

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИЗУЧЕНИЯ НЕРАВНОВЕСНЫХ СИСТЕМ

Г. М. Заславский

(Новосибирск)

Хорошо известной задачей статической физики является следующая: можно ли динамическую систему осцилляторов с нелинейными связями описывать приближенно статистическими законами? Впервые этот вопрос исследовался в работе Ферми, Улама, Паста [1] для следующей системы уравнений связанных осцилляторов

$$x''_i = x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} + \alpha [(x_{i+1} - x_i)^2 - (x_i - x_{i-1})^2] \quad (0.1)$$

$(i = 1, \dots, N; \alpha < 1)$

Численное решение системы (0.1) не привело, как ожидалось, к появлению в ней каких-либо статистических свойств. Отрицательный результат привел к дальнейшим исследованиям в работах [2, 3]. Система (0.1) решалась или численно, или при помощи теории возмущений, однако стохастичность не была получена. В работах [4, 5] изучалось поведение нелинейного осциллятора под действием внешней силы, зависящей заданным образом от времени. Был получен критерий, при котором поведение системы можно приближенно считать стохастическим.

Ниже предлагается асимптотический метод исследования системы связанных осцилляторов, позволяющий при определенных ограничениях решить вопрос, можно ли применять статистические методы к системе и каков критерий этой возможности.

В первом параграфе строится метод, позволяющий получить асимптотические решения для системы осцилляторов с линейной связью, все параметры которых медленно зависят от времени. Во втором параграфе этот метод применяется к простой системе из двух осцилляторов с нелинейной связью.

§ 1. Метод. Система осцилляторов с линейной связью описывается уравнениями

$$x''_i + \omega_i^2(t) x_i = \sum_{k \neq i} \alpha_{ik}(t) x_k \quad (i = 1, \dots, N) \quad (1.1)$$

где частоты  $\omega_i$  и параметры связи  $\alpha_{ik}$  медленно меняются со временем (причиной этого могут быть, например, внешние поля). Не ограничивая общности, будем считать для простоты, что характерное время  $T$  изменения величин  $\alpha_{ik}$ ,  $\omega_k$  одно и то же. Условие медленности запишем в виде

$$\frac{1}{T} \ll \frac{d}{dt} (\ln x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1.2)$$

Будем также считать собственные частоты  $\omega_i$  и частоты связи  $\alpha_{ik}$  аналитическими функциями  $t$  для всех действительных  $t$  и в достаточно большой области мнимых  $t$  (последнее условие будет конкретизировано ниже). В случае, когда  $\omega_i$  и  $\alpha_{ik}$  не зависят от времени, лагранжиан системы (1.1), представляющий квадратичную форму по  $x_k$ , можно привести к диагональному виду. Решение системы (1.1) представляется в этом случае в виде  $N$  нормальных колебаний, не связанных друг с другом, с нормальными частотами. В рассматриваемом случае такое преобразование нельзя провести единым образом на всей действительной оси  $t$ , так как матрица преобразования становится особой в точках на плоскости комплексного переменного  $t$ , где совпадают характеристические числа системы (1.1); это означает совпадение квадратов частот  $\Omega_k^2$ -нормальных колебаний и может

<sup>1</sup> См. также Чириков Б. В. Дис. Новосибирск, 1959.

привести к перераспределению энергии между нормальными модами. Особые точки, где совпадают  $\Omega_k^2$  для разных  $k$ , будем называть точками резонанса. Решения системы (1.1) ищем в виде асимптотических рядов [6]

$$y_i = \Pi_i(t) \exp \left\{ i \int \Omega_i(\tau) d\tau \right\} (1 + \dots) \quad \left( \Pi_i(t) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_i(t)}} \right) \quad (1.3)$$

$$y_i^* = \Pi_i(t) \exp \left\{ -i \int \Omega_i(\tau) d\tau \right\} (1 + \dots)$$

Здесь  $\Omega_i(t)$  — корни характеристического уравнения, определяемые так же, как и при постоянных  $\omega_i, \alpha_{ik}$ .

