ПМТФ, № 5, 1972

УДК 536.24:532.526

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АНИЗОТРОПНЫХ ВОЛОКНИСТЫХ ПОРИСТЫХ ТЕЛ

Ю. М. Глушков

(Обнинск)

В [1] отмечается необходимость четкого разделения двух задач физики пористых систем: описание самой пористой среды и рассмотрение процессов, происходящих в этой среде. Например, движение жидкости или движение броуновских частиц в пространстве пор пористой среды не могут быть успешно изучены, если нет корректного описания самой среды. Ниже рассматривается описание анизотропных пористых тел из стекловолокна, широко используемых в качестве фильтрующих и теплоизолирующих сред. Даны конструктивные определения ранее интуитивно используемых понятий «структура пористого тела» и «однородное (неоднородное) пористое тело». Для случайной среды, реализациями которой являются модельные пористые тела с заданной структурой, рассчитаны характерные усредненные параметры и их распределения, используемые в расчетах переноса и механических свойств. Рассмотрен способ экспериментального анализа структуры реальных неоднородных пористых тел, основанный на изучении свойств случайной зависимости коэффициента пористости от координаты.

1. Понятия «структура» и «однородность» в применении к пористым телам. Считаем структуру пористого тела заданной, если известны два признака: а) геометрические фигуры и относительные размеры исходных структурных элементов, например волокон, б) вероятностный закон, определяющий способ совместного расположения исходных структурных элементов в пространстве.

Обозначим через x какое-либо свойство пористого тела. Понятие «однородное (неоднородное) по x пористое тело» определим через понятие структуры следующим образом: пористое тело называется однородным (неоднородным) по x, если влияющие на выбранный параметр признаки структуры этого тела не зависят (зависят) от координаты. Если приходится иметь дело с пористыми телами с различными структурами, то удобнее пользоваться формулировками типа «пористое тело с однородной (неоднородной) по x структурой y». В данном случае считаем структуру пористого тела однородной (неоднородной) по x, если влияющие на x структурные признаки не зависят (зависят) от координаты.

2. Модельные пористые тела с однородной по α структурой А. Пусть задана случайная среда в виде пары $\{\Lambda\ (A),\ dP\ (\lambda)\}$, где $\Lambda\ (A)$ — некое множество детально описанных пористых тел λ с однородной по α структурой А и $dP\ (\lambda)\ /\ d\lambda$ — плотность вероятности каждой реализации из $\Lambda\ (A)$.

Обозначим через $Q_0^{(i)}$ множество точек некоторого i-го прямолинейного волокна. Выделим цилиндрическую систему координат $\{\rho, \varphi, z\}$ с осью z, направленной в сторону единичного вектора $\mathbf{k}$. Через $\mathbf{r}_i = \{\rho_i, \varphi_i, z_i\}$ обозначим точку пересечения оси i-го волокна $Q_0^{(i)}$ с плоскостью Q, содержащей ось z и перпендикулярной к проекции оси волокна на плоскость $z = 0$. Через ω_i обозначим угол между осью z и осью волокна. Координаты $\mathbf{r}_i$, ω_i однозначно определяют положение i-го бесконечного волокна в пространстве.

Определим Λ (A) как множество всех возможных модельных пористых тел (фильтров) с однородной по α структурой A, удовлетворяющих следующим признакам:

1) каждый фильтр из Λ (A) имеет равные геометрические фигуры G, одинаково ориентированные к вектору $\mathbf{k}$, а именно — пусть G — прямой круглый цилиндр, ограниченный плоскостями $z = 0$, $z = h$ и цилиндрической поверхностью $\rho = R$;

2) по структурному признаку все фильтры из Λ (A) образованы прямолинейными, не имеющими внутри G окончаний, круглыми волокнами с радиусами a, причем волокна расположены независимо друг от друга и их координаты ρ_i, φ_i, z_i, ω_i, a_i, $(i = 1, 2, \ldots, m; m = 0, 1, 2, \ldots)$ являются независимыми случайными величинами с плотностями распределений соответственно

$$R^{-1},\ (2\pi)^{-1},\ h^{-1},\ \delta(\omega_i - \pi 2^{-1}),\ f(a) \tag{2.1}$$

3) среднее количество пересекающих область G волокон равно $\langle m\rangle$;

4) полагаем, что

$$\langle a\rangle R^{-1} \ll 1,\quad \langle a\rangle h^{-1} \ll 1 \tag{2.2}$$

Плотности распределений (2.1) приблизительно соответствуют таковым для реальных анизотропных стекловолокнистых фильтров и, следовательно, заданное множество Λ (A) модельных пористых тел является приближенным отображением соответствующего множества реальных анизотропных волокнистых пористых тел с подходящей структурой и характеристиками G, $f(a)$ и $\langle m\rangle$.

