

УДК 532.5:621.22

**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ
ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ РЕШЕТКИ
ПЛАСТИН В ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА ***

В. П. Рябченко

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск*

Расчет аэродинамических сил, действующих на рабочие лопатки осевых турбомашин в нестационарном дозвуковом потоке газа, проводится часто на основе гипотезы цилиндрических сечений. По этой гипотезе течение газа в каждом цилиндрическом слое лопаточного венца заменяется приближенно плоскопараллельным потоком через периодическую решетку профилей. В какой области изменения параметров решетки и потока оправдано применение этой гипотезы, до сих пор неясно, особенно в случае нестационарного течения. Однако практика проектирования высокоскоростных компрессоров и вентиляторов требует полного понимания характера течения газа, в частности его пространственности. Ввиду сложности решения нелинейной задачи течения вязкого газа через ряд лопаток нужна достаточно легко обрабатываемая линейная модель трехмерного нестационарного течения.

Простейшей пространственной моделью осевой турбомашин является решетка пластин конечного размаха прямоугольной формы в плане, ограниченных с торцов параллельными плоскостями Π_1 и Π_2 (рис. 1). По-видимому, эта модель более точно соответствует осевой турбомашине с втулочным отношением, близким к единице, и большим числом лопаток. В такой постановке задача рассматривалась в [1, 2]. В [1] для ее решения использовался метод аэродинамической интерференции и аппарат функций Маттье, а в [2] — метод факторизации и на некоторых примерах (для несжимаемой жидкости) продемонстрировано удовлетворительное совпадение численных результатов с результатами [1]. Сложность применяемого математического аппарата затрудняет проведение численного эксперимента и тем самым качественного анализа получаемых результатов. Кроме того, методы, применяемые в [1, 2], существенно используют геометрию области течения газа и не могут быть применены к решению задачи в рамках других моделей (например, кольцевой решетки).

В данной работе дано обобщение на случай сжимаемой среды метода подковообразных вихрей (Π -вихрей), широко используемого для расчета течений несжимаемой жидкости. Предлагаемый метод может быть применен для решения задач обтекания лопаток турбомашин различной конфигурации, а также классических задач теории крыла конечного размаха.

Постановка задачи. Рассматривается пространственная решетка пластин с выносом δ (рис. 1), ограниченных с торцов плоскостями Π_1 и Π_2 (Π_1 — плоскость заделки лопаток). Расстояние между лопатками h вдоль размаха остается постоянным.

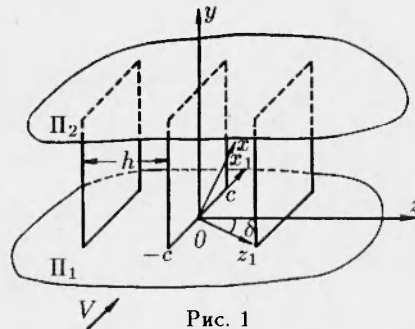


Рис. 1

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-16653).

Предполагается, что лопатки Σ_n в решетке колеблются синхронно по некоторому гармоническому закону с малой амплитудой, частотой ω и постоянным сдвигом фазы μ между колебаниями соседних лопаток. Набегающий поток газа в бесконечности перед решеткой имеет скорость V . Возмущенное течение газа вне решетки лопаток и вихревых следов, сходящихся с каждой лопатки из-за переменности циркуляции по времени и высоте лопатки, потенциальное. Вихревые следы W_n будем моделировать поверхностями разрыва касательных скоростей, являющихся продолжением пластин от задних кромок до бесконечности.

Введем декартову систему координат $Ox_1y_1z_1$, связанную с одной из лопаток, которую будем называть нулевой ($n = 0$). Начало координат поместим в середине корневой хорды лопатки, лежащей в плоскости заделки Π_1 . Ось x_1 направим вдоль этой хорды по направлению скорости основного потока, ось y_1 — вдоль размаха пластины, а ось z_1 — перпендикулярно оси x_1 в плоскости Π_1 . Удобно перейти к безразмерным переменным x, y и z , связанным с x_1, y_1 и z_1 соотношениями

$$x_1 = lx, \quad y_1 = ly/\beta, \quad z_1 = lz/\beta,$$

где l — высота лопатки; $\beta^2 = 1 - M^2$; $M = V/a$ — число Маха; a — скорость звука в невозмущенном потоке.