Ряды (1.3) разложены по малому параметру, следующему из (1.2) (см., например, [7]), однако достаточно будет ограничиться только главными членами асимптотических разложений, выписанных в (1.3). Пусть при  $t < t_-$  задано решение в виде

$$Y_- = \sum_{i=1}^N (A_i y_i + A_i^* y_i^*) \quad (1.4)$$

где  $A_i$  — произвольные коэффициенты; требуется найти решение при  $t > t_+$

$$Y_+ = \sum_{i=1}^N (B_i y_i + A_i^* y_i^*) \quad (1.5)$$

Ответ не будет тривиальным, если в интервал  $(t_-, t_+)$  на действительной оси  $t$  попадает особая точка  $t_0$  (точнее,  $\text{Re } t_0$ ). Это обстоятельство связано, как известно, с наличием линий Стокса асимптотических решений (1.3). Коэффициенты решений  $A_i, A_i^*$  при переходе с одной линии Стокса на другую меняются скачкообразно.

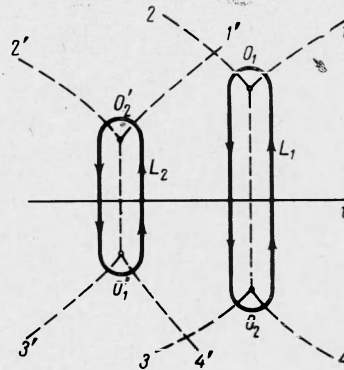
Связь между коэффициентами  $A_i, A_i^*$  и  $B_i, B_i^*$  для системы из двух осцилляторов была получена в [6]. В этом случае имеются две пары особых точек  $(O_1, O_2)$  (фиг. 1), в которых соответственно  $\Omega_1 = \pm \Omega_2$ . Вследствие вещественности коэффициентов (1.1) имеем  $t_{O_1} = t_{O_2}^*, t_{O_1'} = t_{O_2'}$ . Пунктиром обозначены линии, на которых выражения  $\Omega_1 \pm \Omega_2$  чисто мнимые, причем  $(\Omega_1 \pm \Omega_2)^2$  в соответствующих точках имеют простые нули. Результат работы [6], полученный методом, аналогичным методу Цвана [8], представим в виде

$$\mathbf{B} = M_1 \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = M_2 \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = M \mathbf{A} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_2^* \\ A_1^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} \equiv \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_2^* \\ B_1^* \end{pmatrix}, \quad M_1 \equiv i \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ 0 & 0 & -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 \equiv \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & \sin \varphi_2 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_2 & 0 & -\sin \varphi_2 \\ -\sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & \sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad M = M_1 M_2^+ \quad (1.7)$$

$$\sin^2 \varphi_1 \equiv \exp \left\{ \frac{i}{2} \oint_{L_1} (\Omega_1 - \Omega_2) d\tau \right\}, \quad \sin^2 \varphi_2 \equiv \exp \left\{ \frac{i}{2} \oint_{L_2} (\Omega_1 + \Omega_2) d\tau \right\} \quad (1.8)$$



Фиг. 1

Контурь  $L_1, L_2$  показаны на фиг. 1. Интегралы в (1.8) чисто мнимые, и величина их определяется расстоянием точек  $O_1, O_1'$  от действительной оси. Матрицы  $M_1, M_2, M$  определяют преобразование коэффициентов  $A_i, A_i^*$  при прохождении резонансов соответственно типа  $O_1, O_1'$  и  $O_1 + O_1'$ . Важным свойством всех матриц (1.7) является следующее:

$$\begin{aligned} (AA^+) &= |A_1|^2 + |A_2|^2 = (BB^+) = \text{inv} \equiv I \\ A^+ &= (A_1^*, A_2^*, A_2, A_1), \quad B^+ = (B_1^*, B_2^*, B_2 B_1) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Инвариант (1.9) имеет следующий интересный физический смысл. Введем в рассмотрение амплитуды колебаний  $A_i^\circ$ , которые, согласно (1.3), связаны следующим образом с  $A_i$ :

$$A_i = A_i^\circ \sqrt{\Omega_i} \quad (1.10)$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= |A_1^\circ|^2 \Omega_1 + |A_2^\circ|^2 \Omega_2 = E_1 / \Omega_1 + E_2 / \Omega_2 \\ E_i &= \Omega_i^2 |A_i^\circ|^2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

где  $E_i$  — энергия  $i$ -й моды. Таким образом, при прохождении резонансных точек сохраняется величина, равная сумме формальных выражений для адиабатических инвариантов каждого из осцилляторов в отдельности, причем последние меняются при переходе скачкообразно. Формулы (1.6), (1.7) определяют закон связи между адиабатическими инвариантами каждой из степеней свободы при столкновении, а (1.11) определяет интеграл движения всей системы. В случае системы (1.1) из  $N$  осцилляторов особыми точками будут точки совпадения произвольного числа характеристических корней. Заметим, что совпадение не обязательно понимать в буквальном смысле — достаточно просто близости особых точек.