Из (2.1) следует, что функция $dP(\lambda) / d\lambda$ плотности вероятности обнаружения фильтра $\lambda = (a_1, a_2, \ldots, a_m; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m)$ из m прямолинейных волокон, имеющих радиусы и координаты соответственно a_i и $\mathbf{r}_i$, имеет вид

$$dP(\lambda) = \frac{1}{m!}\left(\frac{\langle m\rangle}{2\pi Rh}\right)^m \exp(-\langle m\rangle) \prod_m f(a_i)\, da_i\, d\rho_i\, d\varphi_i\, dz_i \tag{2.3}$$

$$\rho \in [0, R],\quad \varphi \in [0, 2\pi],\quad z \in [0, h]$$

Техника вывода (2.3) аналогична, например, [2].

Согласно (2.3) вероятность $p(m)$ того, что произвольный фильтр из Λ (A) состоит из m волокон, равна

$$p(m) = \langle m\rangle^m \exp(-\langle m\rangle) / m! \tag{2.4}$$

причем при больших значениях $\langle m\rangle$ действительно [3]

$$\mathrm{Prob}\{m \leqslant x \mid \langle m\rangle\} \approx \Phi((x + 0.5 - \langle m\rangle)\langle m\rangle^{-1/2}) \tag{2.5}$$

$$\Phi(y) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{y} \exp(-t^2/2)\, dt$$

Обозначим через Λ_1 (A) подмножество Λ (A) таких фильтров, в которых точка $\mathbf{r}$ не принадлежит волокнам. Используя равенство

$$\langle\beta\rangle = \int_{\Lambda_1(A)} dP(\lambda)$$

получим связь между $\langle m\rangle$ и другими параметрами фильтра

$$\gamma\langle m\rangle = V\langle\alpha\rangle / \langle\zeta\rangle\, \pi\langle a^2\rangle$$

$$\gamma = -\langle\alpha\rangle / \ln\langle\beta\rangle,\quad \langle\zeta\rangle = 2^{-1}\pi R,\quad \langle\beta\rangle \leqslant 1 \tag{2.6}$$

где V — объем области G, ζ_i — длина отрезка i-го волокна, заключенного в G, и $\langle\alpha\rangle = 1 - \langle\beta\rangle$.

Из (2.6) следует: $\langle\alpha\rangle \to 1$ при $\langle m\rangle \to \infty$. Это результат того, что в модельном фильтре волокна при встрече пронизывают друг друга, а не огибают. Величину $\gamma \in [0, 1]$ можно использовать в качестве одного из критериев соответствия модели реальным фильтрам, считая, что при $\gamma = 1$ имеется полное соответствие по γ.

Пусть P_j' — вероятность того, что некоторая точка в пространстве произвольного фильтра из Λ (А) принадлежит одновременно j волокнам ($j = 0, 1, 2, \ldots$). Используя (2.3) и (2.6), получим

$$P_j' = (-1)^j \langle\beta\rangle \ln^j \langle\beta\rangle / j! \tag{2.7}$$

При малых $\langle\alpha\rangle$ имеет место неравенство $P_1' \gg \sum_{j=2}^{\infty} P_j'$ и, следовательно, $\gamma \approx 1$. Именно малыми $\langle\alpha\rangle$ характеризуются широко используемые стекловолокнистые фильтры и фильтры ФП.

Вычисление с помощью (2.3) вероятности свободного прямолинейного пробега сферической частицы на расстояние l не меньше x в направлении единичного вектора Ω в произвольном фильтре из Λ (А) дает

$$\mathrm{Prob}\{l \geqslant x \mid \Omega, r\} = \langle\beta\rangle^{\nu} \exp\left[-x\langle\beta\rangle^{\nu} / \langle l(\Omega, r)\rangle\right] \tag{2.8}$$

где

$$\langle l(\Omega, r)\rangle = -\frac{\pi}{2} \frac{\langle(a+r)^2\rangle}{\langle a+r\rangle} \frac{\langle\beta\rangle^{\nu}}{\nu \ln\langle\beta\rangle} \frac{\pi}{2\mathrm{E}(|\Omega \times \mathbf{k}|)} \tag{2.9}$$

средний свободный прямолинейный пробег сферической частицы радиуса r в направлении вектора Ω в произвольном фильтре из Λ (А), Е — полный эллиптический интеграл второго рода, $\nu = \langle(a+r)^2\rangle / \langle a^2\rangle$.

Член $\langle\beta\rangle^{\nu}$ перед экспонентой в (2.8) учитывает вероятность того, что в начальный момент пробега частица свободна.