При сделанных предположениях для амплитуды потенциала φ возмущенных скоростей возникает следующая задача:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi - 2i\frac{M^2}{\beta^2}q\varphi_x + \frac{M^2}{\beta^2}q^2\varphi &= 0, \\ \varphi_z &= \beta^{-1}v(x, y)\exp(in\mu) \quad (n = 0, \pm 1, \dots) \quad \text{при } x \in \Sigma_n, \\ [p] = [\varphi_z] &= 0 \quad \text{при } x \in W_n, \\ \varphi_y &= 0 \quad \text{при } x \in \Pi_1 \cup \Pi_2, \\ |\nabla\varphi| &< \infty \quad \text{при } \bar{x} = 0, 5\lambda^{-1}, \quad 0 \leq y \leq \beta. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $x = (\bar{x}, y, z)$; $q = \omega l/V$; $v(x, y)$ — заданная амплитудная функция скорости колебаний (форма колебаний); квадратные скобки означают скачок величины, в них заключенной; i — мнимая единица; $\lambda = l/(2c)$ — удлинение лопатки, а c — ее полухорда.

Уравнение (1) для φ получено в результате линеаризации задачи на однородном потоке по оси x и проведения преобразования растяжения по y и z с параметром $1/\beta$. Кроме того, ставится еще условие излучения, состоящее в том, что в решении должны отсутствовать волны, приходящие из бесконечности к решетке.

Фундаментальное решение. Следуя [3], для нахождения фундаментального решения рассмотрим неоднородное уравнение

$$\Delta G - 2iM^2\beta^{-2}qG_{\bar{x}} + M^2\beta^{-2}q^2G = -f(M_0, \bar{x}), \quad (2)$$

где $f(M_0, \bar{x})$ — заданная функция ($M_0 = (y, \bar{z})$), с краевыми условиями

$$G_y = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = \beta.$$

Введем новую искомую функцию

$$\tilde{G} = e^{iM^2q/\beta^2\bar{x}}G.$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$\Delta\tilde{G} + k^2\tilde{G} = -e^{iM^2q/\beta^2\bar{x}}f(M_0, \bar{x}), \quad k = Mq/\beta^2.$$

Введем систему координат (x, y, z) (ось z направлена по оси решетки), по отношению к первоначальной повернутую на угол δ . Связь координат осуществляется по формулам

$$x = \bar{x} \cos \delta - \bar{z} \sin \delta, \quad z = \bar{z} \cos \delta + \bar{x} \sin \delta.$$

В новых переменных получаем уравнение

$$\Delta \bar{G} + k^2 \bar{G} = -e^{iM^2 q(x \cos \delta + z \sin \delta)/\beta^2} f(M_0, x).$$

По переменной z фундаментальное решение должно обладать обобщенной периодичностью и в соответствии с граничным условием непротекания удовлетворять краевым условиям при $y = 0, y = \beta$. Представив G в виде двойного ряда, окончательно находим

$$G(x, y) = \frac{E_\mu}{\hbar \beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{\Gamma_{mn}} \exp[-\Gamma_{mn}|x - \xi| + i(\alpha_n + \mu/\hbar)(z - \zeta)] \cos \beta_m y \cos \beta_m \eta. \quad (3)$$

Здесь $E_\mu = \exp\{iM^2 q/\beta^2[(x - \xi) \cos \delta + (z - \zeta) \sin \delta]\}$; $\hbar = h/l$; $\Gamma_{mn}^2 = (\alpha_n + \mu/\hbar)^2 + \beta_m^2 - k^2$; $\varepsilon_0 = 0, 5$; $\varepsilon_m = 1$ при $m = 1, 2, \dots$; $\alpha_n = 2\pi n/\hbar$; $\beta_m = m\pi/\beta$; $y = (\xi, \eta, \zeta)$; Γ_{mn} выбирается так, чтобы выполнялось условие излучения.