Начнем рассмотрение с парных резонансов (т. е. точек, где совпадают какие-либо пары нормальных частот). В соответствии с (1.7), (1.8) имеем

$$B_s = \left( \prod_{i, k} M_{ik} \right) A \quad (1.12)$$

где  $A$  и  $B$  — векторы-столбцы, имеющие соответственно компоненты  $(A_1, \dots, A_N, A_N^*, \dots, A_1^*)$ ,  $(B_1, \dots, B_N, B_N^*, \dots, B_1^*)$ , а матрица  $M_{ik}$  имеет все элементы  $m_{\alpha\beta}$ , равные нулю, за исключением следующих:

$$\begin{aligned} m_{\alpha\alpha} &= 1, \quad m_{ik} = -m_{ki} = -\sin \varphi_{ik} = m_{N+k, N+1} = -m_{N+i, N+k} \\ m_{ii} &= m_{kk} = \cos \varphi_{ik} = m_{N+i, N+i} = m_{N+k, N+k} \\ \sin^2 \varphi_{ik} &= \exp \left( \frac{i}{2} \oint_{L_{ik}} (\Omega_i - \Omega_k) d\tau \right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Контурь  $L_{ik}$  аналогичны контуру  $L_1$  на фиг. 1. Произведение в (1.12) берется в порядке следования точек резонансов при движении вдоль действительной оси  $t$  от  $t < t_-$  до  $t > t_+$ . Если при этом встречаются точки, в которых  $\Omega_i + \Omega_k = 0$ , то они учитываются аналогично с заменой элементов (1.13) на соответствующие из (1.7) для матрицы  $M_2$ . Учитывая унитарность  $M_{ik}$ , имеем инвариант

$$I = (BB^+) = (AA^+) = \sum_{i=1}^N |B_i|^2 = \sum_{i=1}^N \frac{E_i}{\Omega_i} \quad (1.14)$$

Перейдем теперь к рассмотрению точек, где совпадают три нормальные частоты  $\Omega_i = \Omega_k = \Omega_l$  («тройной резонанс»). Сюда относится также случай, когда точки парных резонансов  $\Omega_i = \Omega_k$  и  $\Omega_k = \Omega_l$  близки одна к другой.

Покажем, что этот случай можно свести к парному резонансу. Запишем  $y_{i,kl}$  в виде

$$\begin{aligned} \frac{y_i}{\Pi_i(t)} &\equiv a \exp \left\{ \frac{i}{2} \int^t (\Omega_i + \Omega_k) d\tau \right\} \exp \left\{ \frac{i}{2} \int^t (\Omega_i - \Omega_k) d\tau \right\} + \\ &+ (1 - a) \exp \left\{ \frac{i}{2} \int^t (\Omega_k + \Omega_i) d\tau \right\} \exp \left\{ \frac{i}{2} \int^t (\Omega_k - \Omega_i) d\tau \right\} \\ \frac{y_k}{\Pi_k(t)} &\equiv (1 - b) \exp \left\{ \frac{i}{2} \int^t (\Omega_k + \Omega_i) d\tau \right\} \exp \left\{ \frac{i}{2} \int^t (\Omega_k - \Omega_i) d\tau \right\} + \\ &+ b \exp \left\{ \frac{i}{2} \int^t (\Omega_k + \Omega_i) d\tau \right\} \exp \left\{ \frac{i}{2} \int^t (\Omega_k - \Omega_i) d\tau \right\} - 9 \quad (1.15) \\ \frac{y_l}{\Pi_l(t)} &\equiv c \exp \left\{ \frac{i}{2} \int^t (\Omega_l + \Omega_i) d\tau \right\} \exp \left\{ \frac{i}{2} \int^t (\Omega_l - \Omega_i) d\tau \right\} + \\ &+ (1 - c) \exp \left\{ \frac{i}{2} \int^t (\Omega_l + \Omega_k) d\tau \right\} \exp \left\{ \frac{i}{2} \int^t (\Omega_l - \Omega_k) d\tau \right\} \end{aligned}$$