Для $|\Omega' \times \mathbf{k}| = 1$ и $\langle\alpha\rangle \ll 1$ выражение (2.9) можно записать в виде

$$\langle L_0\rangle = \pi\langle\beta\rangle / 2\langle l(\Omega', 0)\rangle \tag{2.10}$$

где $\langle L_0\rangle$—средняя суммарная длина волокон, приходящаяся на единицу площади поверхности фильтра с толщиной $h = 2\langle a\rangle$, $\langle l(\Omega', 0)\rangle \langle\beta\rangle^{-1}$ — средний свободный пробег в плоскости, заполненной бесконечными прямыми линиями по правилу (2.1) со средней концентрацией $\langle L_0\rangle$. Выражение (2.10) совпадает с результатом [4].

В соответствии с (2.8) следует исправить показатель степени выражения (7) в работе [5], умножив его на величину $\langle\beta\rangle^{\nu}$. В той же работе выражение для среднего свободного пробега (3) должно быть исправлено в соответствии с результатом (2.9).

Перейдем к задаче о пересечениях волокон в фильтрах. Способы определения N-кратного пересечения волокон неоднозначны для $N > 2$. При вычислении концентрации пересечений волокон с помощью формулы (2.9) следует считать, что волокно $Q_0^{(1)}$ участвует в N-кратном пересечении, если $\bigcup_{j=2}^{N} z(1, j)$ — связная область, где $z(i, j)$ — проекция $Q_0^{(i)} \cap Q_0^{j}$ на плоскость $z = 0$. Пусть в расчете на единицу объема фильтра величина n_i обозначает среднее количество i-кратных пересечений волокон. Используя (2.6) и (2.9), получим асимптотическое выражение

$$2n_2 + 3n_3 + 0(n_4) = 8\langle a\rangle \ln^2\langle\beta\rangle / \pi^3\langle a^2\rangle^2 \tag{2.11}$$

в котором коэффициент 3 при n_3 верен лишь при $n_4 \ll n_3$. Согласно оценке (2.7) при $\langle\alpha\rangle \ll 1$ действительно $n_3 \ll n_2$ и выражение (2.11) дает концентрацию двойных пересечений волокон, в $2/\pi$ раза меньшую, чем результат [6], и в $^2/_3$ раза меньшую, чем результат [7].

Из (2.7) и (2.11) автоматически следует, что средний пересеченный объем v' при пересечении двух волокон в фильтрах из Λ (A) равен

$$\lim_{R\to\infty} v' = \lim_{\langle\alpha\rangle\to 0} P_2' / n_2 = \pi^3 \langle a^2\rangle^2 / 8\langle a\rangle \tag{2.12}$$

Выражения (2.11), (2.12) полезны при изучении таких свойств фильтров, как прочность, упругость, теплопроводность и т. д.

Рассмотрим важную характеристику случайной среды $\{\Lambda(A), dP(\lambda)\}$ — функцию $H_x(\alpha)$ плотности вероятности того, что произвольная реализация из Λ (A) с заданной геометрией G имеет коэффициент заполнения пространства α. Пусть G пересекают m волокон по правилу (2.1). Обозначим через $\tau_m(\alpha)$ плотность вероятности того, что в G коэффициент заполнения пространства равен α. Если полагать $\gamma = 1$, то τ_m находится методом Маркова [8]

$$\tau_m(\alpha)\,d\alpha = \frac{d\alpha}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_m}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\left\{1 - \frac{z}{2m^{1/2}}\frac{\varkappa_3}{\varkappa_2^{3/2}}\left[1 - \frac{2}{3}\left(\frac{z^2}{2}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{8m}\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}\left[1 - 4\left(\frac{z^2}{2}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{z^2}{2}\right)^2\right] + 0\,(zm^{-3/2})\right\} \tag{2.13}$$

$$z = (\alpha - m\langle\xi\rangle)\,\sigma_m^{-1}, \quad \sigma_m^2 = m\varkappa_2$$

где $\varkappa_i$ — семиинварианты [9] сложной случайной величины $\xi = \zeta\pi a^2 V^{-1}$. Для фильтра с геометрией G имеем $\langle\zeta^n\rangle = 4R^2\langle\zeta^{n-2}\rangle n(n+1)^{-1}$. Окончательно, используя результаты (2.4) и (2.13), получим для искомой функции H_x выражение

$$H_x(\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} p(m)\,\tau_m(\alpha) \tag{2.14}$$

Согласно лемме о пределе сложной случайной функции [10] асимптотическое выражение для (2.14) имеет вид

$$H_x(\alpha) = (2\pi\sigma_x^2)^{-1/2}\exp\left[-(\alpha - \langle\alpha\rangle)^2 / 2\sigma_x^2\right] \tag{2.15}$$

$$\sigma_x^2 = \langle m\rangle\langle\xi^2\rangle = 16\langle\alpha\rangle\langle a^4\rangle / 3\pi Rh\langle a^2\rangle, \quad \langle m\rangle \gg 1$$

Следует подчеркнуть, что при неизменных $\langle\alpha\rangle$ и V параметр σ_x через $\langle m\rangle$ и $\langle\zeta^2\rangle$ зависит от геометрии фигуры G и от ее ориентации к вектору $\mathbf{k}$.

