

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ПРОГРЕВОМ ОДНОМЕРНОЙ ПЛАСТИНЫ
И ЕГО АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ**

УДК 536.242

А. В. Кузнецов

Технический университет Вены, А-1040 Вена, Австрия

В последние годы появилась целая серия работ, посвященных решению оптимизационных задач для систем с тепломассопереносом [1–6]. Причина такого интереса — значимость этих задач для фундаментального понимания процессов тепломассопереноса, а также их практическое использование для целого ряда приложений.

В настоящей работе рассматривается классическая задача прогрева одномерной пластины, одна из сторон которой находится в контакте со слоем хорошо перемешанной жидкости. На другой стороне пластины поддерживается постоянная температура. Нагрев пластины осуществляется за счет генерирования тепла в слое жидкости (например, за счет нагревательного элемента). Решения данной задачи при различных начальных и граничных условиях рассмотрены в [7].

Мы предлагаем подойти к этой хорошо известной задаче с точки зрения задач оптимального управления. Необходимо определить оптимальную интенсивность генерирования тепла в жидкости, которая позволит максимизировать количество тепла, аккумулированного в пластине к окончанию процесса прогрева. Естественными ограничениями для данной задачи являются заданное количество тепла, которое может быть генерировано в жидкости за время процесса, заданные продолжительность процесса и минимальная и максимальная интенсивности генерирования тепла в жидкости. Для решения этой задачи используется принцип максимума Понтрягина. Насколько известно автору, настоящая работа является первой попыткой рассчитать оптимальную интенсивность генерирования тепла в подобной системе.

Постановка задачи. Рассмотрим одномерную пластину, одна из сторон которой $x' = L$ (L — ширина пластины) находится в контакте с хорошо перемешанной жидкостью (либо с жидкостью, обладающей бесконечной теплопроводностью). На границе контакта предполагаются граничные условия четвертого рода, т. е. равенство температур и тепловых потоков. Массу жидкости на единицу поверхности пластины обозначим M_f , а удельную теплоемкость жидкости — c_f . В жидкости генерируется тепло. Интенсивность этой генерации на единицу поверхности пластины есть функция времени $Q(t')$. Предполагается, что жидкость отдает тепло только пластине. При такой постановке граничное условие при $x' = L$ может быть записано в виде [7]

$$k \frac{\partial T}{\partial x'} + M_f c_f \frac{\partial T}{\partial t'} = Q(t'),$$

где T — температура; k — коэффициент теплопроводности пластины; t' — время; x' — линейная координата.

На границе $x' = 0$ поддерживается постоянная температура T_0 . Начальные температуры жидкости и пластины также равны T_0 .

Решение данной задачи следует из результатов, полученных в [7], и может быть пред-

ставлено как

$$\theta(x, t) = 2H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \sin(\beta_n x) \exp(-\beta_n^2 t)}{\cos \beta_n \{\beta_n^2 + H^2 + H\}} \int_0^t q(\tau) \exp(\beta_n^2 \tau) d\tau. \quad (1)$$

Здесь β_n — положительные решения трансцендентного уравнения

$$\beta_n \operatorname{tg} \beta_n = H. \quad (2)$$

Безразмерные параметры в уравнениях (1) и (2) определены следующими выражениями: $x = x'/L$ (координата), $t = kt'/(\rho_s c_s L^2)$ (время), $q = QL/[k(T_1 - T_0)]$ (интенсивность генерирования тепла), $\theta = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$ (температура), $H = \rho_s c_s L/(M_f c_f)$ (отношение теплоаккумулирующих способностей пластины и жидкости), где ρ_s — плотность пластины; T_1 — произвольная постоянная температура, выбираемая из соображений удобной нормировки.

Рассмотрим оптимизационную задачу. В качестве управления принимается интенсивность генерирования тепла в жидкости, которая предполагается кусочно-непрерывной функцией времени t и может изменяться от минимального значения u_{\min} до максимального u_{\max} . Минимальное значение соответствует минимальной, а максимальное — максимальной мощности нагревателя. Требуется максимизировать количество тепла, аккумулированного в пластине к заданному моменту времени, который отвечает длительности процесса, при следующих ограничениях: заданном количестве тепла, которое может быть генерировано в жидкости, и заданной длительности процесса.