Однако вычисление функции G по формуле (3) и ее производных становится невозможным при $|x - \xi| \rightarrow 0$ в связи с тем, что при совпадении точек они обладают особенностями, и ряды, их представляющие, становятся расходящимися. Поэтому необходимо получить другое выражение для функции G , в котором были бы выделены эти особенности в явном виде и не было бы проблем, связанных со сходимостью рядов. Для этого воспользуемся представлением [4]

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2}} e^{-\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2} |x - \xi|} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \beta_m t K_0(\alpha_n \sqrt{t^2 + |x - \xi|^2}) dt$$

(K_0 — модифицированная функция Бесселя). Подставив его в (3) и учитывая, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \cos mx = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2n\pi),$$

запишем

$$G = \frac{E_\mu}{2\pi N \hbar \beta} \sum_{\nu=0}^{N-1} e^{i\nu\mu} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\alpha_n(z-\zeta-\nu\hbar)} \{K_0(a_n r_+(0)) + K_0(a_n r_-(0))\} + \sum_{m=1}^{\infty} [K_0(a_n r_+(m)) + K_0(a_n r_+(-m)) + K_0(a_n r_-(m)) + K_0(a_n r_-(-m))] \right\}$$

($a_n = \sqrt{\alpha_n^2 - k^2}$, $r_\pm^2(m) = (y \pm \eta + 2m\beta)^2 + (x - \xi)^2$, $\delta(x)$ — функция Дирака, N — число лопаток в основном периоде решетки). В [5] показано, что при $|\varphi| < 2\pi$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi K_0(\sqrt{n^2 - k^2}z) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} Y_0(kz) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos k\sqrt{z^2 + (2n\pi - \varphi)^2}}{\sqrt{z^2 + (2n\pi - \varphi)^2}} \right\}.$$

Используя этот результат и учитывая, что

$$\sum_{\nu=0}^{N-1} e^{i\nu\mu} = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu \neq 0, \\ N & \text{при } \mu = 0 \end{cases}$$

и $K_0(iz) = -\frac{1}{2}\pi i \bar{H}_0^{(2)}(z)$ при $-\pi/2 < \arg z \leq \pi$, получим

$$G = \frac{E_\mu}{\pi} \sum_{\nu=0}^{N-1} e^{i\nu\mu} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\cos kR_+}{R_+} + \frac{\cos kR_-}{R_-} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{Nh} \sum_{m,n=1}^{\infty} \cos \alpha_n(z - \zeta - \nu\bar{h}) [K_0(a_n r_+(m)) + K_0(a_n r_+(-m)) + K_0(a_n r_-(m)) + K_0(a_n r_-(-m))] \right\} + A_\mu.$$

Здесь $A_\mu = 0$ при $\mu \neq 0$;

$$A_0 = \frac{E_\mu}{4h} \left\{ Y_0(kr_+(0)) + Y_0(kr_-(0)) - i \sum_{m=-\infty}^{\infty} [H_0^{(2)}(kr_+(m)) + H_0^{(2)}(kr_-(m))] \right\};$$

Y_0 — функция Бесселя второго рода; $H_0^{(2)}$ — функция Ганкеля; $R_\pm^2 = (x - \xi)^2 + (y \pm \eta)^2 + (z - \zeta - \nu h - nNh)^2$.

Ряд по функциям Ганкеля в A_0 аналогичен выражению, получаемому при использовании метода отражения в полосе $\{0 \leq y \leq \beta, -\infty < x < \infty\}$, на границах которой выполняется нулевое условие Неймана. Функция A_0 имеет логарифмическую особенность при совпадении точек x и y . С помощью формулы суммирования Пуассона

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\nu\tau} d\tau$$

и интегрального представления для функций Ганкеля, использованного в [7], находим

$$G_0 = -\frac{iE_\mu}{4h} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [H_0^{(2)}(kr_+(m)) + H_0^{(2)}(kr_-(m))] = \\ = -\frac{E_\mu}{2h\beta} \left[\frac{e^{-ik|x-\xi|}}{ik} + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{(\nu\pi/\beta)^2 - k^2}|x-\xi|}}{\sqrt{(\nu\pi/\beta)^2 - k^2}} \cos \frac{\nu\pi}{\beta} y \cos \frac{\nu\pi}{\beta} \eta \right].$$

В этой формуле имеется член, который стремится к ∞ при $k \rightarrow 0$, поэтому нет предельного перехода в решение уравнения Лапласа. Так как фундаментальное решение определяется с точностью до решения однородного уравнения, то можно в квадратных скобках вычесть $(1/ik) \exp ik(x - \xi)$, обеспечив тем самым этот предельный переход [6].