где  $a, b, c$  — пока произвольные числа. Аналогично записываются и  $y_{i,k,l}^*$ . Для определенности считаем  $\Omega_i > \Omega_k > \Omega_l$ . Значения величин  $\Omega_i, \Omega_k, \Omega_l$  совпадают только в точке  $(O_1, O_2$  на фиг. 2), а не на конечном интервале, поэтому линии, на которых  $(\Omega_i - \Omega_k), (\Omega_i - \Omega_l), (\Omega_k - \Omega_l)$  чисто мнимые, не совпадают и сильно расходятся на достаточно большом расстоянии от  $O_1, O_2$  (фиг. 2). Это позволяет при обходе точек  $O_1, O_2$  в комплексной плоскости  $t$  пользоваться теми же правилами для изменения коэффициентов при соответствующих экспонентах, что и при парном резонансе. Остается теперь определить произвольные числа  $a, b, c$ . Поскольку истинное решение системы (1.1) является аналитической функцией в рассматриваемой области, необходимо потребовать совпадения асимптотического решения в точке  $K$  (фиг. 2) с тем, которое получается в результате обхода по произвольному контуру  $L$  при возвращении в точку  $K$ . Это сразу приводит к следующим ограничениям на  $a, b, c$ :

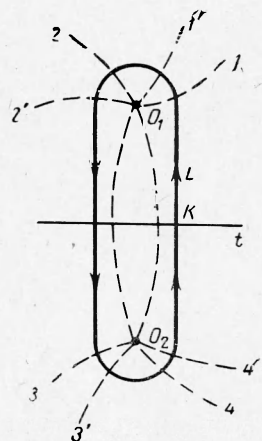
$$\frac{a}{b} = \frac{1-a}{c} = \frac{1-b}{1-c}, \quad a = b = c$$

Отсюда

$$a = b = c = 1/2$$

Аналогично сводятся к парным резонансам и случаи, когда в особой точке пересекается произвольное число нормальных частот.

Рассмотренная теория позволяет достаточно просто учесть, пользуясь, по существу, линейным аппаратом, внутренние резонансы в системе связанных осцилляторов. Прохождение через резонансы можно интерпретировать как столкновения осцилляторов. При столкновении происходит, с одной стороны, перераспределение энергии, с другой — изменение фаз осцилляторов. Все эти изменения могут быть непосредственно найдены из матриц преобразования  $A$  при прохождении через резонанс. Это обстоятельство позволяет, в частности, выяснить, является ли закон изменения фаз осцилляторов близким к случайному. Последнее зависит от параметров задачи и характера распределения особых точек в комплексной плоскости  $t$ , т. е. от вида функций  $\omega_i(t)$  и  $\alpha_{ik}(t)$ .



Фиг. 2

§ 2. Статистические свойства системы из двух осцилляторов с нелинейной связью. В этом параграфе покажем, каким образом развитый выше метод может быть использован для ответа на вопрос: при каких условиях в динамической системе связанных осцилляторов возникают свойства, близкие к статистическим. Рассмотрим достаточно простой случай двух осцилляторов с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} \omega_1^2 x^2 - \frac{1}{2} \omega_2^2 y^2 + \frac{1}{2} \alpha x^2 y^2 \quad (2.1)$$

где  $\omega_1, \omega_2, \alpha$  — не зависящие от времени константы. Уравнения движения являются

$$x'' + (\omega_1^2 - \alpha y^2)x = 0, \quad y'' + (\omega_2^2 - \alpha x^2)y = 0 \quad (2.2)$$

Наложим следующую систему неравенств на параметры системы:

$$\omega_1^2 \gg \alpha A_2^{\circ 2} \gg \omega_2^2 \gg \alpha A_1^{\circ 2} \quad (2.3)$$