Использованный выше способ определения свободного пробега в фильтрах из Λ (A) может быть легко обобщен на случай фильтров из некруглых волокон. Рассмотрим бесконечный модельный фильтр из ленточных волокон с закругленными краями и ориентированных широкой стороной перпендикулярно вектору $\mathbf{k}$. Подсчет для таких фильтров величины среднего свободного пробега тонкого луча с помощью модифицированной формулы типа (2.3) дает

$$\langle l(\Omega, 0)\rangle = -s\langle\beta\rangle\{2b'[\chi(\Omega\cdot\mathbf{k}) + 2\pi^{-1}\mathrm{E}(|\Omega\times\mathbf{k}|)]\ln\langle\beta\rangle\}^{-1} \tag{2.16}$$

$$b'\chi = a' - b', \quad s = \pi b'^2\ (1 + 4\pi^{-1}\chi)$$

где $2a'$ — ширина волокна, $2b'$ — толщина волокна s — площадь поперечного сечения ленточного волокна.

Предположим, что при постоянных s и $\langle\alpha\rangle$ толщина ленточных волокон в фильтрах неограниченно уменьшается. Тогда

$$\lim_{\chi\to\infty}\langle l(\Omega, 0)\rangle = \begin{cases} 0, & (\Omega\cdot\mathbf{k}) \neq 0 \\ \infty, & (\Omega\cdot\mathbf{k}) = 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

Первый предел в (2.17) действителен лишь для фильтров, простирающихся бесконечно в плоскости, перпендикулярной к $\mathbf{k}$.

Выражения (2.9) и (2.16) показывают, что свободный пробег в пористом теле является функцией геометрической фигуры исходных структурных элементов и их ориентации в пространстве.

3. Выбросы случайного процесса $\alpha(t)$ для пористых тел с однородной по α структурой А. Пусть для пористого тела с однородной по α структурой А и ограниченного бесконечными плоскостями $z=0$ и $z=h$ случайная функция $\alpha(t)$, $t\in(-\infty, \infty)$ определяет коэффициент заполнения пространства в цилиндрической области G в зависимости от координаты $t=\rho/2R$ при $\varphi=\mathrm{const}$, где (ρ, φ) — точка пересечения оси цилиндра G с плоскостью $z=0$. Согласно (2.3) эта функция является эргодической [11] и независимой от φ. Согласно (2.15) при $\langle m\rangle \gg 1$ функция $\alpha(t)$ является также и нормальной. Найдем среднее количество выбросов графика функции $\alpha(t)$ над уровнем $\langle\alpha\rangle$ на единичном отрезке оси t.

Запишем функцию $\alpha(t)$ в виде

$$\alpha(t) = X(t, \langle\alpha\rangle) + \langle\alpha\rangle, \quad \langle X\rangle = 0 \tag{3.1}$$

Корреляционная функция $K_x(\tau)$ процесса $\alpha(t)$ имеет вид

$$K_x(\tau) = \langle X_1X_2\rangle = \sigma_x^2\frac{2}{\pi}\int_{\theta_0}^{\pi/2} I(k)\,d\theta \tag{3.2}$$

где $X_i = X(t_i, \langle\alpha\rangle)$, $k^2 = 1-\tau^2\cos^2\theta$, $\tau = (\rho_1-\rho_2)/2R$

$$I(k) = (2-k^2)\,\mathbf{E}(k) - 2(1-k^2)\,\mathbf{K}(k), \qquad \theta_0 = \begin{cases} \arccos|1/\tau|, & |\tau|\geqslant 1 \\ 0, & |\tau|\leqslant 1 \end{cases}$$

$\mathbf{K}$ — полный эллиптический интеграл первого рода, σ_x определена в (2.15).

Вычисление (3.2) дает

$$k_x(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty}(a_m + b_m\ln|\tau|)\,|\tau^m|, \quad |\tau|\leqslant 1 \tag{3.3}$$

$$k_x(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m|\tau^{-m}|, \quad |\tau|\geqslant 1 \tag{3.4}$$

где $k_x(\tau)$ — коэффициент корреляции, а значения коэффициентов a_m, b_m, c_m приведены в табл. 1.

