

О МЕДЛЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПОТЕНЦИАЛА
В ЭЛЕКТРОННО-ИОННЫХ ПОТОКАХ ВБЛИЗИ ЭМИТТЕРА

В. М. Смирнов

(Москва)

Рассматриваются квазистационарные распределения потенциала в одномерных ионно-электронных потоках вблизи эмиттирующей плоскости. Предполагается, что ролью близких соударений можно пренебречь. Найдены три типа режимов, неустойчивых относительно медленных изменений, граничных условий. Неустойчивость возникает вследствие обратной связи, осуществляемой медленными частицами, отраженными к эмиттеру потенциальными барьерами в дебаевском слое вблизи эмиттера.

Вопросы устойчивости стационарных колебаний потенциала по отношению к быстрым флуктуациям, возникающим в потоке частиц, рассматривались рядом авторов в гидродинамическом [1-3] и в кинетическом [3-7] приближениях. В работе [8] дана классификация стационарных одномерных распределений потенциала в электронно-ионных потоках, эмиттируемых плоскостью (в предположении, что можно пренебречь ролью близких столкновений).

Ниже исследуются неустойчивости в квазистационарных ионно-электронных потоках, развивающиеся из-за обратной связи между полем на эмиттере E_0 и током частиц на бесконечность j_0 при фиксированных начальных функциях распределения ионов и электронов по скоростям $f_{0i}(v)$ и $f_{0e}(v)$ и фиксированном значении тока j_k подаваемого на эмиттер источником питания. Обратная связь осуществляется при помощи медленных частиц, отраженных на эмиттер потенциальными барьерами.

Неустойчивости первого и второго типов, обусловленные отсутствием стационарных режимов при близких значениях E_0 , развиваются за время порядка $1/\omega_0$ (ω_0 — плазменная частота), так как число отраженных частиц, осуществляющих обратную связь, сравнимо с полным числом частиц.

Неустойчивость третьего типа проявляется в тех распределениях потенциала, когда выходящие из эмиттера медленные частицы вначале ускоряются и лишь затем замедляются и отражаются к эмиттеру. В частности, неустойчив однородный ионно-электронный поток с нулевым потенциалом относительно эмиттера при наличии частиц какого-то одного знака с энергиями, близкими к нулю. Время развития неустойчивости третьего типа может существенно превышать $1/\omega_0$, если число ускоряемых медленных частиц относительно мало.

В § 1 обосновывается форма приближенной системы уравнений для случая медленных колебаний граничных условий во времени, в § 2 исследуются решения этой системы.

Введем некоторые основные обозначения: x — расстояние от эмиттирующей плоскости, t — время, E — электрическое поле, Φ — электростатический потенциал с обратным знаком, $m, -e$ — масса и заряд электрона, μ — отношение массы электрона к массе иона, v — скорость частиц в направлении оси x , v_{im}, v_{em} — минимальные начальные скорости ионов и электронов, начиная с которых частицы уходят на бесконечность, $-\Phi_{im}, \Phi_{em}$ — минимальное и максимальное значения потенциала.

§ 1. Пусть масштаб времени τ , задаваемый изменением граничных условий во времени, много больше $1/\omega_0$. Рассмотрим для простоты случай с неподвижными ионами постоянной плотности n_i .

Будем исходить из системы уравнений

$$\frac{\partial f(x, v, t)}{\partial t} + v \frac{\partial f(x, v, t)}{\partial x} - \frac{e}{m} E(x, t) \frac{\partial f(x, v, t)}{\partial v} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = 4\pi e \left(n_i - \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v, t) dv \right)$$

с граничными условиями

$$E(x, t) = E_0(t), \quad f(x, v, t) = f_0(v, t) \quad \text{при } x=0$$

Здесь $f(x, v, t)$ — функция распределения электронов. Введем безразмерные величины

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{r_d}, & v' &= \frac{v}{v^0}, & t' &= \frac{t}{\tau}, & E' &= \frac{E}{E^0} \\ f' &= \frac{f v^0}{n_i}, & r_d &\equiv \frac{v^0}{\omega_0}, & \omega_0^2 &\equiv \frac{4\pi e^2 n_i}{m}, & E^0 &\equiv \frac{m v^0^2}{e r_d} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь v^0 — масштаб скорости. Величины df'/dt' , $v'df'/dx'$, f' одного порядка. Подставляя (1.2) в (1.1) и отбрасывая штрихи у новых переменных, получим

$$\varepsilon \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - E \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial x} = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f dv \quad \left(\varepsilon = \frac{1}{\tau \omega_0} \right) \quad (1.3)$$

Здесь ε — малый параметр, равный $1.8 \cdot 10^{-5} \tau / n_i^{1/2}$, если τ измеряется в секундах, а n_i в см^{-3} .

