

В. А. Агурейкин, А. А. Воилов

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В СТАЦИОНАРНОЙ ТОЧКЕ
ПРИ СИММЕТРИЧНОМ СОУДАРЕНИИ ПЛОСКИХ СТРУЙ
С УЧЕТОМ СЖИМАЕМОСТИ, ВЯЗКОСТИ
И ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ**

Предложен способ приближенного расчета напряжений в стационарной точке для течений, характеризующихся наличием плоской или осевой симметрии с учетом эффектов сжимаемости, вязкости и прочности. В стационарной точке вычисляются добавки к гидродинамическому давлению, обусловленные перечисленными эффектами в предположении их малости. Способ определения добавок основан на применении метода итераций [1], где в качестве нулевого приближения используется течение идеальной несжимаемой жидкости. Добавка за счет сжимаемости вычисляется в акустическом приближении, модели идеальной упругопластической среды и ньютоновской жидкости применяются при вычислении добавок за счет прочности и вязкости соответственно. Процедура определения поправок позволяет использовать более сложные реологические модели. Подробно изложен процесс вычисления поправок для задачи соударения плоских струй. Приведены результаты для задачи стационарного проникания плоской струи в полупространство. Определена поправка к скорости стационарной точки.

Систему уравнений, описывающую стационарное плоское течение сжимаемой среды, характеризующейся нешаровым тензором напряжений, запишем в виде

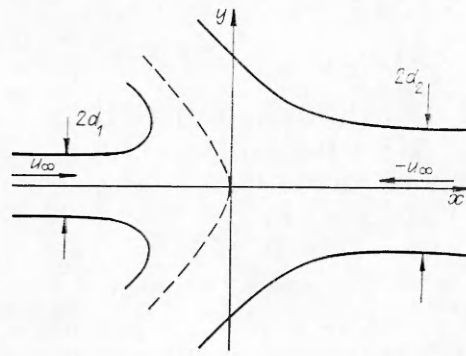
$$(1) \quad \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\nu}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{\nu}{\rho_0} \right) \left(\frac{\partial s_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial s_{xy}}{\partial y} \right), \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\nu}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{\nu}{\rho_0} \right) \left(\frac{\partial s_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial s_{yy}}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{\nu - 1} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \nu = 1 - \rho_0/\rho, \end{aligned}$$

где x, y — координаты; u, v — компоненты вектора скорости; ρ — плотность; ρ_0 — исходная плотность; p — давление; s_{ij} — компоненты дивергента напряжений. Система (1) записана так, что правые части уравнений малы, если малы эффекты сжимаемости, вязкости и прочности. В предположении малости этих эффектов в соответствии с методом итераций [1] вначале определяется течение нулевого приближения, т. е. решается система (1) с нулевыми правыми частями. Затем решение нулевого приближения совместно с реологической моделью среды, связывающей компоненты тензора напряжений с компонентами тензора деформаций, используется для вычисления правых частей системы уравнений первого приближения

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial (u^0 u^1)}{\partial x} + v^0 \frac{\partial u^1}{\partial y} + v^1 \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial (p^0 + p^1)}{\partial x} &= \frac{1}{\rho_0} \left(\nu^0 \frac{\partial p^0}{\partial x} + \frac{\partial s_{xx}^0}{\partial x} + \frac{\partial s_{xy}^0}{\partial y} \right), \\ u^0 \frac{\partial v^1}{\partial x} + u^1 \frac{\partial v^0}{\partial x} + \frac{\partial (v^0 v^1)}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial (p^0 + p^1)}{\partial y} &= \frac{1}{\rho_0} \left(\nu^0 \frac{\partial p^0}{\partial y} + \frac{\partial s_{xy}^0}{\partial x} + \frac{\partial s_{yy}^0}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial v^1}{\partial y} &= \frac{1}{\nu^0 - 1} \left(u^0 \frac{\partial v^0}{\partial x} + v^0 \frac{\partial v^0}{\partial y} \right), \quad \nu^0 = 1 - \rho_0/\rho(p^0) \end{aligned}$$

(переменные с индексом 1 подлежат определению, а с индексом 0 находятся из решения уравнений нулевого приближения).