Сходимость ряда по ν можно существенно улучшить, вычитая и добавляя ряд при $k = 0$, который равен

$$\frac{1}{2} \frac{\pi}{\beta} |x - \xi| - \frac{1}{4} \ln \left\{ 4 \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{\beta}(x - \xi) - \cos \frac{\pi}{\beta}(\eta - y) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{\beta}(x - \xi) - \cos \frac{\pi}{\beta}(\eta + y) \right] \right\}.$$

Кроме этого, устраняется особенность ряда для G_0 при $|x - \xi| \rightarrow 0$.

Интегральное представление для скорости течения газа. Используя способ, изложенный в [8], можно получить представление для скорости течения газа через значения поверхностного ротора $\gamma = \mathbf{n} \times [\mathbf{v}]$ (интенсивность вихревого слоя) на поверхностях лопаток Σ_n и вихревых следах за ними W_n . Уравнение (1) можно записать в форме

$$\operatorname{div} \mathbf{U} + \beta^2 k^2 \varphi = 0,$$

если ввести вектор \mathbf{U} с компонентами

$$U_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 2i \frac{M^2}{\beta^2} q \varphi, \quad U_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad U_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Введем функцию ψ , имеющую непрерывные вторые производные и удовлетворяющую уравнению, сопряженному (1). Построим вектор \mathbf{V} по формулам

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial x} + 2i \frac{M^2}{\beta^2} q \psi, \quad V_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Тогда функция ψ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{V} + \beta^2 k^2 \psi = 0.$$

Проинтегрируем разность

$$\psi(\operatorname{div} \mathbf{U} + \beta^2 k^2 \varphi) - \varphi(\operatorname{div} \mathbf{V} + \beta^2 k^2 \psi) = \operatorname{div}(\psi \mathbf{V}) - \operatorname{div}(\varphi \mathbf{U}) + \nabla \varphi \cdot \mathbf{V} - \nabla \psi \cdot \mathbf{U}$$

по некоторому объему Ω , внутри которого выполняются указанные уравнения. Используя формулу Гаусса — Остроградского, получим

$$\int_{\Omega} (\psi \operatorname{div} \mathbf{U} - \varphi \operatorname{div} \mathbf{V}) d\Omega = \int_S (\psi \mathbf{U} - \varphi \mathbf{V}) \mathbf{n} dS + 2i \frac{M^2}{\beta^2} q \int_S \varphi \psi \cos(\mathbf{n}, x) dS,$$

где S — поверхность, ограничивающая объем Ω ; \mathbf{n} — внешняя по отношению к Ω нормаль к этой поверхности.

Пусть теперь $\psi = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — фундаментальное решение уравнения (1). Тогда для точек $\mathbf{x} \in \Omega$ получим представление потенциала скорости через его значения на границе S :

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{2iM^2 q \varphi_1}{\beta^2}. \quad (4)$$

Здесь

$$\varphi_0 = \int_S [G(\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \varphi - \varphi(\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) G] dS; \quad \varphi_1 = \int_S \varphi G n_{\xi} dS.$$

Вычислим теперь вектор скорости $\mathbf{v} = \nabla\varphi$, используя формулу Грина (4). Применяв преобразования, проведенные в [8], и равенство

$$\nabla_x G = -\nabla_y G + \mathbf{g},$$

имеем

$$\begin{aligned} \nabla\varphi_0 &= - \int_S [(\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \times \nabla_y G + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \nabla_y G - \varphi \mathbf{n} \Delta_y G] dS + \int_S [\mathbf{g}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{n} \cdot \nabla_y) \mathbf{g}] dS, \\ \nabla\varphi_1 &= - \int_S \varphi \nabla_y G n_\xi dS + \int_S \varphi g n_\xi dS = \\ &= - \int_\Omega \nabla_y \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (G\varphi) \right] d\Omega + \int_\Omega \frac{\partial}{\partial \xi} (G\nabla\varphi) d\Omega + \int_S \varphi g n_\xi dS = \\ &= - \int_S \left[\mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \xi} (G\varphi) - n_\xi (G\nabla\varphi + \mathbf{g}\varphi) \right] dS. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в формулу (4), окончательно находим

$$\begin{aligned} \nabla\varphi &= - \int_S [(\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \times \nabla_y G + \nabla_y G(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})] dS + \int_S [\mathbf{g}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{n} \cdot \nabla_y) \mathbf{g}] dS + \\ &+ 2iM^2 q / \beta^2 \int_S \left[\left(\mathbf{n} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \nabla\varphi n_\xi \right) G - \mathbf{g} n_\xi \varphi \right] dS - k^2 \beta^2 \int_S \mathbf{n} \varphi G dS. \quad (5) \end{aligned}$$

