УДК 539.3

ДИНАМИКА ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ НЕСЖИМАЕМОГО НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ТЕЛА

В. Д. Бондарь

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: vdmpb@mail.ru

С использованием нелинейной модели упругости в переменных актуального состояния исследуется динамика плоского деформирования несжимаемого тела, получена система нелинейных уравнений для перемещений и давления. При отсутствии объемных сил и в предположении квадратичности упругого потенциала найдены и исследованы решения полученных уравнений, описывающие плоские волны и автомодельные движения, а также поля напряжений в этих движениях. Показано, что как в волновом, так и в автомодельном случае возможно несколько решений определенного типа.

Ключевые слова: нелинейная модель упругости, квадратичный потенциал, волновые и автомодельные решения.

DOI: 10.15372/PMTF20190415

Исследуем динамику плоского деформирования несжимаемого изотропного цилиндрического тела в актуальных переменных t, x_1, x_2, x_3 в рамках нелинейной модели упругости, учитывающей геометрическую и физическую нелинейности. Модель включает представления ускорений a_k, деформаций E_{kl} и их базисных инвариантов E_k через перемещения u_k, связь напряжений Коши P_{kl} с деформациями Альманси E_{kl}, выражение упругого потенциала U через инварианты деформаций и уравнения неразрывности и движения [1, 2]:

$$a_k = \partial_t v_k + v_n\,\partial_n v_k, \qquad v_k = \partial_t u_k + v_n\,\partial_n u_k,$$

$$2E_{kl} = \partial_k u_l + \partial_l u_k - \partial_k u_n\,\partial_l u_n,$$

$$E_1 = E_{nn}, \qquad E_2 = \begin{vmatrix} E_{22} & E_{23} \\ E_{32} & E_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{11} & E_{13} \\ E_{31} & E_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{vmatrix}, \qquad E_3 = |E_{kl}|, \tag{1}$$

$$P_{kl} = -q_*\delta_{kl} + \rho(\delta_{kn} - 2E_{kn})\,(\partial U/\partial E_{ln}), \qquad U = U(E_1, E_2, E_3),$$

$$\rho = \rho_0\sqrt{1 - 2E_1 + 4E_2 - 8E_3}\,, \qquad \rho a_k = F_k + \partial_n P_{kn}.$$

Здесь P_{kl}, E_{kl} — симметричные тензоры; v_n, F_n — компоненты скорости и плотности объемных сил; ρ_0, ρ — исходная и актуальная плотности тела; $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_k = \partial/\partial x_k$ — производные по времени и координатам; δ_{kl} — дельта-функция Кронекера; q_* — лагранжев множитель; индексы принимают значения 1, 2, 3; по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Полагая, что объемные силы отсутствуют, упругий потенциал и актуальная форма тела заданы, а деформация является плоской и происходит в плоскости x, y ($x = x_1$, $y = x_2$), параллельной торцам цилиндра, представим соотношения модели в актуальных переменных и покажем, что они могут быть сведены к уравнениям для перемещений и давления.

При плоской динамической деформации компоненты перемещения $u_1 = u$, $u_2 = w$, $u_3 = 0$ являются функциями актуальных переменных

$$(u_k) = (u(t, x, y), w(t, x, y), 0). \tag{2}$$

Компоненты деформации в (1) в зависимости от перемещений (2) выражаются нелинейными соотношениями (геометрическая нелинейность)

$$\begin{gathered} 2E_{11} = 1 - (1 - \partial_x u)^2 - (\partial_x w)^2, \qquad 2E_{22} = 1 - (1 - \partial_y w)^2 - (\partial_y u)^2, \qquad 2E_{33} = 0, \\ 2E_{12} = (1 - \partial_x u)\,\partial_y u + (1 - \partial_y w)\,\partial_x w, \qquad 2E_{23} = 2E_{31} = 0, \qquad E_{kl} = E_{kl}(t, x, y). \end{gathered} \tag{3}$$

