alpha)$ . Если  $\alpha > 1$ , то из цилиндра извлекается сектор  $2\pi\alpha^{-1} < \varphi < 2\pi$ , края соединяются. Радиальные перемещения точек цилиндра описываются функцией  $R(r)$ .

Геометрические характеристики деформации (1.1) (градиент деформации  $\mathbf{C}$ , мера деформации Коши — Грина  $\mathbf{G}$ , левый тензор искажений  $\mathbf{U}$ , тензор поворота  $\mathbf{A}$  [2, 3]), соответствующие преобразованию (1.1), определяются выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= R' \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \alpha \frac{R}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z, \\ \mathbf{G} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T = R'^2 \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \left(\alpha \frac{R}{r}\right)^2 \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (1.2)$$

\* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда (грант МТА000).

$$\mathbf{U} = \mathbf{G}^{1/2} = R' \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{R}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z,$$

где  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$  и  $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{e}_Z$  — орты цилиндрических координат в отсчетной и актуальной конфигурациях соответственно; штрих здесь и ниже обозначает дифференцирование по переменной  $r$ .

Ограничиваясь рассмотрением несжимаемых материалов, определим функцию  $R(r)$  из условия несжимаемости [2]

$$\det \mathbf{C} = 1$$

или

$$\frac{\varkappa R R'}{r} = 1, \quad (1.3)$$

откуда находим

$$R(r) = \sqrt{(r^2 + C^2)/\varkappa} \quad (1.4)$$

( $C$  — константа интегрирования).

Следуя схеме, использованной в [4], остановимся на двух случаях образования клиновой дисклинации: 1) сплошной до деформации цилиндр остается таковым и после нее, 2) сплошной цилиндр преобразуется в полый. Согласно использованной в [5] терминологии, решение первой задачи будем называть регулярным, второй — сингулярным.

Из (1.4) вытекает, что регулярному решению соответствует нулевое значение константы  $C$ , в сингулярном случае эта константа пропорциональна радиусу образующейся полости:

$$C = \sqrt{\varkappa} R(0).$$

Пусть задан упругий потенциал  $W(C)$  несжимаемого материала. Обозначим через  $\mathbf{S}$  производную  $\partial W / \partial C$ . Тогда определяющее соотношение для тензора напряжений Пиолы  $\mathbf{D}$  примет вид [2]

$$\mathbf{D} = -p \mathbf{C}^{-T} + \mathbf{S} \quad (1.5)$$

( $p$  — функция давления).

С учетом (1.2), (1.5) векторное уравнение равновесия  $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$  сведется к одному соотношению

$$p' = R' \left( S'_{rR} + \frac{1}{r} (S_{rR} - \varkappa S_{\varphi\Phi}) \right). \quad (1.6)$$

Здесь  $S_{rR} = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_R$ ;  $S_{\varphi\Phi} = \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_\Phi$ .

Первым граничным условием для уравнения (1.6) служит отсутствие напряжений на внешней боковой поверхности цилиндра:

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D} = 0 \quad \text{при} \quad r = r_1 \quad (1.7)$$

( $r_1$  — радиус цилиндра до деформации). Учитывая (1.5), условию (1.7) можно придать вид

$$p(r_1) = R'(r_1) S_{rR}(r_1). \quad (1.8)$$

Вторым краевым условием для регулярного решения служит условие сплошности  $R(0) = 0$  или с учетом (1.4)  $C = 0$ . Для сингулярного решения

вторым краевым условием является отсутствие напряжений в деформированном состоянии на поверхности образовавшейся полости:

$$\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{T} = 0$$

( $\mathbf{T}$  — тензор напряжений Коши). С помощью соотношений, связывающих тензоры напряжений Коши  $\mathbf{T}$  и Пиолы  $\mathbf{D}$  [2], это условие в терминах отсчетной конфигурации запишем как

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} (p(r_0) - R'(r_0) S_{rR}(r_0)) = 0. \quad (1.9)$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся безразмерными величинами

$$r^* = r/r_1, \quad R^* = R/r_1, \quad C^* = C/r_1, \quad r_1^* = 1,$$

при этом значок \* будем опускать.