Рассмотрим задачу лобового соударения противоположно направленных плоских струй толщиной $2d_1$ и $2d_2$ (см. рисунок). Струи имеют одинаковые плотности ρ_0 и модули скорости u_∞ . Стационарное решение данной задачи известно [2]. Используем его в качестве нулевого приближе-



ния при вычислении напряжений в стационарной точке. Пусть $d_1 = d_2 = d$. Следуя [3], проинтегрируем первое уравнение системы (2) вдоль поверхности симметрии $y = 0$ с учетом граничных условий для первого приближения $v^1(x, 0) = 0$, $u^1(0, 0) = 0$, $u^1(\infty, 0) = -u_\infty$, $p^1(\infty, 0) = 0$, решения нулевого приближения $p^0(0, 0) = \rho_0 u_\infty^2 / 2$, $p^0(\infty, 0) = 0$, $v^0(x, 0) = 0$ и граничных условий для компонент дивергента напряжений $s_{ij}(\infty, 0) = 0$. В результате интегрирования

получим выражение для компоненты тензора напряжений σ_{xx}^1 в стационарной точке в первом приближении

$$(3) \quad -\sigma_{xx}^1(0, 0) = p^1(0, 0) - s_{xx}^v(0, 0) = p^0(0, 0) + \rho_0(u_\infty^2/2 - P(p^0)) - \int_0^\infty \frac{\partial s_{xy}^0}{\partial y} dx, \quad P(p^0) = \int_0^{p^0} \frac{dp}{\rho(p)}.$$

Второй член в правой части соотношения (3) есть поправка за счет сжимаемости, третий обусловлен прочностью и вязкостью материала соударяющихся струй. Способ вычисления поправки на сжимаемость в общем случае изложен в [4], для наших целей в предположении малости ν можно воспользоваться акустическим приближением $p = c_0^2(\rho - \rho_0)$ (c_0 — скорость звука). Вычисляя соответствующий интеграл, находим поправку, обусловленную сжимаемостью:

$$h_c = \rho_c \left(\frac{u_\infty^2}{2} - c_0^2 \ln \left(1 + \frac{p^0(0, 0)}{\rho_0 c_0^2} \right) \right).$$

Учитывая, что $p^0(0, 0) = \rho_0 u_\infty^2 / 2$, и осуществляя разложение в ряд по малому параметру u_∞^2 / c_0^2 , имеем

$$(4) \quad h_c = p^0(0, 0) u_\infty^2 / (4c_0^2).$$

Определим теперь поправку для жидкости с ньютоновской вязкостью $s_{xy}^0 = \mu (\partial u^0 / \partial y + \partial v^0 / \partial x)$ (μ — коэффициент вязкости). Предварительно заметим, что из условий несжимаемости, потенциальности и симметрии течения нулевого приближения легко найти следующие соотношения при $y = 0$:

$$(5) \quad v^0, \quad \frac{\partial v^0}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u^0}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y} = 0, \\ \frac{\partial^2 v^0}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial v^0}{\partial y} = -\frac{\partial u^0}{\partial x}.$$

Для $d_1 = d_2 = d$, используя общее решение [2], на поверхности симметрии $y = 0$ получаем

$$(6) \quad x = -\frac{2d}{\pi} \left[\ln \left(\frac{u_\infty + u^0}{u_\infty - u^0} \right) + 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{u^0}{u_\infty} \right) \right].$$

Из (3) с учетом (5), (6) находим поправку к напряжению за счет вязкости

$$(7) \quad h_v = -\int_0^\infty \frac{\partial s_{xy}}{\partial y} dx = 2\mu \int_0^\infty \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} dx = \mu \frac{\pi u_\infty}{4d}.$$

Перейдем к определению прочностной поправки, используя решение нулевого приближения (6) и модель идеальной упругопластической среды:

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{s}_{ij} &= 2g\varepsilon_{ij} \text{ в области упругости,} \\ \varepsilon_{ij} &= \lambda s_{ij}, \quad s_{ij}s_{ij} = 2Y_0^2/3 \text{ в пластической области,} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

Здесь $\dot{s}_{ij} = \frac{d}{dt}(s_{ij})$ — полная производная по времени; ε_{ij} — компоненты тензора скоростей деформаций; Y_0 — предел текучести; λ — коэффициент пропорциональности. Заметим, что $\varepsilon_{ii}^0 = 0$ вследствие несжимаемости течения нулевого приближения, поэтому девиатор скоростей деформаций совпадает с тензором скоростей деформаций. Вычисление прочностной поправки проведем отдельно в областях упругости и пластичности, опуская в дальнейших выкладках верхний индекс для решения нулевого приближения. Обозначим через x_* координату границы, разделяющей упругую и пластическую области, а $-u_*$ — определяемую этой координатой из (6) скорость. Найдем коэффициент пропорциональности λ в пластической области, применяя закон пластического течения и критерий текучести из (8):

$$(9) \quad \lambda = \frac{\sqrt{3}}{Y_0} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Подставляя (9) в (8) и дифференцируя по y , с учетом (5) получим

$$\frac{\partial s_{xy}}{\partial y} = - \frac{Y_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\sqrt{3} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|}.$$

После интегрирования определим поправку в области пластичности

$$(10) \quad \int_0^{x_*} \frac{\partial s_{xy}}{\partial y} dx = \frac{Y_0}{\sqrt{3}} \ln \left(1 - \frac{u_*^4}{u_\infty^4} \right).$$