Линейный E_1, квадратичный E_2 и кубичный E_3 инварианты деформации определяются через деформации, а также в силу (3) через перемещения:

$$\begin{gathered} 2E_1 = 2E_{11} + 2E_{22} = 2 - (1 - \partial_x u)^2 - (1 - \partial_y w)^2 - (\partial_x w)^2 - (\partial_y u)^2, \\ 4E_2 = (2E_{11})(2E_{22}) - (2E_{12})^2 = \\ = [1 - (1 - \partial_x u)^2 - (\partial_x w)^2][1 - (1 - \partial_y w)^2 - (\partial_y u)^2] - [(1 - \partial_x u)\,\partial_y u + (1 - \partial_y w)\,\partial_x w]^2, \\ 8E_3 = 8\det(E_{kl}) = 0, \qquad E_k = E_k(t, x, y). \end{gathered} \tag{4}$$

При деформировании несжимаемого тела объем типичной элементарной частицы не меняется, в актуальном положении он такой же, как в исходном: $dV = dV_0$. Тогда из закона сохранения массы частицы $dm = \rho\,dV = \rho_0\,dV_0$ следует, что плотность является постоянной. Далее плотность принимается равной единице: $\rho = \rho_0 = 1$. При этом уравнение неразрывности в (1) сводится к условию несжимаемости

$$2E_1 - 4E_2 + 8E_3 = 2E_1 - 4E_2 = 0. \tag{5}$$

С учетом (4) условие несжимаемости можно выразить как через деформации:

$$(1 - 2E_{11})(1 - 2E_{22}) - (2E_{12})^2 = 1,$$

так и через перемещения:

$$(1 - \partial_x u)(1 - \partial_y w) - (\partial_y u)(\partial_x w) = 1. \tag{6}$$

Из (4), (5) следует, что при плоской деформации из трех инвариантов деформации независим только один, например линейный, обозначаемый далее через E:

$$E_1 = E, \qquad E_2 = E/2, \qquad E_3 = 0.$$

С использованием (6) можно установить, что при плоской деформации линейный инвариант представляется в виде

$$2E = -(\partial_x u - \partial_y w)^2 - (\partial_y u + \partial_x w)^2, \tag{7}$$

т. е. является отрицательной величиной.

В случае однородного изотропного тела упругий потенциал является функцией инвариантов деформации. При плоской деформации в силу свойств инвариантов потенциал зависит только от линейного инварианта:

$$U(E_1, E_2, E_3) = U(E). \tag{8}$$

Ускорение частицы тела можно выразить через перемещение. В исходных соотношениях (1) ускорение выражено через локальную и конвективную составляющие, каждая из которых определяется скоростью:

$$a_k = \partial_t v_k + v_n\, \partial_n v_k. \tag{9}$$

Сама скорость выражается через перемещение соотношением $v_k = \partial_t u_k + v_n\, \partial_n u_k$, которое можно представить в виде

$$v_n(\delta_{nk} - \partial_n u_k) = \partial_t u_k.$$

В работе [3] показано, что если ввести градиент деформации $(C_{nk}) = (\delta_{nk} - \partial_n u_k)$ с базисными инвариантами C_1, C_2, C_3 и обратный ему тензор $(C'_{kl}) = (C_{kl})^{-1}$, то выражение для скорости можно представить в виде

$$v_k(t, x, y) = (\partial_t u_n) C'_{nk}. \tag{10}$$

В (10) обратный тензор представляется через исходный тензор квадратичной функцией

$$(C'_{kl}) = (C_{kn}C_{nl} - C_1 C_{kl} + C_2 \delta_{kl})/C_3,$$

$$C_1 = C_{11} + C_{22} + C_{33}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} C_{22} & C_{23} \\ C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{13} \\ C_{31} & C_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}, \quad C_3 = \det(C_{kl}).$$

В случае плоской деформации градиент деформации, обратный ему тензор и инварианты, выраженные через перемещение (2) с учетом условия несжимаемости (6), имеют вид

$$(C_{kl}) = \begin{pmatrix} 1 - \partial_x u & -\partial_x w & 0 \\ -\partial_y u & 1 - \partial_y w & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (C'_{kl}) = \begin{pmatrix} 1 - \partial_y w & \partial_x w & 0 \\ \partial_y u & 1 - \partial_x u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = 3 - \partial_x u - \partial_y w, \qquad C_3 = 1.$$