Здесь  $A_1^\circ, A_2^\circ$  — соответственно амплитуды  $x, y$ -колебаний. Первое и последнее неравенства в (2.3) означают слабость нелинейной связи. В качестве линейного приближения для (2.2) примем

$$\begin{aligned} x_0'' + \omega_1^2 x_0 &= 0, & y_0'' + \omega_2^2 y_0 &= 0 \\ x_0 &= A_1 e^{i\omega_1 t} + A_1^* e^{-i\omega_1 t}, & y_0 &= A_2 e^{i\omega_2 t} + A_2^* e^{-i\omega_2 t} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Следующим приближением будет

$$x'' + (\omega_1^2 - \alpha y_0^2)x = 0, \quad y'' + (\omega_2^2 - \alpha x_0^2)y = 0 \quad (2.5)$$

Из уравнения для  $y$  в (2.5) видно, что  $y$  можно представить в виде суммы быстро и медленно меняющихся компонент, причем, согласно (2.3), быстро осциллирующая компонента  $y^*$  мала по сравнению с медленно меняющейся компонентой  $Y$

$$y^* \sim \frac{\alpha |A_1^\circ|^2}{\omega_1^2} Y$$

Запишем уравнение для  $Y$  обычным способом

$$Y'' + (\omega_2^2 - \frac{1}{2} \alpha |A_1^\circ|^2) Y \approx 0 \quad (2.6)$$

Обозначим

$$\Omega_1^2(t) = \omega_1^2 - \alpha y_0^2(t), \quad \Omega_2^2 = \omega_2^2 - \frac{1}{2} \alpha |A_1^\circ|^2 \quad (2.7)$$

Величины  $\Omega_1, \Omega_2$  есть частоты нормальных колебаний для  $x$  из (2.5) и для  $Y$ . Нетрудно видеть, что  $\Omega_1(t)$  удовлетворяет условиям медленности изменения. Таким образом, главные члены асимптотических решений системы (2.2) имеют вид

$$\begin{aligned} x &= A_1^\circ \exp \left\{ i \int^t \Omega_1(\tau) d\tau \right\} + A_1^{\circ*} \exp \left\{ -i \int^t \Omega_1(\tau) d\tau \right\} \\ y &\approx A_2^\circ \exp \left\{ i \int^t \Omega_2 d\tau \right\} + A_2^{\circ*} \exp \left\{ -i \int^t \Omega_2 d\tau \right\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Заметим одно обстоятельство, существенное при использовании выражений (2.3). Частоты  $\Omega_1, \Omega_2$  зависят соответственно от  $A_2^\circ, A_1^\circ$ . Поэтому после прохождения через резонанс меняются скачкообразно и нормальные частоты. Иными словами, при заданных  $A_1^\circ, A_2^\circ$  определяется ближайшая резонансная точка; после прохождения особой точки частоты исправляются и по ним находится следующий резонанс и т. д. (эта операция условно

изображена на фиг. 3). Указанное обстоятельство является следствием нелинейности исходных уравнений. Пусть

$$A_1^\circ = \frac{A_1}{\sqrt{\Omega_1}} = |A_1^\circ| e^{i\psi_1}, \quad A_2^\circ = \frac{A_2}{\sqrt{\Omega_2}} = |A_2^\circ| e^{i\psi_2} \quad (2.9)$$

где  $\psi_1, \psi_2$  — фазы нормальных мод непосредственно перед резонансом (в точке  $P$  на фиг. 3). После «столкновения» в точке  $O_1$  имеем, согласно (1.6),

$$|B_1|^2 = |A_1|^2 \{ \cos^2 \psi_1 \cos^2 (\varphi_1 - \varphi_2) + \sin^2 \psi_1 \cos^2 (\varphi_1 + \varphi_2) \} + \\ + |A_2|^2 \{ \cos^2 \psi_2 (\sin^2 (\varphi_1 - \varphi_2) + \sin^2 \psi_2 \sin^2 (\varphi_1 + \varphi_2)) - \\ - |A_1| |A_2| \{ \cos \psi_1 \cos \psi_2 \sin 2 (\varphi_1 - \varphi_2) - \sin \psi_1 \sin \psi_2 \sin 2 (\varphi_1 + \varphi_2) \} \} \quad (2.10)$$