Процесс $\alpha(t)$ дает бесконечную концентрацию выбросов, поскольку его корреляционная функция не имеет второй производной в точке $\tau=0$. Реальный прибор с конечной чувствительностью записывает раздельно пересечения графика $\alpha(t)$ с уровнем $\langle\alpha\rangle$ в точках t_1 и t_2 при условии $|t_1-t_2|\geqslant\Delta$, где Δ — некоторая постоянная прибора. Определение концентрации таких «грубых» выбросов для многомерных марковских процессов сводится к решению дифференциального уравнения типа второго уравнения Колмогорова [11]. Для рассматриваемого процесса этот метод сложен, поэтому желательно получить результат в рамках корреляционной теории.

Таблица 1

n	a_{2n}	b_{2n}	c_{2n+1}
0	1.000 000	0.000 000	0.292 180
1	—0.809 581	0.750 000	0.018 458
2	0.122 773	—0.070 312	0.004 341
3	0.005 830	0.007 324	0.001 596
4	0.001 074	0.002 002	—
5	0.000 321	0.000 788	—

Пусть можно пренебречь тонкими деталями графика функции $\alpha(t)$ на отрезках оси t, меньших Δ. Сгладим график функции в области $t \in [-n\Delta, n\Delta]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ следующим образом:

1) выделим на оси t точки $t_i = (i - n)\Delta$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 2n$;

2) обозначим через $L_{\Delta, n}$ линейную однородную операцию построения интерполяционного полинома Лагранжа степени $2n$, совпадающего со значениями $\alpha(t)$ в точках t_i.

Тогда

$$L_{\Delta, n}[\alpha(t)] = \alpha_{\Delta, n}(t) \tag{3.5}$$

Коэффициент корреляции $k_{x, \Delta, n}(\tau)$, $\tau \in [-n\Delta, n\Delta]$ для случайной функции $\alpha_{\Delta, n}(t)$ на ограниченном интервале имеет вид

$$k_{x, \Delta, n}(\tau) = L_{\Delta, n} L_{\Delta, n}[k_x(\tau)] \tag{3.6}$$

Для всей оси соответственно имеем

$$k_{x, \Delta}(\tau) = \lim_{n\to\infty} k_{x, \Delta, n}(\tau) \tag{3.7}$$

Вторая и четвертая производные от $k_{x, \Delta}$ в точке $\tau = 0$ равны

$$k''_{x, \Delta}(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\Delta^2} \sum_{i=1}^{n} d_i(n)[1 - k_x(i\Delta)] \tag{3.8}$$

$$k^{(4)}_{x, \Delta}(0) = -\lim_{n\to\infty} \frac{24}{\Delta^4} \sum_{i=1}^{n} d_i(n) D_i(n)[1 - k_x(i\Delta)]$$

где

$$d_i(n) = (-1)^i \frac{2}{i^2} \frac{n!\,n!}{(n-i)!\,(n+i)!}, \quad D_i(n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} - \frac{1}{i^2}$$

Если разложение $k_x(\tau)$ в ряд типа (3.3) действительно для всей оси τ, тогда, подставляя (3.3) в (3.8), получим

$$k''_{x, \Delta}(0) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} (s_{1,m} a_m + s_{2,m} b_m + s_{1,m} b_m \ln \Delta) \Delta^{m-2} \tag{3.9}$$

$$k^{(4)}_{x, \Delta}(0) = 24 \sum_{m=1}^{\infty} (s_{3,m} a_m + s_{4,m} b_m + s_{3,m} b_m \ln \Delta) \Delta^{m-4}$$

где

$$s_{1,m}(n) = -\sum_{i=1}^{n} d_i(n)\, i^m, \quad s_{2,m}(n) = -\sum_{i=1}^{n} d_i(n)\, i^m \ln i$$

$$s_{3,m}(n) = \sum_{i=1}^{n} d_i(n)\, D_i(n)\, i^m, \quad s_{4,m}(n) = \sum_{i=1}^{n} d_i(n)\, D_i(n)\, i^m \ln i$$

$$s_{j,m} = \lim_{n\to\infty} s_{j,m}(n)$$

Значения коэффициентов $s_{j,m}$ приведены в табл. 2. Вследствие того что в рассматриваемом случае ряд вида (3.3) действителен лишь для $|\tau| \leqslant 1$, погрешность вычисления производных от $k_{x,\Delta}$ по формулам (3.9) возрастает с увеличением Δ, составляя меньше процента для $\Delta \leqslant 0.5$ и увеличиваясь до 5% при $\Delta = 1$.