Следовательно, компоненты скорости и градиента скорости равны

$$(v_k) = \Big(\partial_t u + \frac{\partial\,(u, w)}{\partial\,(y, t)},\ \partial_t w - \frac{\partial\,(u, w)}{\partial\,(x, t)},\ 0\Big); \tag{11}$$

$$(\partial_n v_k) = \begin{pmatrix} \partial_{tx} u + \partial_x \dfrac{\partial\,(u, w)}{\partial\,(y, t)} & \partial_{tx} w - \partial_x \dfrac{\partial\,(u, w)}{\partial\,(x, t)} & 0 \\ \partial_{ty} u + \partial_y \dfrac{\partial\,(u, w)}{\partial\,(y, t)} & \partial_{ty} w - \partial_y \dfrac{\partial\,(u, w)}{\partial\,(x, t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Локальное и конвективное ускорения определяются скоростью (11) и градиентом скорости (12):

$$(\partial_t v_k) = (\partial_t v_1, \partial_t v_2, 0),$$

$$(v_n \partial_n v_k) = (v_1\, \partial_x v_1 + v_2\, \partial_y v_1,\ v_1\, \partial_x v_2 + v_2\, \partial_y v_2,\ 0),$$

поэтому для полного ускорения (9), равного сумме локального и конвективного ускорений, получаем следующее выражение:

$$(a_k) = (\partial_t v_1 + v_1\, \partial_x v_1 + v_2\, \partial_y v_1,\ \partial_t v_2 + v_1 \partial_x v_2 + v_2 \partial_y v_2,\ 0). \tag{13}$$

В силу зависимостей (11), (12) компоненты ускорения можно рассматривать как функции перемещений: $a_k = a_k(u, w)$.

При плоском деформировании несжимаемого тела с учетом условий $\rho = 1$, $U = U(E)$ связь напряжений и деформаций в (1) принимает вид

$$P_{kl} = -q_*\delta_{kl} + (\delta_{kn} - 2E_{kn})\,\partial U(E)/\partial E_{ln}.$$

Используя соотношения

$$E = E_{ln}\delta_{nl}, \qquad \partial E/\partial E_{ln} = \delta_{nl}, \qquad \partial U/\partial E_{ln} = U'(E)\delta_{nl}, \qquad U'(E) = dU/dE,$$

напряжения можно представить в виде квазилинейных функций деформаций (физическая нелинейность) и давления q:

$$P_{kl} = -q\delta_{kl} - 2U'(E)E_{kl}, \qquad q = q_* - U'(E).$$

В силу соотношений (3) напряжения можно выразить через давление и перемещения:

$$\begin{gathered} P_{11} = -q - 2U'(E)E_{11}(u,w), \qquad P_{22} = -q - 2U'(E)E_{22}(u,w), \qquad P_{33} = -q, \\ P_{12} = -2U'(E)E_{12}(u,w), \qquad P_{23} = P_{31} = 0, \qquad E = E_{11}(u,w) + E_{22}(u,w). \end{gathered} \tag{14}$$

В (14) давление и перемещение зависят, вообще говоря, от различных переменных:

$$q = q(t,x,y,z), \qquad u = u(t,x,y), \qquad w = w(t,x,y).$$

Динамические уравнения в (1) при $\rho = 1$, $F_k = 0$ и напряжениях, определенных в (14), имеют вид

$$a_1 = -\partial_x q - \partial_x(2U'E_{11}) - \partial_y(2U'E_{12}), \quad a_2 = -\partial_y q - \partial_y(2U'E_{22}) - \partial_x(2U'E_{12}), \quad 0 = -\partial_z q.$$