В зоне упругости справедлив закон Гука $\dot{s}_{xy} = g (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x)$ (g — модуль сдвига). После дифференцирования этого соотношения по y с учетом (5) и стационарности течения получим уравнение для определения $\partial s_{xy} / \partial y$:

$$u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial s_{xy}}{\partial y} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial s_{xy}}{\partial y} + 2g \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Его решение, удовлетворяющее граничному условию $\partial s_{xy} / \partial y(\infty, 0) = 0$, имеет вид $\partial s_{xy} / \partial y = g[\pi(u_\infty^2 - u^2)u] / (2du_\infty^3)$. Интегрируя найденное решение, определяем поправку в области упругости

$$(11) \quad \int_{x_*}^{\infty} \frac{\partial s_{xy}}{\partial y} dx = 2g \left[\ln \left(1 + \frac{u_*^2}{u_\infty^2} \right) - \ln 2 \right].$$

Для нахождения скорости на границе области упругости проинтегрируем выражения для s_{xx} и s_{yy} вдоль траектории в упругой области с учетом граничных условий $s_{xy}(x, 0)$, $s_{xx}(\infty, 0)$, $s_{yy}(\infty, 0) = 0$. Получим связь напряжений со скоростью на границе области $s_{xx} = -s_{yy} = -2g \ln(u_\infty / u_*)$. Из условия достижения напряжениями круга текучести находим скорость на границе упругой области

$$(12) \quad u_* = u_\infty \exp(-Y_0 / (2\sqrt{3}g)).$$

Соотношения (10)—(12) дают решение задачи определения прочностной поправки к давлению в стационарной точке. Раскладывая решение в ряд по малому параметру Y_0/g , с точностью до членов более высокого порядка малости находим

$$(13) \quad h_{\pi} = \frac{Y_0}{\sqrt{3}} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{3}g}{2Y_0} \right) + 1 \right].$$

Таким образом, для задачи соударения противоположно направленных плоских струй определены поправки к напряжению в стационарной точке (4), (7), (13), обусловленные наличием сжимаемости, вязкости и прочности соответственно.

Задача о стационарном проникании струи в полупространство — предельный случай задачи лобового соударения струй при $d_1 = d = \text{const}$ и $d_2 \rightarrow \infty$ (см. рисунок). Решение задачи на поверхности симметрии $y = 0$:

$$x = -\frac{2d}{\pi} \left[\ln \left(\frac{u_{\infty} + u}{u_{\infty} - u} \right) - \frac{2u_{\infty}}{u_{\infty} + u} - \frac{2u_{\infty}^2}{(u_{\infty} + u)^2} + 4 \right].$$

Интегрируя первое уравнение системы (2) вдоль линии $y = 0$, получим соотношения для определения напряжений в стационарной точке:

$$\begin{aligned} -\sigma_{xx}^c(0, 0) &= \frac{\rho_0 u_{c0}^2}{2} + \rho_0 \left(\frac{u_{\infty}^2}{2} - P(p) \right) + \int_{-\infty}^0 \frac{\partial s_{xy}}{\partial y} dx, \\ -\sigma_{xx}^{\pi}(0, 0) &= \frac{\rho_0 u_{\infty}^2}{2} + \rho_0 \left(\frac{u_{\infty}^2}{2} - P(p) \right) - \int_0^{\infty} \frac{\partial s_{xy}}{\partial y} dx \end{aligned}$$

(величины с верхним индексом относятся к струе, а с π — к полупространству). Следуя изложенной выше процедуре, определим поправки к напряжениям в стационарной точке для рассматриваемого течения:

$$\begin{aligned} h_c^c &= h_c^{\pi} = p^0(0, 0) \frac{u_{\infty}^2}{4c_0^2}, \quad h_r^c = h_r^{\pi} = \mu \frac{\pi u_{\infty}}{8d}, \\ h_{\pi}^c &= \frac{Y_0}{\sqrt{3}} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{3}g}{4Y_0} \right) + 1 \right], \quad h_{\pi}^{\pi} = \frac{Y_0}{\sqrt{3}} \left[3 \ln \left(\frac{2\sqrt{3}g}{Y_0} \right) - \ln 2 + 1 \right] \end{aligned}$$

(выражения для h_{π}^c и h_{π}^{π} получены разложением в ряд по малому параметру Y_0/g). Как видим, прочностные поправки первого приближения для струи и полупространства различны. Это позволяет, потребовав выполнения условия $\sigma_{xx}^c(0, 0) = \sigma_{xx}^{\pi}(0, 0)$, найти поправку первого приближения к скорости в стационарной точке: $\Delta u = (h_{\pi}^{\pi} - h_{\pi}^c)/(2\rho_0 u_{\infty})$.