Учитывая равенство

$$S'_{rR} + \frac{1}{r} S_{rR} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r S_{rR}),$$

запишем решение уравнения (1.6) в виде

$$p(r) = p(1) + \int_1^r \left( \frac{R'}{r} \frac{d}{dr} (r S_{rR}) - \frac{R'}{r} \varkappa S_{\varphi\Phi} \right) dr.$$

Интегрируя первое слагаемое подынтегрального выражения по частям и учитывая краевое условие (1.8), находим

$$p(r) = R'(r) S_{rR}(r) - \int_1^r \left[ r S_{rR} \left( \frac{R'}{r} \right)' - \frac{R'}{r} \varkappa S_{\varphi\Phi} \right] dr.$$

Подставляя полученное выражение для  $p(r)$  в (1.9), приходим к соотношению

$$\int_0^1 \left[ \left( \frac{R'}{r} \right)' r S_{rR} + \varkappa \frac{R'}{r} S_{\varphi\Phi} \right] dr = 0.$$

Последнее выражение может быть дополнительно преобразовано с использованием равенств (1.4), (1.5). Окончательно получаем

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{r^2 + C^2}} \left( -R'^2 S_{rR} + S_{\varphi\Phi} \right) dr = 0. \quad (1.10)$$

Соотношение (1.10) может служить для определения зависимости константы  $C$  от параметра дисклинации  $\varkappa$  после конкретизации закона состояния нелинейно-упругого тела (выбора потенциала  $W$ ).

Соотношения (1.1) описывают плоскую деформацию сплошной среды. Поэтому без ограничения общности можно считать упругий потенциал  $W$  функцией лишь величины  $I_1$  — первого инварианта меры деформации Коши  $\mathbf{G}$  [2]. В этом случае подынтегральное выражение в (1.10) может быть записано как

$$(1 - R'^4) \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial I_1}. \quad (1.11)$$

Полагая [2, 3]  $\partial W/\partial I_1 > 0$ , легко проверить, что сингулярное решение может существовать лишь в случае положительной дисклинации ( $\varepsilon < 1$ ). Действительно, из (1.3), (1.4) вытекает, что при  $\varepsilon > 1$  значение  $R'$  всегда меньше единицы, а следовательно, подынтегральное выражение (1.11) не меняет знак на отрезке  $[0,1]$  и интеграл (1.10) не может обращаться в нуль.

Необходимым условием равенства (1.10) является интегрируемость подынтегрального выражения. Обозначим  $\partial W/\partial I_1 = \omega(I_1)$ . Чтобы подынтегральное выражение не имело неинтегрируемой особенности,  $\omega(I_1)$  должно стремиться к нулю не медленнее, чем  $r^\alpha$ , где  $\alpha$  — положительная константа. Так как  $I_1 \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow 0$ , как  $1/r^2$ , то  $\omega(I_1)$  должна стремиться к нулю при  $I_1 \rightarrow \infty$  не медленнее, чем  $I_1^{-\beta}$  ( $\beta = \alpha/2 > 0$ ), а потенциал  $W$  при  $I_1 \rightarrow \infty$  должен возрастать не быстрее, чем  $I_1^{1-\beta}$ , т. е.

$$W < \text{const } I_1^{1-\beta}, \quad I_1 \rightarrow \infty, \quad \beta > 0. \quad (1.12)$$

Упругий потенциал часто записывается как функция первого инварианта левого тензора искажений  $\mathbf{U}$ :

$$W = W(j_1), \quad j_1 = \text{tr}(\mathbf{U}). \quad (1.13)$$

Учитывая равенства

$$\mathbf{S} = \partial W/\partial \mathbf{C} = (\partial W/\partial \mathbf{U}) \cdot \mathbf{A} = (\partial W/\partial j_1) \mathbf{A},$$

подынтегральное выражение в (1.10) запишем в виде

$$(1 - R'^2) \frac{1}{\sqrt{r^2 + C^2}} \partial W/\partial j_1. \quad (1.14)$$

Неинтегрируемая особенность в (1.14) может возникнуть из-за множителя  $\partial W/\partial j_1$ , который обозначим через  $\omega(j_1)$ . Так как  $j_1 \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow 0$ , как  $1/r$ , то функция  $\omega(j_1)$  при  $j_1 \rightarrow \infty$  не должна возрастать быстрее, чем  $j_1^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ . Функция удельной потенциальной энергии  $W$  при  $j_1 \rightarrow \infty$  должна, в свою очередь, увеличиваться не быстрее, чем  $j_1^{2-\alpha}$ . Из этих соображений заключаем, что необходимое условие существования сингулярных решений для потенциалов вида (1.13) имеет вид

$$W < \text{const } j_1^{2-\alpha}, \quad j_1 \rightarrow \infty, \quad \alpha > 0.$$