Интегральное представление (5) получено для произвольной точки \mathbf{x} , находящейся внутри области Ω с достаточно гладкой границей S . В случае задачи обтекания тонкого тела оно сохраняет тот же вид, если интегрирование вести по одной из сторон поверхности обтекаемого тела, а вектор \mathbf{v} заменить его скачком $[\mathbf{v}]$ при переходе через эту поверхность и учесть, что $[\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] = 0$. При этом удобно ввести векторную интенсивность вихревого слоя $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{n} \times [\mathbf{v}]$ (поверхностный ротор). Тогда $[\mathbf{v}] = \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{n}$, $[\varphi] = \int_{L(M_0)} (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{n}) \cdot d\mathbf{x}$. Линия $L(M_0)$ проведена на вихревой поверхности Σ от передней кромки лопатки до точки M_0 , в которой определяется значение потенциала.

Для рассматриваемой задачи $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, $(\mathbf{n} \cdot \nabla_y) \mathbf{g} = \partial \mathbf{g} / \partial z$, $g_x = g_z = 0$, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_x, \gamma_y, 0)$, и тогда

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = - \int_S \left(\boldsymbol{\gamma} \times \nabla_y G + [\varphi] \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \zeta} \right) dS + \int_S \left(\frac{2iM^2 q}{\beta^2} [v_\xi] - \beta^2 k^2 [\varphi] \right) \mathbf{n} G dS. \quad (6)$$

При $M = 0$ и $G = 1/(4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ из (6) получается формула Био — Савара, широко используемая в теории крыла и решеток.

Проектируя выражение для скорости (6) на нормаль к S в точке \mathbf{x} , получим, требуя выполнения условия непротекания лопатки, функциональное уравнение для определения вектора $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{y})$ в точках поверхности S . Вектор $\boldsymbol{\gamma}$ на лопатке и вихревой пелене имеет две компоненты: $\gamma_y = \gamma_{y+} + \gamma_{y-}$ и γ_x . Здесь γ_{y+} — интенсивность присоединенного вихря с осью, параллельной оси y ; γ_x и γ_{y-} — интенсивности свободных вихрей с осями вдоль осей x и y .

Интенсивности свободных вихрей можно выразить через интенсивность присоединенных вихрей:

для свободных вихрей на лопатке

$$\gamma_{y-}(x, y) = \frac{-i\omega}{V} \int_{-c}^x \gamma_{y+}(\xi, y) e^{i\frac{\omega}{V}(\xi-x)} d\xi; \quad (7)$$

для свободных вихрей с осью по y в точках вихревой пелены верхним пределом y интеграла в (7) должна быть координата выходной кромки лопатки $x = c$;

для свободных вихрей с осью по x

$$\gamma_x(x, y) = - \int_{-c}^x \frac{\partial \gamma_{y+}}{\partial y}(\xi, y) e^{i\frac{\omega}{V}(\xi-x)} d\xi.$$

Скачок потенциала определяется формулой

$$[\varphi](x, y) = - \int_{-c}^x \gamma_{y+}(\xi, y) e^{i\frac{\omega}{V}(\xi-x)} d\xi$$

на лопатке, а в следе верхний предел надо заменить на c .

Метод подковообразных вихрей. Интегральное представление (6) позволяет построить численный алгоритм, аналогичный методу П-вихрей в теории крыла конечного размаха в несжимаемой жидкости. Для этого предположим, что в области, занятой газом, имеется одна вихревая нить L , лежащая в плоскости $z = 0$. Ее интенсивность Γ будем считать постоянной вдоль L . В этом случае

$$\gamma(x) = \Gamma \frac{\partial x}{\partial s}$$

(s — дуговая координата линии L). В нашем случае s — либо y , либо x .