Согласно последнему из этих уравнений давление и перемещения зависят от одних и тех же переменных: $q = q(t,x,y)$. Первые два уравнения вместе с условием несжимаемости (6) образуют замкнутую нелинейную систему для определения перемещений и давления

$$a_1 = -\partial_x q - \partial_x(2U'E_{11}) - \partial_y(2U'E_{12}), \qquad a_2 = -\partial_y q - \partial_y(2U'E_{22}) - \partial_x(2U'E_{12}); \tag{15}$$

$$(1 - \partial_x u)(1 - \partial_y w) - (\partial_y u)\,\partial_x w = 1, \tag{16}$$

где

$$\begin{gathered} a_1 = \partial_t v_1 + v_1\,\partial_x v_1 + v_2\,\partial_y v_1, \qquad a_2 = \partial_t v_2 + v_1\,\partial_x v_2 + v_2\,\partial_y v_2, \\ v_1 = \partial_t u + (\partial_y u)\,\partial_t w - (\partial_t u)\,\partial_y w, \qquad v_2 = \partial_t w - (\partial_x u)\,\partial_t w + (\partial_t u)\,\partial_x w, \\ 2E_{11} = 1 - (1 - \partial_x u)^2 - (\partial_x w)^2, \qquad 2E_{22} = 1 - (1 - \partial_y w)^2 - (\partial_y u)^2, \\ 2E_{12} = (\partial_y u)(1 - \partial_x u) + (\partial_x w)(1 - \partial_y w), \qquad U' = U'(E), \qquad E = E_{11} + E_{22}. \end{gathered} \tag{17}$$

В системе (15)–(17) упругий потенциал, характеризующий деформируемое тело, полагается заданным, остальные величины подлежат определению. С использованием системы (15)–(17) исследуем некоторые плоские движения деформируемого тела.

Рассмотрим процесс распространения волн в условиях динамической плоской деформации. Решение системы уравнений (15)–(17) для перемещений и давления будем искать в виде функций одной переменной

$$\begin{gathered} u = u(s), \qquad w = w(s), \qquad q = q(s), \qquad s = k_1x + k_2y - ct, \\ k_1^2 + k_2^2 = 1, \qquad k_1 = \text{const}, \qquad k_2 = \text{const}, \qquad c = \text{const}\,. \end{gathered} \tag{18}$$

Функции (18) описывают распространение плоской волны: координаты точек, находящихся в одной фазе, удовлетворяют уравнению $k_1x + k_2y - ct = m$, $m = \text{const}$, которое определяет плоскость (фронт волны), ортогональную волновому вектору $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, 0)$. В текущий момент времени эта плоскость удалена от начала отсчета на расстояние $d = \boldsymbol{xk} = m + ct$

и перемещается со временем со скоростью c параллельно самой себе в направлении, совпадающем с направлением волнового вектора.

Производные от перемещения и давления по времени и координатам для плоской волны имеют вид

$$\begin{gathered}\partial_t u = -cu', \qquad \partial_x u = k_1 u', \qquad \partial_y u = k_2 u',\\ \partial_t w = -cw', \qquad \partial_x w = k_2 w', \qquad \partial_y w = k_2 w',\\ \partial_t q = -cq', \qquad \partial_x q = k_1 q', \qquad \partial_y q = k_2 q',\end{gathered} \tag{19}$$

где штрих обозначает производную функции по ее аргументу. Подставляя величины (19) в условие несжимаемости (16), получаем уравнение для производных перемещений

$$k_1 u' + k_2 w' = 0. \tag{20}$$

В силу (19), (20) выражения для скорости и ускорения в (17) совпадают с выражениями для их локальных составляющих

$$v_1 = -cu', \qquad v_2 = -cw'; \tag{21}$$

$$a_1 = c^2 u'', \qquad a_2 = c^2 w'', \tag{22}$$

деформации и инвариант деформаций принимают значения

$$\begin{gathered}2E_{11} = 2k_1 u' - k_1^2 (u'^2 + w'^2), \quad 2E_{22} = 2k_2 w' - k_2^2 (u'^2 + w'^2), \quad 2E_{12} = k_2 u' + k_1 w',\\ 2E = -(u'^2 + w'^2),\end{gathered} \tag{23}$$