Таблица 2

j	$s_{j,1}$	$s_{j,2}$	$s_{j,3}$	$s_{j,4}$	$s_{j,5}$
1	1.3862	1.0000	0.5000	0.0000	—0.2516
2	—0.3196	—0.4514	—0.5304	—0.4262	—0.0312
3	—0.4774	0.0000	0.5637	1.0000	0.9138
4	0.4063	0.5401	0.5529	0.2497	—0.4790

В расчете на единицу интервала τ среднее количество выбросов $N_{x,\Delta}(\tau_0)$ случайной дифференцируемой функции $\alpha_\Delta(t)$ за уровень $\langle\alpha\rangle$, длительность которых превышает τ_0, равна

$$N_{x,\Delta}(\tau_0) = N_{x,\Delta}(0)\left(1 - \int_0^{\tau_0} p(\tau)\, d\tau\right) \tag{3.10}$$

где $p(\tau)$ — плотность вероятности того, что выброс имеет длительность τ. Согласно [12] для дифференцируемых процессов

$$N_{x,\Delta}(0) = \pi^{-1}\sqrt{-k''_{x,\Delta}(0)} \tag{3.11}$$

$$p(\tau) \leqslant p_0(\tau) = -\tau\left(k^{(4)}_{x,\Delta}(0) - k''^2_{x,\Delta}(0)\right) / 8k''_{x,\Delta}(0) \tag{3.12}$$

причем в (3.12) знак равенства действителен лишь при $\tau \to 0$. Производные от $k_{x,\Delta}(\tau)$ определены в (3.8) и (3.9). Как видно из (3.10), функция $N_{x,\Delta}(\tau_0)$ не зависит от $\langle\alpha\rangle$, R и от $f(a)$. От этих параметров зависит лишь амплитуда функции $\alpha_\Delta(t)$. Концентрация выбросов $N'_{x,\Delta}(\tau_0)$ в расчете на единицу длины интервала ρ равна

$$N'_{x,\Delta}(\tau_0) = N_{x,\Delta}(\tau_0) / 2R \tag{3.13}$$

Это значит, что

$$N'_{x,\Delta}(\tau_0)\, R = \mathrm{const} \tag{3.14}$$

причем величина R ограничена условием (2.2).

Представляет интерес сравнить теоретические выражения (3.9), (3.10) — (3.12) с результатами эксперимента. На микрофотометре МФ-4 снималась функция $i(t)$ оптической прозрачности реального стекловолокнистого фильтра с подходящей структурой и с параметрами $\langle\alpha\rangle = 8.52\cdot$

$\cdot 10^{-3}$, $\langle a \rangle = 1.57 \cdot 10^{-4}$ *см*, $\langle a^2 \rangle = 2.87 \cdot 10^{-8}$ *см*^{2}; $h = 0.316$ *см*. Считалось, что точки пересечения графиком функции $i(t)$ уровня $\langle i \rangle$ соответствуют точкам пересечения графиком функции $\alpha(t)$ уровня $\langle \alpha \rangle$. Использовался порядок подсчета пересечений, частично исключающий влияние неоднородностей реального фильтра на результат. Для величины α_0, удовлетворяющей условию

$$0.99 = \int\limits_{\langle \alpha \rangle - \alpha_0}^{\langle \alpha \rangle + \alpha_0} H_x(\alpha)\, d\alpha$$

определялась соответствующая величина i_0 и предполагалось, что в фильтре нарушена однородность в той области значений t, где график $i(t)$ выходит за пределы области $[\langle i \rangle - i_0, \langle i \rangle + i_0]$. При подсчете выбросов функции $i(t)$ отбрасывались выбросы с длительностью менее 0.1 *см* на диаграммной ленте и отбрасывались выбросы с амплитудой $|i - \langle i \rangle| > i_0$. Полученные экспериментальные значения концентрации выбросов равны 0.49 и 0.41 соответственно для значений $\Delta = 0.277$ и 0.555. Приближенно соответствующие им теоретические значения $N_{x,\Delta}(\Delta)$ равны 0.57 и 0.48.

4. Модель фильтра с неоднородной по α структурой А. Рассмотрим модель неоднородного по α фильтра со структурой А в виде

$$\alpha(t) = X(t, \alpha_1) + \alpha_1 \tag{4.1}$$
$$\alpha_1 = Y(t) + \langle \alpha \rangle, \quad \langle X \rangle = 0, \quad \langle Y \rangle = 0$$

По аналогии с (3.1) случайная функция α_1 в (4.1) играет роль некоторой локальной средней величины, причем Y изменяется медленнее по сравнению с X при заданном R. Это означает, что в (2.3) параметр $\langle m \rangle$ заменяется некоторой функцией координаты, изменяющейся мало на расстояниях порядка $2R$ (второй признак структуры). Пользуясь представлением (4.1), сведем исследование структуры неоднородного фильтра к исследованию функции $Y(t)$.