Заменим лопатки решетки и вихревые следы за ними вихревыми поверхностями и перейдем от непрерывного распределения вихрей к дискретному. Для этого разобьем поверхность лопатки на N_1 полос по y , каждую полосу на N_2 частей по x , а каждый полученный четырехугольник будем моделировать П-вихрем, который состоит из отрезка присоединенного вихря, направленного по оси y и имеющего размер $2\delta y$, с интенсивностью $\Gamma_{+i} = lV\Gamma_i$ и системы свободных вихрей, определенных в предыдущем разделе.

Используя интегральное представление (6), для нормальной к лопатке составляющей скорости, индуцируемой i -м присоединенным вихрем, получим

$$v_n^i = -\Gamma_i \int_{y_i - \delta y}^{y_i + \delta y} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \cos \delta + \frac{\partial G}{\partial \zeta} \sin \delta + 2i \frac{M^2 q}{\beta^2} G - \beta^2 k^2 \Delta \xi G \right) d\xi,$$

где $\Delta \xi$ — длина стороны элемента по оси x .

Так как подынтегральные функции имеют особенности, если точки x и y совпадают, то при вычислении интегралов их следует выделить так, чтобы интегралы от выделенных частей находились аналитически. Тогда

$$\int \frac{\partial G}{\partial \xi} d\eta = \int \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{x - \xi_i}{4\pi R^3} \right) d\eta + (x - \xi_i) I_1,$$

$$\int \frac{\partial G}{\partial \zeta} d\bar{\eta} - \int \left(\frac{\partial G}{\partial \zeta} - \frac{z - \zeta_i}{4\pi R^3} \right) d\bar{\eta} + (z - \zeta_i) I_1,$$

$$\int G d\eta = \int \left(G - \frac{1}{4\pi R} \right) d\eta + I_2.$$

Здесь $R^2 = (x - \xi_i)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta_i)^2$;

$$I_1 = \frac{\eta - y}{4\pi[(x - \xi_i)^2 + (z - \zeta_i)^2]R}; \quad I_2 = \frac{1}{4\pi} \ln |\eta - y + R|;$$

ξ_i, ζ_i — координаты i -го присоединенного вихря. Интегралы от функций, не содержащих особенностей, вычисляем приближенно по формуле

$$\int_{y_i - \delta y}^{y_i + \delta y} G_1 d\eta \approx 2\delta y G_1(y_i).$$

Аналогично получаются формулы для определения нормальной составляющей скорости, индуцируемой свободными вихрями, сходящими с i -го присоединенного вихря, и свободными вихревыми шнурами, сходящими с концов этого вихря. Для краткости запишем эти формулы для случая $\delta=0$:

от свободных вихрей

$$v_{n1}^i(\mathbf{x}_j, x_i, \eta) = iq\Gamma_i e^{-iqx_{0ij}} \left\{ 2\delta y \int_{-\infty}^{x_{0ij}} e^{iq\xi} \left[\frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\xi}{4\pi R_1^3(Y)} + \right. \right.$$

$$+ 2i \frac{M^2 q}{\beta^2} \left(G - \frac{1}{4\pi R_1(Y)} \right) \left. \right] d\xi + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{x_{0ij}} \frac{e^{iq\xi} - 1}{\xi} \left[\frac{Y_+}{R_1(Y_+)} - \frac{Y_-}{R_1(Y_-)} \right] d\xi +$$

$$+ i \frac{M^2 q}{2\pi\beta^2} \int_{-\infty}^{x_{0ij}} e^{iq\xi} \ln \left| \frac{Y_+ + R_1(Y_+)}{Y_- + R_1(Y_-)} \right| d\xi + \frac{1}{4\pi} [Y_+ I_3(Y_+) - Y_- I_3(Y_-)] \left. \right\},$$

от свободного вихревого шнура

$$v_{n-}^i(\mathbf{x}_j, x_i, \eta) = \Gamma_i e^{-iqx_{0i}} \left\{ \int_{-\infty}^{x_{0ij}} \left[e^{iq\xi} \frac{\partial G}{\partial \eta} + \frac{Y}{4\pi R_1^3(Y)} \right] d\xi + I_4 \right\},$$