компоненты дивергенции напряжений в (15) выражаются формулами

$$\begin{gathered}\partial_x (2U' E_{11}) + \partial_y (2U' E_{12}) = [U'(u' - k_1 (u'^2 + w'^2))]',\\ \partial_y (2U' E_{22}) + \partial_x (2U' E_{12}) = [U'(w' - k_2 (u'^2 + w'^2))]'.\end{gathered} \tag{24}$$

Подставляя выражения (19), (22), (24) в (15), получаем уравнения

$$c^2 u'' = -k_1 q' - [U'(u' - k_1 (u'^2 + w'^2))]'; \tag{25}$$

$$c^2 w'' = -k_2 q' - [U'(w' - k_2 (u'^2 + w'^2))]', \tag{26}$$

которые вместе с уравнением (20) образуют замкнутую систему для перемещений и давления в плоской волне. Из этой системы следуют уравнения как для перемещений, так и для давления. Действительно, вычитая уравнение (26), умноженное на k_1, из уравнения (25), умноженного на k_2, исключаем давление. Полученное в результате уравнение вместе с уравнением (20) составляет систему для перемещений

$$\begin{gathered}[(c^2 + U')(k_2 u' - k_1 w')]' = 0, \qquad k_1 u' + k_2 w' = 0,\\ U' = U'(E), \qquad 2E = -(u'^2 + w'^2).\end{gathered} \tag{27}$$

Аналогично, сложив уравнение (25), умноженное на k_1, и уравнение (26), умноженное на k_2, имеем соотношение

$$c^2 (k_1 u' + k_2 w')' = -(k_1^2 + k_2^2) q' - [U'(k_1 u' + k_2 w' - (k_1^2 + k_2^2)(u'^2 + w'^2))]'.$$

С использованием (18), (20), (23) это соотношение приводится к уравнению для давления

$$q' + [2EU']' = 0, \qquad U' = U'(E). \tag{28}$$

Полученные уравнения для перемещений и давления исследуем при определенном виде упругого потенциала. Для квадратичного потенциала имеем

$$\begin{gathered}U = aE^2 - bE + e, \quad E < 0, \quad a = \mathrm{const} > 0, \quad b = \mathrm{const} > 0, \quad e = \mathrm{const} > 0,\\ U' = 2aE - b = -a(u'^2 + w'^2) - b.\end{gathered} \tag{29}$$

Система уравнений для перемещений (27) после интегрирования первого уравнения в ней принимает вид

$$[c^2 - b^2 - a(u'^2 + w'^2)](k_2u' - k_1w') = f, \qquad k_1u' + k_2w' = 0, \qquad f = \text{const}\,. \tag{30}$$

Определив w' из второго уравнения (30), находим

$$w' = -(k_1/k_2)u', \qquad k_2u' - k_1w' = u'/k_2, \qquad u'^2 + w'^2 = u'^2/k_2^2. \tag{31}$$

Подставляя эти выражения в первое уравнение (30), получаем неполное кубическое уравнение с постоянными коэффициентами для производной u'

$$u'^3 + gu' + h = 0, \qquad g = k_2^2(b - c^2)/a, \qquad h = fk_2^3/a. \tag{32}$$

Согласно формулам Кардано [4] корни уравнения (32) постоянны:

$$\begin{gathered} u'_1 = A + B, \qquad u'_{2,3} = -(A+B)/2 \pm i(A-B)\sqrt{3}/2, \\ A = \sqrt[3]{-h/2 + \sqrt{Q}}, \qquad B = \sqrt[3]{-h/2 - \sqrt{Q}}, \qquad Q = (g/3)^3 + (h/2)^2, \end{gathered} \tag{33}$$

при этом в зависимости от значений параметров среди них могут быть как кратные действительные корни, так и комплексно-сопряженные корни. Значения величины w' в (31) также постоянны и определяются формулами

$$w'_1 = -(k_1/k_2)u'_1, \qquad w'_2 = -(k_1/k_2)u'_2, \qquad w'_3 = -(k_1/k_2)u'_3. \tag{34}$$