Математически данная задача формулируется следующим образом. Требуется найти функцию $\hat{q}(t)$, обращающую в максимум значение функционала

$$\Phi(q) = \int_0^1 \theta(x, t_f) dx \rightarrow \max, \quad (3)$$

где функция $\theta(x, t_f)$ определена уравнением (1) при ограничениях

$$\int_0^{t_f} q(\tau) d\tau = E = \text{const}; \quad (4)$$

$$u_{\min} \leq q(t) \leq u_{\max} \quad (5)$$

(t_f — длительность процесса).

Решение. Чтобы привести задачу (3)–(5) к задаче оптимального управления, необходимо преобразовать функционал (3). Используя уравнение (1) и меняя порядок интегрирования в функционале (3), этот функционал можно переписать в виде

$$\Phi(q) = \int_0^1 \theta(x, t_f) dx = \int_0^{t_f} q(\tau) \Psi(\tau) d\tau \rightarrow \max \quad (6)$$

$$\left(\Psi(\tau) = 2H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \beta_n}{\cos \beta_n \{\beta_n^2 + H^2 + H\}} \exp\{-\beta_n^2(t_f - \tau)\} \right).$$

Задача (4)–(6) является задачей оптимального управления. Она может быть решена с помощью принципа максимума Понтрягина (или эквивалентного ему принципа минимума в лагранжевой форме) [8–10]. Применение этого принципа приводит к следующему

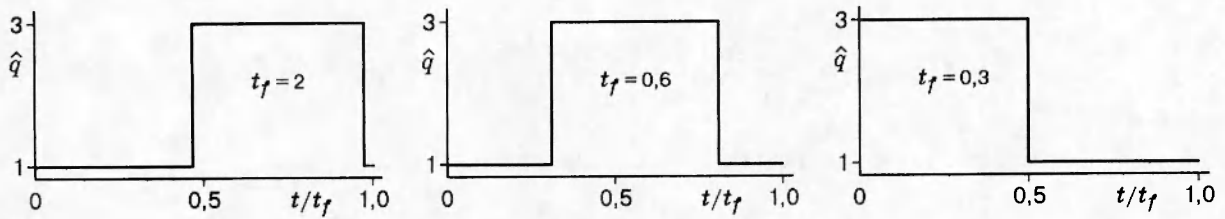


Рис. 1

условию для оптимального управления $\hat{q}(t)$:

$$\hat{q}(t)[\lambda_1 - \Psi(t)] \rightarrow \min \quad (7)$$

(λ_1 — множитель Лагранжа). Условие (7), используемое с учетом ограничений (4) и (5), позволяет определить оптимальное управление с помощью соотношений

$$\hat{q}(t) = u_{\min} \quad \text{при} \quad \lambda_1 - \Psi(t) > 0; \quad (8a)$$

$$\hat{q}(t) = u_{\max} \quad \text{при} \quad \lambda_1 - \Psi(t) < 0. \quad (8б)$$

В (8a), (8б) входит множитель Лагранжа λ_1 , значение которого неизвестно заранее. Для его численного определения дополнительно используется уравнение (4).

На рис. 1 показаны примеры оптимальной интенсивности генерирования тепла в жидкости как функции времени при различной длительности процесса. Расчеты проведены при $u_{\min} = 1$, $u_{\max} = 3$, $H = 1$, $E = 2t_f$. Как видно, при малой длительности процесса ($t_f = 0,3$) оптимальная интенсивность вначале принимает максимальное допустимое значение, а затем — минимальное допустимое значение. При увеличении длительности процесса ($t_f = 0,6$) происходит качественное изменение поведения оптимальной интенсивности. Теперь она вначале принимает минимальное допустимое значение, затем — максимальное допустимое значение, а затем — вновь минимальное допустимое значение. При дальнейшем увеличении длительности процесса ($t_f = 2$) это поведение сохраняется, однако продолжительность третьего участка уменьшается. В пределе при $t_f \rightarrow \infty$ третий участок стремится к нулю, и оптимальная интенсивность в начале процесса принимает минимальное значение, а затем — максимальное.