2. В качестве примера рассмотрим семейство нелинейно-упругих потенциалов, изученное в работе [6]:

$$W = \mu (I_1 - 3)^\nu \quad (2.1)$$

( $\nu, \mu$  — константы материала). При  $\nu = 1$  потенциал (2.1) совпадает с потенциалом неогукковского материала (материала Трелоара) [2].

Из (1.12) сразу получаем ограничение на константу  $\nu$ : сингулярные решения могут существовать лишь при  $\nu < 1$ .

Выражение для тензора  $\mathbf{S}$  в этом случае принимает вид

$$\mathbf{S} = 2\mu\nu(I_1 - 3)^{\nu-1} \mathbf{C},$$

а уравнение (1.10) запишется как

$$\int_0^1 \left| \frac{R'^2 - 1}{R'} \right|^{2(\nu-1)} \frac{1 - R'^4}{r} dr = 0. \quad (2.2)$$

Из (2.2) следует, что сингулярные решения могут существовать лишь при  $\nu > 0$ , иначе в точке

$$r_C = C \left( \frac{\varkappa}{1 - \varkappa} \right)^{1/2}$$

подынтегральное выражение будет иметь неинтегрируемую особенность. Через  $r_C$  обозначена точка, в которой величина  $(I_1 - 3)$  обращается в нуль. Объединяя полученные ограничения для константы материала  $\nu$ , приходим к выводу, что сингулярные решения могут реализовываться лишь для значений  $\nu$  из интервала  $(0,1)$ .

При  $\nu = 0,5$  уравнение (2.2) сводится к соотношению

$$\int_0^1 \frac{1 + R'^2}{\sqrt{r^2 + C^2}} \operatorname{sign}(1 - R'^2) dr = 0, \quad (2.3)$$

где

$$R'^2 = \frac{r^2}{\varkappa(r^2 + C^2)}.$$

Интеграл (2.3) может быть вычислен аналитически. Уравнение для определения зависимости  $C$  от  $\varkappa$  принимает вид

$$(\varkappa + 1) \ln \left( \frac{1 + \varkappa + 2\sqrt{\varkappa}}{1 - \varkappa} \frac{C}{1 + \sqrt{1 + C^2}} \right) - 2\sqrt{\varkappa} + \frac{1}{\sqrt{1 + C^2}} = 0.$$

Проведенные расчеты показали, что в достаточно широком диапазоне изменения параметра дисклинации зависимость  $C$  от  $\varkappa$  можно считать линейной:

$$C \approx 0,85(1 - \varkappa).$$

На рис. 1 представлен график зависимости радиуса полости  $C$  от константы материала  $\nu$  при фиксированном значении мощности дисклинации  $\varkappa = 0,9$ .

Материалы вида (2.1) удовлетворяют неравенству Адамара при всех значениях параметра  $\nu \geq 0,5$  [6]. Это означает, что возникновение сингулярных решений не является следствием нарушения неравенства Адамара.

Формулой

$$\Pi = 2\pi \int_0^1 r W(r) dr \quad (2.4)$$

определяется величина удельной (на единицу длины) упругой энергии деформированного цилиндра. Расчеты с использованием (1.2), (1.4), (2.1) при  $\nu = 1$  показывают, что в регулярном случае выражение для энергии дается соотношением ( $\varkappa < 1$ )

$$\Pi = \mu \pi r_1^2 \frac{1 - \varkappa}{\sqrt{\varkappa}},$$

в сингулярном случае

$$\Pi = \mu \pi r_1^2 \frac{1 - \varkappa - \varkappa C^2}{\sqrt{\varkappa} \sqrt{1 + C^2}}.$$

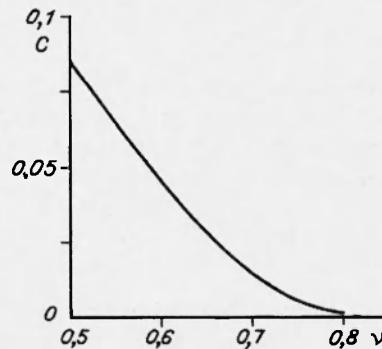


Рис. 1

Легко видеть, что упругая энергия цилиндра с полостью всегда меньше энергии сплошного цилиндра. Это означает, что сингулярное решение является энергетически более выгодным. Для других значений  $\nu$  из интервала  $(0,1)$  получены аналогичные результаты.