После интегрирования (33), (34) получаем, что перемещения определяются линейными зависимостями

$$\begin{gathered} u_1 = (A+B)s + C_1, \qquad w_1 = e_1 - (k_1/k_2)u_1, \qquad s = k_1x + k_2y - ct, \\ u_2 = [-(A+B)/2 + i(A-B)\sqrt{3}/2]s + C_2, \qquad w_2 = e_2 - (k_1/k_2)u_2, \\ u_3 = [-(A+B)/2 - i(A-B)\sqrt{3}/2]s + C_3, \qquad w_3 = e_3 - (k_1/k_2)u_3, \\ e_n = \text{const}, \qquad C_n = \text{const} \qquad (n = 1, 2, 3). \end{gathered}$$

После интегрирования дифференциального уравнения (28) определяем давление как функцию инварианта деформации с точностью до аддитивной постоянной:

$$q = m - 2EU'(E) = m - 2E(2aE - b), \qquad m = \text{const}\,.$$

Подставляя в эту зависимость выражение для инварианта в (27), получаем

$$q = m - (u'^2 + w'^2)[b + a(u'^2 + w'^2)],$$

откуда следует, что q постоянно, поскольку постоянны производные от перемещений.

В плоской волне напряжения (14) определяются через постоянные давление и производные от перемещений:

$$\begin{gathered} P_{11} = -q - U'[2k_1u' - k_1^2(u'^2 + w'^2)], \quad P_{22} = -q - U'[2k_2w' - k_2^2(u'^2 + w'^2)], \quad P_{33} = -q, \\ P_{12} = -U'[k_2u' + k_1w' - k_1k_2(u'^2 + w'^2)], \qquad P_{23} = P_{31} = 0 \end{gathered}$$

(функция U' определена в (29)); следовательно, напряжения также постоянны.

Таким образом, при квадратичном потенциале в случае нелинейной плоской деформации в упругом теле возможно распространение плоских волн различного вида, в которых перемещения линейно зависят от координат и времени, а давление и напряжения постоянны.

При произвольном упругом потенциале уравнения для перемещений (27) сводятся не к кубическому уравнению (32), а к уравнению другого вида. Действительно, из второго уравнения в (27) получаем

$$w' = -\frac{k_1}{k_2}\,u', \qquad 2E = -\frac{u'^2}{k_2^2}, \qquad k_2 u' - k_1 w' = \frac{u'}{k_2} = \sqrt{-2E}\,, \tag{35}$$

при этом первое уравнение принимает вид

$$0 = [(c^2 + U')\sqrt{-2E}\,]' = \frac{d}{dE}\Big[\Big(c^2 + \frac{dU}{dE}\Big)\sqrt{-2E}\,\Big]\frac{dE}{ds}.$$

Это уравнение удовлетворяется при равенстве нулю одного из множителей:

$$\frac{dE}{ds} = 0, \qquad \frac{d}{dE}\Big[\Big(c^2 + \frac{dU}{dE}\Big)\sqrt{-2E}\,\Big] = 0. \tag{36}$$

Из уравнения $dE/ds = 0$ в силу (35) следует, что производная от перемещения постоянна:

$$\frac{dE}{ds} = -\frac{d}{ds}\,\frac{u'^2}{2k_2^2} = 0, \qquad u' = \mathrm{const},$$

так же как и в случае рассмотренного выше квадратичного потенциала. Из второго уравнения (36) после интегрирования получаем уравнение для потенциала

$$\Big(c^2 + \frac{dU}{dE}\Big)\sqrt{-2E} = -r, \qquad r = \mathrm{const}, \qquad E < 0,$$

из которого следует

$$U = r\sqrt{-2E} - c^2 E + m, \qquad r = \mathrm{const}, \quad m = \mathrm{const}\,. \tag{37}$$

Таким образом, в случае плоской деформации плоские волны реализуются как при квадратичном потенциале (29), так и при потенциале вида (37).