Корреляционная функция процесса (4.1) имеет вид

$$K_\alpha(\tau) = \langle X_1 X_2 \rangle + \langle X_1 Y_2 \rangle + \langle Y_1 X_2 \rangle + \langle Y_1 Y_2 \rangle \tag{4.2}$$
$$X_i = X(t_i, \;\; Y(t_i) + \langle \alpha \rangle), \quad Y_i = Y(t_i)$$

Полагая, что сечение случайной функции α_1 имеет нормальную плотность распределения $H_y(\alpha_1)$ с параметрами σ_y и $\langle \alpha \rangle$, получим

$$K_\alpha(\tau) = \langle X_1 X_2 \rangle + \langle Y_1 Y_2 \rangle \tag{4.3}$$

где функция $\langle X_1 X_2 \rangle$ определена в (3.2) — (3.4). Таким образом, корреляционная функция процесса $\alpha_1(t)$ равна

$$K_y(\tau) = K_\alpha(\tau) - K_x(\tau) \tag{4.4}$$

и, следовательно,

$$\sigma_y^2 = K_\alpha(0) - \sigma_x^2 \tag{4.5}$$

где $K_\alpha(\tau)$ определяется экспериментально.

Параметры $\langle \alpha \rangle$, σ_y и функция $K_y(\tau)$ дают достаточно полную информацию о качестве неоднородного фильтра. Вместо K_y можно использовать концентрацию N_y выбросов функции α_1 за уровень $\langle \alpha \rangle$, отнесенную к единице интервала $\rho / 2R$. Величину средней длительности выбросов $L_y(R) = 2R / N_y$ будем считать усредненным масштабом неоднородностей (совместно с σ_y^2). Общие соображения показывают, что $L_y(R)$ постоянна для $2R \leqslant L_x'$ и возрастает для $2R > L_y'$, где L_y' — длительность самого короткого выброса функции α_1. Для однородных фильтров

$$\sigma_y = 0, \; N_y = 0, \; K_\alpha = K_x, \; L_y(R) = \infty$$

Изложенный выше анализ построен на предположении, что в неоднородных фильтрах остается неизменной плотность распределения h^{-1} в направлении **k** (2.1). При отказе от этого предположения следует измерять еще один масштаб неоднородностей в направлении **k**.

При линейном сжатии неоднородных фильтров в направлении **k** в n раз ($n \geqslant 0$) объем некоторой области фильтра с «коэффициентом заполнения пространства» α_1 изменится и станет равным $n\alpha_1$. Если плотность вероятности случайной величины α_1 нормальная, то для фильтра после сжатия действительно выражение

$$H_y(n\alpha_1)\, d(n\alpha_1) = \frac{d(n\alpha_1)}{\sqrt{2\pi}\, n\sigma_y} \exp\left[-\frac{(n\alpha_1 - n\langle\alpha\rangle)^2}{2n^2\sigma_y^2}\right] \qquad (4.6)$$

Таким образом, при сжатии фильтра дисперсия $n^2\sigma_y^2$ изменяется пропорционально квадрату степени сжатия.

Остановимся на одном возможном способе определения σ_y, использующем гидродинамические свойства фильтров. Пусть $L_y(R)$, $R \leqslant L_y'$ — средняя длина выброса функции $\alpha_1(t)$. Тогда тонкий неоднородный по α фильтр с поверхностью, много большей L_y^2, должен оказывать потоку газа сопротивление Δp, равное

$$\Delta p = \frac{4\mu h \langle u\rangle \langle\alpha\rangle}{\langle a^2\rangle k'(\alpha\gamma', c_1', c_2')} \qquad (4.7)$$

$$k' = b'c_1' \ln(\langle\alpha\rangle\gamma') + c_2' + a_0'c_1' + \sum_{i=1}^{\infty} a_i' \langle\alpha_1^{i-1}\rangle \langle\alpha\rangle \gamma'^i$$

$$c_1' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\langle(\alpha_1 - \langle\alpha\rangle)^n\rangle}{\langle\alpha_1\rangle^n}, \quad c_2' = b' \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} N_n \frac{\langle(\alpha_1 - \langle\alpha\rangle)^n\rangle}{\langle\alpha_1\rangle^n}$$

$$N_n = N_{n-1} + n^{-1}, \quad N_1 = 1$$

где μ — вязкость газа, $\langle u\rangle$ — средняя скорость потока газа перед фильтром, a_i', b', γ' — постоянные коэффициенты. По свойству (4.6) коэффициенты c_1', c_2' также не изменяются при линейном сжатии фильтра. В (4.7) вид функции k' для однородного по α фильтра ($c_1' = 1$, $c_2' = 0$) заимствован из [13].

Обрабатывая экспериментально снятую зависимость Δp от $\langle\alpha\rangle$ для реального неоднородного по α фильтра по формулам (4.7), можно, вероятно, определить все постоянные коэффициенты в функции k' и, следовательно, дисперсию σ_y^2.