от скачка потенциала

$$v_{n2}^i(\mathbf{x}_j, x_i, \eta) = \Gamma_i e^{-iqx_{0ij}} \beta^2 k^2 \left\{ 2\delta y \int_{-\infty}^{x_{0ij}} e^{iq\xi} \left(G - \frac{1}{4\pi R_1(Y)} \right) d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{x_{0ij}} e^{iq\xi} \ln \left| \frac{Y_+ + R_1(Y_+)}{Y_- + R_1(Y_-)} \right| d\xi \right\}.$$

Здесь $Y_{\pm} = Y \pm \delta y$; $Y = \eta - y_j$; $x_{0ij} = x_j - x_i$; $R_1^2(Y) = \xi^2 + Y^2$;

$$I_3(Y) = \int \frac{d\xi}{\xi R_1(Y)} = -\frac{1}{|Y|} \ln \left| \frac{|Y| + R_1(Y)}{\xi} \right|; \quad \Delta\xi = \frac{1}{\lambda N_2};$$

$$I_4 = \int \frac{d\xi}{R_1^3(Y)} = \frac{\xi}{Y^2 R_1(Y)}.$$

Координаты вихрей и контрольных точек на пластине находятся стандартным способом в соответствии с методом дискретных вихрей.

В результате удовлетворения граничного условия непротекания пластин решетки получаем систему алгебраических уравнений для интенсивностей присоединенных вихрей Γ_i ($i = 1, \dots, M_1$, $M_1 = N_1 \times N_2$). Правая часть этой системы определяется законом колебаний лопаток решетки.

Аэродинамические характеристики. После нахождения Γ_i перепад давления на лопатке определяется с помощью теоремы Жуковского «в малом»

$$p_+ - p_- = \rho_\infty V \gamma_{y+},$$

где p_\pm — предельные значения p при подходе к поверхности лопатки справа и слева; ρ_∞ — плотность газа в невозмущенном потоке.

Коэффициенты аэродинамической силы C_z и момента C_m относительно начала координат определяются формулами

$$C_z = \frac{2Z}{\rho_\infty V^2 S} = \frac{2}{S} \int_S \gamma_{y+} dx dy,$$

$$C_m = \frac{M}{\rho_\infty V^2 c S} = \frac{1}{c S} \int_S (\mathbf{x} \times \mathbf{i}_z) \gamma_{y+} dx dy$$

(S — площадь поверхности лопатки, \mathbf{i}_z — орт оси z , M — момент).

В дискретной форме с использованием найденных $\bar{\Gamma}_i$ эти формулы имеют вид

$$C_z = \frac{4\delta y \lambda}{\beta} \sum_{i=1}^{M_1} \Gamma_i, \quad C_m = \frac{4\delta y \lambda^2}{\beta} \sum_{i=1}^{M_1} (\mathbf{x} \times \mathbf{i}_z) \Gamma_i.$$

Сила и момент, действующие в каком-либо сечении по высоте лопатки, находятся по аналогичным формулам, только суммирование проводится в пределах одной полосы по y .

Обсуждение результатов расчета. По изложенному алгоритму проведены расчеты на ПЭВМ нестационарных аэродинамических характеристик решеток при различных значениях определяющих параметров.

На рис. 2 и 3 показана зависимость коэффициентов силы $C_{z\alpha}$ и момента $C_{m\alpha}$ относительно оси y , проведенной по передней кромке лопатки при крутильных колебаниях относительно передних кромок лопаток, от числа Струхала $k = 2\omega c/a$ для значений густоты решетки $\tau = 2c/h$, равных 1 и 2. При этом угол выноса решетки $\delta = 0$, сдвиг фазы между колебаниями соседних лопаток $\mu = \pi$, форма колебаний оставалась неизменной по высоте лопатки. Штриховые линии — результаты расчета по плоской теории дозвукового обтекания решеток пластин, приведенные в [9]. Как видно из представленных расчетов, отличие результатов незначительно, за исключением больших густот ($\tau = 2$) и чисел Струхала ($k \sim 1$). Проведенное сравнение показывает удовлетворительное соответствие расчетов по предлагаемому методу результатам, полученным на основе более простой двумерной теории.