Далее будем искать решение системы уравнений (15)–(17) автомодельного вида

$$\begin{gathered} u = tf(r), \qquad w = tg(r), \qquad q = h(r), \\ r = (x + y)/t, \qquad \partial_x r = \partial_y r = 1/t, \qquad \partial_t r = -r/t. \end{gathered} \tag{38}$$

Тогда для производных по координатам и времени от перемещений и давления получаем следующие формулы:

$$\begin{gathered} \partial_x u = \partial_y u = f', \qquad \partial_t u = f - rf', \\ \partial_x w = \partial_y w = g', \qquad \partial_t w = g - rg', \\ \partial_x q = \partial_y q = h'/t. \end{gathered} \tag{39}$$

В силу (39) условие несжимаемости (16) записывается в виде

$$f' + g' = 0. \tag{40}$$

Далее вместо двух уравнений (15) будем рассматривать их сумму и разность:

$$\begin{gathered} a_1 + a_2 = -\partial_x q - \partial_y q - \partial_x[U'(2E_{11} + 2E_{12})] - \partial_y[U'(2E_{22} + 2E_{12})], \\ a_1 - a_2 = -\partial_x q + \partial_y q - \partial_x[U'(2E_{11} - 2E_{12})] + \partial_y[U'(2E_{22} - 2E_{12})]. \end{gathered} \tag{41}$$

С учетом (39), (40) получаем следующие выражения:

— для комбинации компонент градиентов давления

$$-\partial_x q - \partial_y q = -2h'/t, \qquad -\partial_x q + \partial_y q = 0;$$

— для компонент скоростей и их комбинаций

$$v_1 = f(1-g') - f'(r-g), \qquad v_2 = g(1-f') - g'(r-f),$$
$$v_1 + v_2 = f + g, \qquad v_1 - v_2 = f - g - r(f'-g') + 2(f'g - g'f);$$

— для компонент ускорения и их комбинаций

$$a_1 = \partial_t v_1 + v_1\,\partial_x v_1 + v_2\,\partial_y v_1, \qquad a_2 = \partial_t v_2 + v_1\,\partial_x v_2 + v_2\,\partial_y v_2,$$
$$a_1 + a_2 = (\partial_t + v_1\,\partial_x + v_2\,\partial_y)(v_1+v_2) = \frac{f'+g'}{t}\,(f+g-r) = 0,$$
$$a_1 - a_2 = (\partial_t + v_1\,\partial_x + v_2\,\partial_y)(v_1-v_2) = \frac{f+g-r}{t}\,[f''(2g-r) - g''(2f-r)];$$

— для инварианта деформации, компонент деформации и их комбинаций

$$2E_{11} = 2f' - (f'^2 + g'^2), \qquad 2E_{22} = 2g' - (f'^2 + g'^2),$$
$$2E_{12} = -(f'^2 + g'^2), \qquad E = -(f'^2 + g'^2),$$
$$2E_{11} + 2E_{12} = 2f' - 2(f'^2 + g'^2), \qquad 2E_{22} + 2E_{12} = 2g' - 2(f'^2 + g'^2),$$
$$2E_{11} - 2E_{12} = 2f', \qquad 2E_{22} - 2E_{12} = 2g'.$$

С использованием приведенных выше соотношений для комбинаций компонент дивергенции напряжений имеем следующие выражения:

$$-\partial_x[U'(2E_{11} + 2E_{12})] - \partial_y[U'(2E_{22} + 2E_{12})] = \frac{4}{t}\,[U'(f'^2 + g'^2)]',$$
$$-\partial_x[U'(2E_{11} - 2E_{12})] + \partial_y[U'(2E_{22} - 2E_{12})] = \frac{2}{t}\,[U'(f' - g')]'.$$

После подстановки последних выражений в (41) и упрощений получаем уравнения, которые вместе с (40) образуют замкнутую систему для величин f, g, h:

$$h' + 2(EU')' = 0, \quad (f+g-r)[f''(2g-r) - g''(2f-r)] + 2[U'(f'-g')]' = 0, \quad f' + g' = 0. \tag{42}$$

Из второго и третьего уравнений в (42) определяются перемещения, а из первого — давление. При квадратичном потенциале (29) уравнения для перемещений имеют вид

$$(f+g-r)[f''(2g-r) - g''(2f-r)] - 2[(2a(f'^2+g'^2)+b)(f'-g')]' = 0, \quad f' + g' = 0. \tag{43}$$