Рассмотрим теперь нелинейно-упругий потенциал вида [7]

$$W = 2\mu \operatorname{tr}(\mathbf{U}^m - \mathbf{E})/m^2 \quad (2.5)$$

( $\mu$  и  $m$  — константы материала). В случае  $m = 1$  потенциал (2.5) совпадает с потенциалом Бартенева — Хазановича, при  $m = 2$  сводится к неогуковскому потенциалу [2].

Используя соотношение  $\mathbf{S} = \partial W/\partial \mathbf{C} = (\partial W/\partial \mathbf{U}) \cdot \mathbf{A}$  и вычисляя производную  $\partial W/\partial \mathbf{U} = m\mathbf{U}$ , находим тензор  $\mathbf{S}$ :

$$\frac{1}{2\mu m} \mathbf{S} = R^{(m-1)} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \left( \frac{R}{r} \right)^{(m-1)} \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z.$$

С учетом полученного представления тензора  $\mathbf{S}$  уравнение (1.10) преобразуется к виду

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{r^2 + C^2}} \left( -R^{(m+1)} + \left( \frac{R}{r} \right)^{(m-1)} \right) dr = 0$$

или

$$\int_0^1 \left[ \left( \frac{r^2}{(r^2 + C^2) \mathfrak{a}} \right)^{(m+1)/2} - \left( \frac{(r^2 + C^2) \mathfrak{a}}{r^2} \right)^{(m-1)/2} \right] dr = 0. \quad (2.6)$$

Интеграл (2.6) является сходящимся при  $-2 < m < 2$ .

В случае  $m = 1$  (материал Бартенева — Хазановича) интеграл (2.6) вычисляется аналитически. Уравнение для определения радиуса образующейся полости имеет вид

$$(1 - \mathfrak{a}) \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 + C^2}}{C} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + C^2}}.$$

На рис. 2 и 3 приведены графики зависимости радиусов образующихся полостей от мощности дисклинации (при  $m = 1$ ) и от константы материала  $m$  (при  $\mathfrak{a} = 0,9$ ) соответственно.

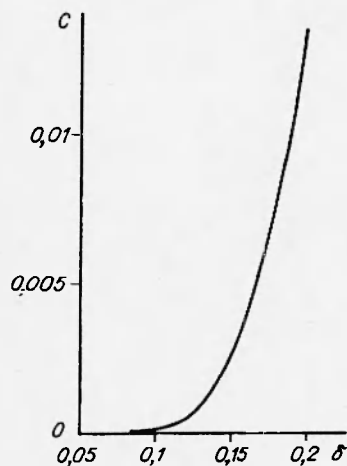


Рис. 2

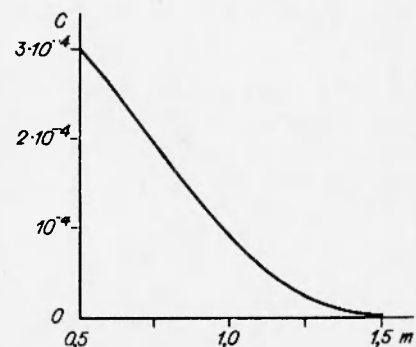


Рис. 3

3. Деформация сплошной среды вида

$$R = R(r), \quad \Phi = \varphi, \quad Z = \frac{b}{2\pi} \varphi + z \quad (3.1)$$

описывает образование в цилиндре винтовой дислокации, т. е. разрезание цилиндра полуплоскостью  $\varphi = 0$  и сдвиг берегов разреза параллельно оси цилиндра на величину  $b$ , называемую вектором Бюргерса дислокации. Константу  $a = b/2\pi$  будем называть параметром дислокации.