Чтобы качественно понять причину таких изменений в поведении оптимальной интенсивности, рассмотрим два крайних случая: очень маленькую и очень большую длительности процесса. При малой длительности процесса практически не происходит потери тепла через границу $x' = 0$, и первый тип поведения (максимум — минимум) является выгодным. Это связано с тем, что при таком поведении время контакта пластины с «горячей» жидкостью максимально. При большой длительности процесса, напротив, максимальная интенсивность генерирования тепла должна быть в конце процесса. В противном случае почти все тепло будет потеряно через границу $x' = 0$. При средней длительности процесса максимальная интенсивность должна быть где-то между началом и концом процесса, что и приводит к поведению типа минимум — максимум — минимум.

Интересно сравнить значения, которые функционал $\Phi(q)$ принимает на оптимальной функции $\hat{q}(t)$ и на функции

$$q^*(t) = E/t_f = \text{const}. \quad (9)$$

Функция $q^*(t)$ соответствует постоянной интенсивности генерирования тепла в течение процесса и, очевидно, удовлетворяет ограничению (4). Отношение $\Phi(\hat{q})/\Phi(q^*)$ характеризует энергетический выигрыш, получаемый при использовании оптимальной интенсивности генерирования тепла в жидкости вместо постоянной. Зависимость этого выигрыша

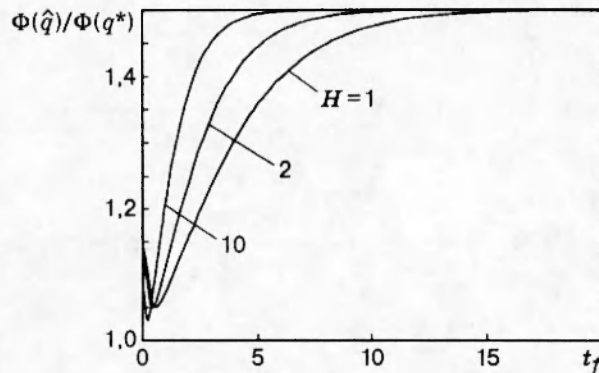


Рис. 2

от длительности процесса при различных значениях параметра H , характеризующего отношение теплоаккумулирующих способностей пластины и жидкости, показана на рис. 2. Расчеты проведены при $u_{\min} = 1$, $u_{\max} = 3$, $E = 2T_f$. Видно, что отношение $\Phi(\dot{q})/\Phi(q^*)$ вначале убывает, а затем возрастает до асимптотического значения, которое не зависит от параметра H . Данный результат приводит к гипотезе о существовании асимптотического значения для отношения $\Phi(\dot{q})/\Phi(q^*)$ при $t_f \rightarrow \infty$ для любого режима такого, что количество тепла E , которое может быть генерировано за время процесса, пропорционально его длительности t_f .

Решим задачу нахождения этого асимптотического значения в общей постановке. Если нижняя и верхняя границы интервала допустимых управлений равны соответственно u_{\min} и u_{\max} , то минимальное и максимальное значения параметра E определяются выражениями $E_{\min} = u_{\min}t_f$ и $E_{\max} = u_{\max}t_f$. Будем считать, что параметр E пропорционален t_f :

$$E = E_{\min} + \frac{E_{\max} - E_{\min}}{\omega} = t_f \left[u_{\min} + \frac{u_{\max} - u_{\min}}{\omega} \right] \quad (\omega > 1). \quad (10)$$

Согласно уравнениям (6), (9) и (10),

$$\begin{aligned} & \lim_{t_f \rightarrow \infty} \Phi(q^*) = \\ & = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \int_0^{t_f} \left[u_{\min} + \frac{u_{\max} - u_{\min}}{\omega} \right] 2H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \beta_n}{\cos \beta_n \{ \beta_n^2 + H^2 + H \}} \exp\{-\beta_n^2(t_f - \tau)\} d\tau = \\ & = \left[u_{\min} + \frac{u_{\max} - u_{\min}}{\omega} \right] 2H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \beta_n}{\beta_n^2 \cos \beta_n \{ \beta_n^2 + H^2 + H \}}. \end{aligned} \quad (11)$$

С другой стороны, как следует из анализа рис. 1, оптимальная интенсивность генерирования тепла в жидкости при $t_f \rightarrow \infty$ может быть представлена в виде

$$\dot{q}(t) = u_{\min} \quad \text{при} \quad t < t_f \frac{\omega - 1}{\omega}; \quad (12a)$$

$$\dot{q}(t) = u_{\max} \quad \text{при} \quad t > t_f \frac{\omega - 1}{\omega}. \quad (126)$$

Функция $\dot{q}(t)$, определенная уравнениями (12a) и (126), очевидно, удовлетворяет ограничению (4), если значение параметра E определено уравнением (10).