5. Некоторые другие структуры. Ниже приводятся три схематичных примера с тем, чтобы почувствовать разницу в свойствах случайной функции $\alpha(t)$ для разных структур.

Структура Б. Пусть фильтры с однородной по α структурой Б образованы из прямолинейных волокон, перпендикулярных плоскости Q, причем точки пересечения осей волокон с этой плоскостью образуют двумерное пауссоновское поле точек. Остальные признаки фильтров такие же, как в п. 2. Для такой структуры

$$k_x(\tau) = \begin{cases} I(k), & |\tau\cos\theta| \leqslant 1 \\ 0, & |\tau\cos\theta| \geqslant 1 \end{cases} \qquad (5.1)$$

где θ — угол между плоскостью Q и направлением ρ, функция $I(k)$ определена в (3.2).

Сечение случайной функции $\alpha(t)$ имеет плотность распределения (2.15) для $\theta \neq \pi 2^{-1}$ и $H_x(\alpha) = \delta(\alpha - \alpha')$, $k_x = 1$ для $\theta = \pi 2^{-1}$, где «постоянная» величина α' также имеет плотность распределения (2.15). При $\theta = \pi 2^{-1}$ функция $\alpha(t)$ теряет эргодическое свойство.

Структура В. Пусть фильтры с однородной по α структурой В образованы из прямолинейных взаимно параллельных волокон, причем точки пересечения осей этих волокон с перпендикулярной к ним плоскостью образуют узлы прямоугольной решетки с параметрами d и d'. Коэффициент корреляции процесса $\alpha(t)$ для такого фильтра имеет вид

$$k_x(\tau) = \begin{cases} \psi(\tau, \theta), & \theta \neq \pi/2 \\ 1, & \theta = \pi/2 \end{cases} \tag{5.2}$$

где ψ — периодическая функция с периодом $d\,/\,2R\cos\theta$, и, следовательно, концентрация выбросов функции $\alpha(t)$ над уровнем $\langle\alpha\rangle$ равна $2R\cos\theta/d$ в расчете на единицу интервала τ.

Структура А'. Пусть в однородных по α фильтрах из Λ (А) часть круглых волокон заменена на агрегаты из сдвоенных, строенных и т. д. (нерасчесанных) волокон. При этом образуется отличная от структуры А однородная по α структура А', поскольку множество исходных структурных элементов содержит теперь наряду с единичными волокнами также и нерасчесанные агрегаты. Если в первом приближении рассматривать такие агрегаты как круглые волокна с увеличенными радиусами, то наличие последних в фильтрах проявится согласно (2.15) в увеличенной (по сравнению с фильтрами из Λ (А)) амплитуде случайных колебаний функции $\alpha(t)$, не изменяя в то же время концентрации ее пересечений с уровнем $\langle\alpha\rangle$. Фильтры с нерасчесанными волокнами встречаются на практике.

Приведенные примеры показывают, что анализ случайной функции $\alpha(t)$ позволяет получать полезную информацию о структуре исследуемого волокнистого материала.

Поступила 25 III 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Радушкевич Л. В. Попытки статистического описания пористых сред. В сб. «Основные проблемы теории физической адсорбции», М., «Наука», 1970.
2. Валландер С. В. Вероятностная трактовка вопросов кинетики разреженных газов. В сб. «Аэродинамика разреженных газов», сб. 3, Л., Изд-во ЛГУ, 1967.
3. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М., «Наука», 1965.
4. Kallmes O., Corte H. The structure of paper. The statistical geometry of an ideal two dimensional fiber network. Tappi, 1960, vol. 43, No. 9, pp. 737—752.
5. Глушков Ю. М. Проскок аэрозольных частиц через волокнистые фильтры. Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 1, стр. 71—74.
6. Радушкевич Л. В. Статистическое описание структуры волокнистых фильтров. Ж. физ. химии, 1966, т. 40, № 4, стр. 965.
7. Kallmes O., Corte H., Bernier G. The structure of paper. The statistical geometry of a multiplanar fiber network. Tappi, 1961, vol. 44, No. 7, pp. 519—528.
8. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. М., Изд-во иностр. лит., 1947.
9. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1970.
10. Добрушин Р. Л. Лемма о пределе сложной случайной функции. Усп. матем. н., 1955, т. 10, вып. 2 (64), стр. 157—159.
11. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М., «Наука», 1968.
12. Тихонов В. Н. Выбросы случайных процессов. М., «Наука», 1970.
13. Фукс Н. А., Стечкина И. Б. К теории волокнистых аэрозольных фильтров. Докл. АН СССР, 1962, т. 147, № 5, стр. 1144—1146.