Геометрические характеристики, соответствующие преобразованию (3.1), определяются выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= R' \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \frac{R}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi + \frac{a}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_Z + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z, \\ \mathbf{G} &= R'^2 \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{R^2 + a^2}{r^2} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \frac{a}{r} (\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\varphi) + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{U} &= R' \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{r}{\sqrt{(R+r)^2 + a^2}} \left( \frac{R^2 + a^2 + Rr}{r^2} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \frac{a}{r} (\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\varphi) + \frac{R+r}{r} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \right), \\ \mathbf{A} &= \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \frac{R+r}{\sqrt{(R+r)^2 + a^2}} (\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z) + \frac{a}{\sqrt{(R+r)^2 + a^2}} (\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_Z - \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\Phi). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Применяя подход, употребленный выше в задаче о дисклинации, получим следующие результаты. Функция радиального смещения точки  $R(r)$  (для несжимаемых материалов) имеет вид

$$R(r) = \sqrt{r^2 + C^2}.$$

Уравнения равновесия сводятся к соотношению

$$p' = R' \left( S'_{rR} + \frac{1}{r} (S_{rR} - S_{\varphi\Phi}) \right).$$

Уравнение для определения зависимости радиуса полости от параметра дислокации  $a$  формально имеет тот же вид (1.10), что и для задачи о дисклинации.

Для материалов типа Зубова — Рудева (2.1) компоненты тензора  $\mathbf{S}$  с учетом (3.2) записываются как

$$\begin{aligned} S_{rR} &= \mu \nu (I_1 - 3)^{\nu-1} R', \\ S_{\varphi\Phi} &= \mu \nu (I_1 - 3)^{\nu-1} (R')^{-1}, \end{aligned}$$

где

$$I_1 - 3 = \frac{C^4 + a^2 (r^2 + C^2)}{(r^2 + C^2) r^2}.$$

Уравнение (1.10) с использованием введенных выше безразмерных переменных примет вид

$$\int_0^1 \left[ \left( \frac{C^4 + a^2 (r^2 + C^2)}{(r^2 + C^2) r^2} \right)^{\nu-1} \frac{2r^2 + C^2}{r (r^2 + C^2)^2} \right] dr = 0. \quad (3.3)$$

Легко видеть, что подынтегральное выражение в (3.3) строго больше нуля на отрезке (0,1). Поэтому интеграл (3.3) не может обращаться в нуль,

и, следовательно, задача о равновесии цилиндра с винтовой дислокацией для материалов Зубова — Рудева не имеет сингулярного решения.

Использование потенциалов вида (2.5) приводит к существенному усложнению задачи о винтовой дислокации. Это связано с тем, что для возведения в произвольную нецелую степень тензора  $\mathbf{U}$  вида (3.2) его необходимо предварительно привести к главным осям.

В частном случае ( $m = 1$ ) эта проблема отпадает; интеграл (1.10) вычисляется аналитически, и уравнение для определения константы  $C$  принимает вид

$$\ln \frac{(1 + \sqrt{1 + C^2})(1 + \sqrt{1 + a^2/C^2})}{\sqrt{1 + C^2} + \sqrt{a^2 + (1 + \sqrt{a^2 + C^2})^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + C^2}} = 0.$$

Из расчетов видно, что в достаточно широком диапазоне изменения параметра дислокации зависимость  $C$  от  $a$  можно считать линейной:

$$C \approx 0,231 a, \quad a \in (0,0001; 0,1).$$

Расчеты энергии по формуле (2.4) показали, что во всем изученном диапазоне изменения параметров задачи энергия сингулярного решения меньше соответствующей энергии регулярного решения. Поэтому сингулярное решение и в данном случае можно считать энергетически более предпочтительным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зубов Л. М. Изолированная дисклинация в нелинейно-упругом сжимаемом теле // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 69–73.
2. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
3. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
4. Еремеев В. А., Зубов Л. М., Карякин М. И., Чернега Н. Я. Образование полостей в нелинейно-упругих телах с дислокациями и дисклинациями // Докл. РАН. 1992. Т. 326, № 6. С. 968–971.
5. Podio-Guidugli P., Vergara Cafarelli G., Verga E. G. Discontinuous energy minimizers in nonlinear elastostatics: an example of J. Ball revisited // J. Elast. 1986. V. 16, N 1. P. 75–96.
6. Зубов Л. М., Рудев А. Н. Об особенностях потери устойчивости нелинейно-упругого прямоугольного бруса // ПММ. 1993. Т. 57, вып. 3. С. 65–83.
7. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986.

Поступила в редакцию 14/IX 1994 г.