На рис. 4 и 5 представлено изменение модуля коэффициента погонной аэродинамической силы $|C_{z\alpha}|$ вдоль размаха лопаток ($y \rightarrow y/l$) при удлинениях $\lambda = 1, 3, 5$ и ∞ для сжимаемой и несжимаемой жидкостей

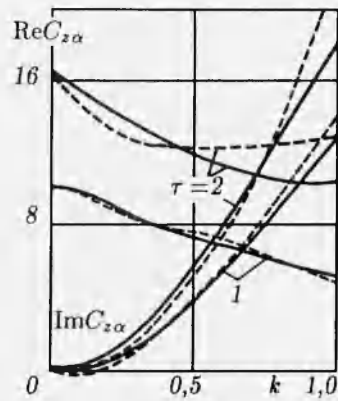


Рис. 2

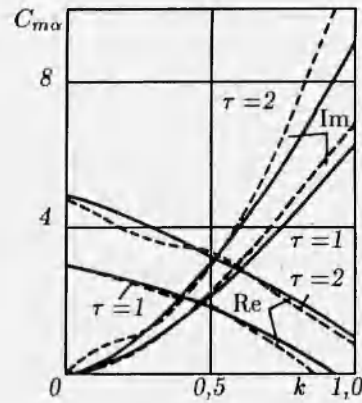


Рис. 3

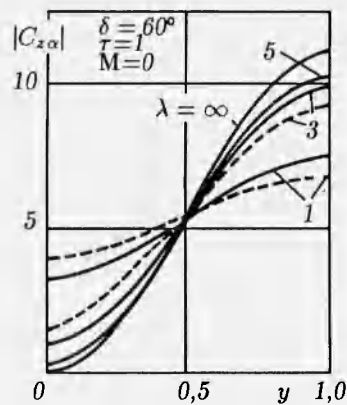


Рис. 4

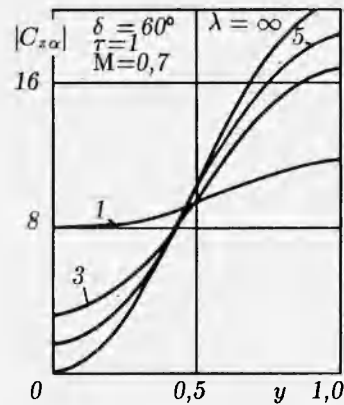


Рис. 5

при сдвиге фазы $\mu = \pi$. Расчет проводился для решетки с параметрами: $\tau = 1$, $\delta = 60^\circ$. При этом число Струхала $k_1 = \omega c/V$ принималось равным 0,5, а число Маха $M = 0$ и 0,7. Форма колебаний лопаток в направлении оси z $v(x, y) = (1 + ik_1 x)[1 - \cos(\pi y/l)]$ отвечает крутильным колебаниям пластин относительно их середины с переменной амплитудой закрутки вдоль оси y .

Случай $\lambda = \infty$ соответствует расчету по гипотезе плоских поперечных сечений, когда аэродинамические характеристики при каждом значении y зависят от закона колебаний пластины только в рассматриваемом сечении. Штриховые кривые на рис. 4 построены по результатам [1]. Соответствие результатов удовлетворительное. Подтверждается вывод, сделанный в [1] о том, что с уменьшением удлинения пластины происходит выравнивание распределения аэродинамической нагрузки вдоль размаха пластины. Судя по приведенным данным, этот эффект проявляется примерно одинаково для сжимаемой и несжимаемой жидкостей, в [1] же утверждается, что при $M = 0,7$ выравнивание происходит более резко. В среднем сечении кривые при разных λ пересекаются в одной точке как при $M = 0$, так и при $M = 0,7$, т. е. результаты расчетов совпадают с данными, получаемыми по плоской теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горелов Д. Н., Курзин В. Б., Сарен В. Э. Аэродинамика решеток в нестационарном потоке. Новосибирск: Наука, 1971.
2. Липовой Г. С. Метод факторизации в задачах гидроаэромеханики. Киев: Наук. думка, 1977.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
4. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.
5. Левин Л. Теория волноводов. М.: Радио и связь, 1981.
6. Нобл Б. Метод Винера — Хопфа. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
7. Галишникова Т. Н., Ильинский А. С. Численные методы в задачах дифракции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.
8. Рябченко В. П. Квазидвумерное приближение в задаче стационарного дозвукового обтекания пространственной кольцевой решетки // ПМТФ. 1982. № 2.
9. Горелов Д. Н., Курзин В. Б., Сарен В. Э. Атлас нестационарных аэродинамических характеристик решеток профилей. Новосибирск: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 29/III 1994 г.