Из уравнений (6), (12а) и (12б) следует

$$\begin{aligned} \lim_{t_f \rightarrow \infty} \Phi(\hat{q}) &= \lim_{t_f \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{t_f(\omega-1)/\omega} u_{\min} 2H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \beta_n}{\cos \beta_n \{\beta_n^2 + H^2 + H\}} \exp\{-\beta_n^2(t_f - \tau)\} d\tau + \right. \\ &+ \left. \int_{t_f(\omega-1)/\omega}^{t_f} u_{\max} 2H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \beta_n}{\cos \beta_n \{\beta_n^2 + H^2 + H\}} \exp\{-\beta_n^2(t_f - \tau)\} d\tau \right\} = \\ &= u_{\max} 2H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \beta_n}{\beta_n^2 \cos \beta_n \{\beta_n^2 + H^2 + H\}}, \end{aligned} \quad (13)$$

а из уравнений (11) и (13)

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\hat{q})}{\Phi(q^*)} = q_{\max} / \left(q_{\min} + \frac{q_{\max} - q_{\min}}{\omega} \right). \quad (14)$$

Например, при $u_{\min} = 1$, $u_{\max} = 3$ и $\omega = 2$ (согласно уравнению (10), это приводит к соотношению $E = 2T_f$) уравнение (14) дает

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\hat{q})}{\Phi(q^*)} = 1,5,$$

что в точности совпадает с результатом, полученным на рис. 2. Тем самым при значениях параметров, для которых построен рис. 2, использование оптимальной интенсивности генерирования тепла позволяет аккумулировать в 1,5 раза больше тепловой энергии, чем использование постоянной интенсивности.

Выводы. Установлено, что в данной задаче существует два качественно различных типа поведения оптимальной интенсивности генерирования тепла. При малой длительности процесса оптимальная интенсивность вначале принимает максимальное допустимое значение, а затем — минимальное допустимое значение. При увеличении длительности процесса поведение оптимальной интенсивности меняется. Теперь она вначале принимает минимальное допустимое значение, затем — максимальное допустимое значение, а затем — вновь минимальное допустимое значение. Относительная продолжительность третьего участка сокращается при увеличении длительности процесса, и в пределе при стремлении длительности к бесконечности оптимальная интенсивность вначале принимает минимальное допустимое значение, а затем — максимальное допустимое значение.

Также установлено, что при большой длительности процесса энергетический выигрыш, который получается при использовании оптимальной интенсивности генерирования тепла, стремится к асимптотическому значению, не зависящему от отношения теплоаккумулирующих способностей пластины и жидкости.

Автор благодарен фонду им. А. Гумбольдта за финансовую поддержку данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bejan A.** The optimal spacing for cylinders in crossflow forced convection // ASME J. Heat Transfer. 1995. V. 117. P. 767–770.
2. **Morega A. M., Vargas J. V. C., Bejan A.** Optimization of pulsating heaters in forced convection // Int. J. Heat Mass Transfer. 1995. V. 38. P. 2925–2934.
3. **Bejan A., Vargas J. V. C., Sokolov M.** Optimal allocation of a heat-exchanger inventory in heat driven refrigerators // Ibid. P. 2997–3004.

4. **Bejan A., Morega A. M.** The optimal spacing of a stack of plates cooled by turbulent forced convection // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1994. V. 37. P. 1045–1048.
5. **Bejan A.** How to distribute a finite amount of insulation on a wall with nonuniform temperature // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1993. V. 36. P. 49–56.
6. **Mereu S., Sciubba E., Bejan A.** The optimal cooling of a stack of heat generating boards with fixed pressure drop, flow rate or pumping power // *Ibid.* P. 3677–3686.
7. **Карслоу Х. С., Егер Д. К.** Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964.
8. **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
9. **Болтянский В. Г.** Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
10. **Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 4/І 1996 г.