$$|B_2|^2 = |A_1|^2 \{ \cos^2 \psi_1 \sin^2 (\varphi_1 - \varphi_2) + \sin^2 \psi_1 \sin^2 (\varphi_1 + \varphi_2) \} + \\ + |A_2|^2 \{ \cos^2 \psi_2 \cos^2 (\varphi_1 - \varphi_2) + \sin^2 \psi_2 \cos^2 (\varphi_1 + \varphi_2) \} + \\ + |A_1| |A_2| \{ \cos \psi_1 \cos \psi_2 \sin 2 (\varphi_1 - \varphi_2) - \\ - \sin \psi_1 \sin \psi_2 \sin 2 (\varphi_1 + \varphi_2) \}$$

$$\operatorname{ctg} \psi_1^\circ = \frac{|A_1| \cos \psi_1 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) - |A_2| \cos \psi_2 \sin (\varphi_1 - \varphi_2)}{|A_1| \sin \psi_1 \cos (\varphi_1 + \varphi_2) - |A_2| \sin \psi_2 \sin (\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\operatorname{ctg} \psi_2^\circ = \frac{|A_1| \cos \psi_1 \sin (\varphi_1 - \varphi_2) + |A_2| \cos \psi_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2)}{|A_1| \sin \psi_1 \sin (\varphi_1 + \varphi_2) + |A_2| \sin \psi_2 \cos (\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Здесь  $\psi_1^\circ, \psi_2^\circ$  определены соотношениями  $|B_1| = B_1 e^{i\psi_1^\circ}, |B_2| = B_2 e^{i\psi_2^\circ}$ .

Формулы (2.10) дают возможность определить положение следующего резонанса  $O_2$  (фиг. 3) и найти фазы нормальных мод  $\psi_1', \psi_2'$  в точке  $Q$  перед резонансом  $O_2$ . Сравнению подлежат  $\psi_{1,2}$  и  $\psi_{1,2}'$ , связанные между собой определенным функциональным соотношением

$$\psi_1' \equiv 2\pi \{ \Psi_1 [\psi_1, \psi_2] \}, \quad \psi_2' \equiv 2\pi \{ \Psi_2 [\psi_1, \psi_2] \} \quad (2.11)$$

где  $\{ \Psi \}$  означает дробную часть  $\Psi$ . Величина  $\Psi [\psi_1, \psi_2]$  учитывает скачок фазы (2.10) вследствие прохождения через резонанс  $O_1$  и набег фазы типа

$$\int_P^Q \Omega d\tau$$

между двумя столкновениями. Рассмотрим корреляцию <sup>1</sup> фаз  $\psi_{1,2}'$

$$R = \left( \int_0^{2\pi} d\psi_1 \int_0^{2\pi} d\psi_2 (\psi_1' - \pi) (\psi_2' - \pi) \right) \left( \int_0^{2\pi} (\psi - \pi)^2 d\psi \right)^{-1} \quad (2.12)$$

Одномерный интеграл типа (2.12) вычислялся в [5]. Пусть

$$\Psi_1 [\psi_1, \psi_2] = k_{11}\psi_1 + k_{12}\psi_2, \quad \Psi_2 [\psi_1, \psi_2] = k_{21}\psi_1 + k_{22}\psi_2 \quad (2.13)$$

Тогда нетрудно показать, что

$$R \sim \frac{1}{\Delta}, \quad \Delta = k_{11}k_{22} - k_{21}k_{12} \quad \text{при } \Delta \gg 1 \quad (2.14)$$

В более общем случае

$$R \sim \frac{1}{\langle D \rangle}, \quad \langle D \rangle = \left\langle \frac{\partial (\Psi_1, \Psi_2)}{\partial (\psi_1, \psi_2)} \right\rangle \gg 1 \quad (2.15)$$

Здесь угловые скобки означают среднее значение якобиана  $D$ . Таким образом, если  $\langle D \rangle \gg 1$ , то корреляцию фаз с точностью до  $\langle D \rangle^{-1}$  можно считать равной нулю, а сами фазы рассматривать как случайные <sup>2</sup>. Условие совпадения частот из (2.7) дает  $\cos \varphi_{1,2} \sim 1, \quad \sin \varphi_{1,2} \ll 1$

<sup>1</sup> При записи  $R$  предполагается эргодичность, которая в рассматриваемом примере, по-видимому, существует.

<sup>2</sup> На критерий (2.15) обратил внимание автора Б. В. Чириков.