Приведем без вывода результат для пространственного осесимметричного течения, описываемого суперпозицией потенциалов стационарного равномерного потока и источника произвольной интенсивности. Прочностная поправка в точке торможения, полученная интегрированием по стационарному потоку вдоль оси симметрии, имеет вид $h_{\pi}^{\pi} = Y_0 [\ln(3g/2Y_0) + 2/3]$.

Сформулируем предположения, позволившие получить приведенные выше результаты: $u_{\infty}/c_0 \ll 1$ — малость поправки на сжимаемость, применимость акустического приближения, $\mu/(\rho_0 u_{\infty} d) \ll 1$ — малость вклада вязкости, $Y_0/(\rho_0 u_{\infty}^2) \ll 1$ — малость поправки за счет прочности. Предположение $Y_0/g \ll 1$ несущественно, оно позволяет упростить вид конечных формул.

Развитый подход для вычисления поправок первого приближения допускает очевидное обобщение на случай соударения струй с различными прочностными свойствами, поскольку течение нулевого приближения не зависит от реологии материалов струй.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости.— М.: Мир, 1967.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1973.
3. Pidsley P. H. A numerical study of long rod impact into a large target // J. Mech. Phys. Solids.— 1984.— V. 32, N 4.
4. Hangstad B. S., Dulum O. S. Finite compressibility in shaped charge jet and long rod penetration — the effect of shocks // J. Appl. Phys.— 1981.— V. 52, N 8.

г. Новосибирск

Поступила 28/1 1988 г.,
в окончательном варианте —
15/III 1988 г.

УДК 532.546

О. Б. Бочаров, О. В. Витовский, Ю. П. Колмогоров,
В. В. Кузнецов

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ВЯЗКОСТНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Вязкостная неустойчивость фронта вытеснения в пористой среде возникает при вытеснении жидкости с повышенной вязкостью менее вязкой жидкостью или газом. Изучению формирования и развития образующихся при этом языков вытесняющей жидкости посвящено большое число как теоретических, так и экспериментальных работ (см. обзоры [1, 2]). Условие устойчивости вытеснения для нейтрально смачиваемых пористых сред впервые получено в [3]. Течение жидкостей в этом случае происходит в разных областях (поршневое вытеснение), капиллярные силы учитываются в граничных условиях на фронте вытеснения. Для поршневого вытеснения нелинейная стадия развития вязкостной неустойчивости экспериментально и теоретически исследована в ячейке Хил—Шоу [4].

При хорошем смачивании пористой среды одной из жидкостей совместное течение двух жидкостей в поровом пространстве происходит во всей области вытеснения [5]. Условие устойчивости фронта вытеснения по отношению к малым возмущениям с учетом двухфазности течения приведено в [6]. В [7] показано, что при неустойчивом вытеснении капиллярные силы, вызывающие перегородки жидкостей в областях больших градиентов насыщенности вытесняющей жидкости, стабилизируют длину языков. Вместе с тем экспериментальные данные по структуре и динамике роста языков вытесняющей жидкости в пористой среде при развитом двухфазном течении в настоящее время отсутствуют.

В настоящей работе представлены результаты экспериментального изучения особенностей развития языков вытесняющей жидкости при неустойчивом вытеснении в условиях развитого двухфазного течения в области вытеснения. Проведено прямое сравнение полученных опытных данных по структуре и динамике роста языков с результатами численных расчетов на основе модели Маскета — Леверетта.

Эксперименты проводились на прямоугольной модели пористой среды с размером рабочего участка $1 \times 20 \times 60$ см, расположенной горизонтально. Рабочий участок заполнялся кварцевым песком, который затем виброуплотнялся при полном насыщении порового пространства водой. Это позволило получить однородную пористую среду с проницаемостью ~ 10 мкм² и пористостью $m = 0,4$. После виброуплотнения пористая среда высушивалась, вакуумировалась и насыщалась водным раствором NaCl с концентрацией 1 г/л, что позволило поддерживать однородную смачиваемость пористой среды водой в процессе опытов. Затем образец пористой среды заполнялся жидкостью с повышенной вязкостью от 1,2 до 80 мПа·с. Проведено два типа экспериментов. В первом вытесняющая жидкость хорошо смачивала пористую среду. В качестве вытесняющей жидкости использовался водный раствор NaCl с концентрацией 1 г/л, а вытесняемой — углеводородные жидкости с различной вязкостью. При заполнении рабочего участка углеводородной жидкостью перед опытом часть воды оставалась заземленной капиллярными силами, что моделировало начальную насыщенность вытесняющей жидкости, характерную, например, для нефтяных пластов в природных условиях. Во втором типе экспериментов вытесняющая жидкость не смачивала пористую среду. В качестве вытесняющей жидкости применялся очищенный керосин с