Эти уравнения допускают полное интегрирование. Из второго уравнения в (43) определяется одна из искомых функций через другую с точностью до произвольной аддитивной постоянной:

$$g = e - f, \qquad t = \mathrm{const}, \tag{44}$$

а из первого уравнения с учетом (44) получаем уравнение для функции f

$$f''[(r-e)^2 - 2b - 24af'^2] = 0. \tag{45}$$

Полученное уравнение удовлетворяется при обращении в нуль каждого множителя. Равенство нулю первого множителя представляет собой уравнение второго порядка, решением которого является линейная функция:

$$f'' = 0, \qquad f_1 = mr + n, \qquad m = \mathrm{const}, \qquad n = \mathrm{const}\,. \tag{46}$$

Из равенства нулю второго множителя следуют два уравнения первого порядка

$$f'^2 = \frac{(r-e)^2 - 2b}{24a}, \qquad \frac{df}{dr} = \pm\frac{\sqrt{(r-e)^2 - 2b}}{\sqrt{24a}}, \qquad (r-e)^2 \geqslant 2b.$$

Эти уравнения в квадратурах определяют второе и третье решения исходного уравнения (45) [5], каждое из которых выполняется в ограниченной области:

$$f_{2,3} = \pm \frac{b}{\sqrt{24a}} \Big(\frac{a-e}{2b} \sqrt{(r-e)^2 - 2b} - \ln \Big| r - e + \sqrt{(r-e)^2 - 2b}\, \Big| + d \Big),$$
$$(r-e)^2 \geqslant 2b, \qquad d = \mathrm{const}\,. \tag{47}$$

Согласно (44) значения функции $g(r)$ имеют вид

$$g_1 = e - f_1, \qquad g_2 = e - f_2, \qquad g_3 = e - f_3. \tag{48}$$

В результате компоненты искомого перемещения согласно (38) равны

$$u_n = tf_n(r), \qquad w_n = tg_n(r), \qquad r = (x+y)/t \qquad (n = 1, 2, 3).$$

Здесь функции $f_n(r)$, $g_n(r)$ определяются формулами (46)–(48).

Уравнение для давления (первое уравнение в (42)) в случае квадратичного упругого потенциала (29) принимает вид

$$h' + 2[2a(f'^2 + g'^2)^2 + b(f'^2 + g'^2)]' = 0.$$

Из этого уравнения после интегрирования для каждого решения f_n, g_n определяется давление

$$q_n = h_n = k_n - 2(f_n'^2 + g_n'^2)[2a(f_n'^2 + g_n'^2) + b], \qquad k_n = \mathrm{const}, \qquad n = 1, 2, 3.$$

Из выражений для f_n, g_n, h_n следует, что в автомодельных движениях напряжения (14) при квадратичном потенциале являются переменными и определяются формулами

$$P_{11}^{(n)} = -h_n - (2aE_n - b)(E_n + 2f_n'), \qquad P_{22}^{(n)} = -h_n - (2aE_n - b)(E_n + 2g_n'), \qquad P_{33}^{(n)} = -h_n,$$
$$P_{12}^{(n)} = E_n(2aE_n - b), \qquad P_{23}^{(n)} = P_{31}^{(n)} = 0, \qquad E_n = -(f_n'^2 + g_n'^2), \qquad n = 1, 2, 3.$$

Таким образом, при динамической плоской деформации и квадратичном упругом потенциале возможно несколько видов автомодельных движений типа (38).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Снеддон И. Н.** Классическая теория упругости / И. Н. Снеддон, Д. С. Берри. М.: Физматгиз, 1961.
2. **Седов Л. И.** Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962.
3. **Бондарь В. Д.** Динамика антиплоского деформирования нелинейно-упругого тела // ПМТФ. 2015. Т. 56, № 4. С. 147–159.
4. **Корн Г.** Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1968.
5. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматгиз, 1959. Т. 2.

Поступила в редакцию 25/II 2019 г.,
после доработки — 25/II 2019 г.
Принята к публикации 25/II 2019 г.