Расстояние по действительной оси  $t$  между резонансами  $\sim 1/\omega_2$ . Опущенная выкладки для рассматриваемого примера, получим, используя формулы (2.7), (2.10), (2.15), критерий хаотичности фаз осцилляторов

$$\langle D \rangle \sim \sin \varphi \frac{\alpha |A_1|^2}{\omega_2^2} \frac{|A_2|^2 \alpha}{\omega_1^2} \frac{\omega_1}{\omega_2} \gg 1, \quad \varphi = \max_i^*(\varphi_1, \varphi_2) \quad (2.16)$$

При выполнении критерия (2.16) фазы осцилляторов в результате столкновений «размешиваются», и систему (2.1) можно приближенно описать при помощи статистических законов.

Остановимся на статистических свойствах рассматриваемой системы. Последняя описывается лагранжианом (2.1), из которого исключена быстро осциллирующая компонента  $y^*$ . «Укороченная» система имеет две степени свободы:  $x, Y$ . При столкновениях амплитуда  $Y$ , а следовательно, и амплитуда  $y^*$  меняются скачкообразно. Поэтому энергия системы ( $X, Y$ ) не будет интегралом движения. Согласно (2.12), интегралом движения будет действие

$$I = I_1 + I_2 = \frac{E_x}{\Omega_1} + \frac{E_y}{\Omega_2} \quad (2.17)$$

Здесь  $E_x, E_y$  — соответственно энергии  $x$ - и  $Y$ -колебаний. Для процесса, описывающего релаксацию системы, можно обычным образом записать кинетическое уравнение. Остановимся лишь на состоянии, к которому релаксирует система. Покажем, что равновесным является состояние, в котором

$$\langle I_1 \rangle = \langle I_2 \rangle = 1/2 I \quad (2.18)$$

Здесь угловые скобки  $\langle . . . \rangle$  означают усреднение по всем возможным состояниям подсистемы. Рассмотрим состояние, в котором

$$|A_1|^2 = |A_2|^2 = |A|^2 \quad (2.19)$$

После столкновения имеем, согласно (1.6), (1.7),

$$\begin{aligned} |B_1|^2 &= |A|^2 - (A_1 A_2^* + A_1^* A_2) \sin \varphi \cos \varphi \\ |B_2|^2 &= |A|^2 + (A_1 A_2^* + A_1^* A_2) \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.20)$$

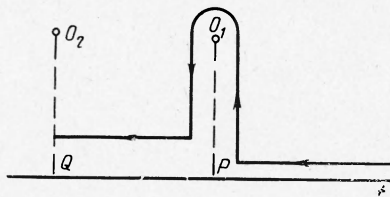
Усредняя (2.20) по всем состояниям и учитывая хаотичность фаз амплитуд  $A_1, A_2$ , получаем  $\langle |B_1|^2 \rangle = \langle |B_2|^2 \rangle$ , что сразу приводит к (2.18). Таким образом, приходим к равномерному распределению по действиям каждой из степеней свободы в равновесном состоянии.

В заключение автор благодарит Р. З. Сагдеева и Б. В. Чирикова за ценные дискуссии и критические замечания.

Поступила 12 XI 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Fermi E., Pasta J., Ulam S. Studies of nonlinear problems. Los Alamos Scientific Report. 1955, LA-1940.
2. Ford J. Equipartition of energy for nonlinear systems. J. Math. Phys., 1961, vol. 2, p. 387.
3. Ford T., Waters J. Computer studies of energy sharing and ergodicity for nonlinear oscillator systems. J. Math. Phys. 1963, vol. 4, p. 1293.
4. Jackson E. A. Nonlinear coupled oscillators. I, II. Journ. Math. Phys., 1963, vol. 4, p. 551, 686.
5. Чириков Б. В. Атомная энергия. 1959, № 6, стр. 630.
6. Заславский Г. М., Чириков Б. В. О механизме ускорения ферми в одномерном случае. Докл. АН СССР, 1964, т. 159, № 2.
7. Заславский Г. М., Моисеев С. С. Связанные осцилляторы в адиабатическом приближении. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 2, стр. 348.
8. Заславский Г. М. Лекции по применению метода ВКБ в физике. Изд. Новосибирск. ун-та, 1965.
9. Zwaan A. Intensitäten im Ca-Funkenspectrum. Utrecht., 1929.



Фиг. 3