Переносим первый член в кинетическом уравнении в правую часть и формально интегрируя уравнение как неоднородное вдоль характеристик, получим кинетическое уравнение в виде

$$f(x, v, t) = f_1(x, v, t) - \varepsilon \int_0^x \frac{dx'}{v'} \frac{\partial f}{\partial t'}(x', v', t) \quad \left(\varphi \equiv \int_0^x E dx \right) \quad (1.4)$$

$$f_1(x, v, t) \equiv f_0(\sqrt{v^2 + 2\varphi(x, t)}, t), \quad v' \equiv \sqrt{v^2 + 2\varphi(x, t) - 2\varphi(x', t)}$$

Следовательно, при $x\varepsilon \ll 1$ можно представить решение в виде ряда

$$f(x, v, t) = f_1(x, v, t) - \varepsilon \int_0^x \frac{dx'}{v'} \frac{\partial f_1}{\partial t'}(x', v', t) + \varepsilon^2 \int_0^x dx' \int_0^{x'} dx'' \dots \quad (1.5)$$

по степеням параметра $x\varepsilon$ (или $x / \tau v^0$, если x — в см , v^0 — в $\text{см} / \text{сек}$, τ — в сек).

Из уравнений системы (1.3) следует соотношение

$$\frac{E^2(x, t)}{2} = \varphi(x, t) + \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v, t) v^2 dv + \varepsilon \int_0^x dx' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x', v, t)}{\partial t'} v dv + C(t) \quad (1.6)$$

где

$$C(t) \equiv \frac{E_0^2(t)}{2} - \int_{-\infty}^{\infty} f_0(v, t) v^2 dv$$

Подставляя (1.5) в (1.6), получаем

$$\begin{aligned} \frac{E^2(x, t)}{2} &= \varphi(x, t) + \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x, v, t) v^2 dv + \\ &+ \varepsilon \int_0^x dx' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_1(x', v, t)}{\partial t'} \left(v - \sqrt{v^2 - 2\varphi(x, t) + 2\varphi(x', t)} \right) dv + \\ &+ \varepsilon^2 \int_0^x dx' \int_0^{x'} dx'' \dots + C(t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Итак, вблизи эмиттирующей плоскости, пока $x\epsilon \ll 1$ (при этом x отсчитывается в дебаевских радиусах), можно пользоваться соотношением

$$\frac{E^2(x, t)}{2} = \Phi(x, t) + \int_{-\infty}^{\infty} f_0(v, t) v \sqrt{v^2 - 2\Phi(x, t)} dv + C(t) \quad (1.8)$$

которое является интегралом системы нулевого приближения

$$v \frac{\partial f(x, v, t)}{\partial x} - E(x, t) \frac{\partial f(x, v, t)}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v, t) dv \quad (1.9)$$

Совершенно аналогично можно показать, что в случае учета движения ионов при условии $\epsilon \ll \mu$, когда энергия ионов сравнима с высотой потенциального барьера, вблизи эмиттера ($x\epsilon \ll 1$) можно пользоваться системой нулевого приближения

$$\begin{aligned} v \frac{\partial f_e(x, v, t)}{\partial x} - E(x, t) \frac{\partial f_e(x, v, t)}{\partial v} &= 0 \\ v \frac{\partial f_i(x, v, t)}{\partial x} + \mu E(x, t) \frac{\partial f_i(x, v, t)}{\partial v} &= 0 \\ \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x, v, t) dv - \int_{-\infty}^{\infty} f_e(x, v, t) dv \end{aligned} \quad (1.10)$$

с граничными условиями

$$E(x, t) = E_0(t), \quad f_e(x, v, t) = f_{0e}(v, t), \quad f_i(x, v, t) = f_{0i}(v, t) \quad \text{при } x=0$$

Здесь f_i и f_e — функции распределения ионов и электронов, и в качестве масштаба плотности вместо постоянного n_i берется средняя плотность ионов.

Если энергия ионов достаточно велика, то их плотность n_i не зависит от распределения потенциала ($n_i = n_i(t)$) и можно использовать соотношения (1.8) и (1.9) при условии $x\epsilon \ll 1$; при этом масштабы в (1.2), включающие в себя n_i , будут, как и n_i , медленно меняющимися функциями времени ($\tau \ll 1/\omega_0$).

§ 2. Система (1.10) имеет интеграл

$$\begin{aligned} \frac{E^2}{2} &= 2 \int_{\frac{v_{em}}{\sqrt{2\Phi}}}^{v_{em}} f_{0e}(v, t) \sqrt{v^2 - 2\Phi(x, t)} v dv + \int_{v_{em}}^{\infty} f_{0e}(v, t) \sqrt{v^2 - 2\Phi(x, t)} v dv + \\ &+ 2 \frac{1}{\mu} \int_{\frac{v_{im}}{\sqrt{-2\mu\Phi}}}^{v_{im}} f_{0i}(v, t) \sqrt{v^2 + 2\mu\Phi(x, t)} v dv + \\ &+ \frac{1}{\mu} \int_{v_{im}}^{\infty} f_{0i}(v, t) \sqrt{v^2 + 2\mu\Phi(x, t)} v dv + C(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} C(t) &\equiv \frac{E_0^2(t)}{2} - \left(2 \int_0^{v_{em}} f_{0e}(v, t) v^2 dv + \int_{v_{em}}^{\infty} f_{0e}(v, t) v^2 dv + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{1}{\mu} \int_0^{v_{im}} f_{0i}(v, t) v^2 dv + \frac{1}{\mu} \int_{v_{im}}^{\infty} f_{0i}(v, t) v^2 dv \right) \end{aligned}$$

аналогичный интегралу (3) системы (1) в [8] для стационарного случая.

В каждый момент времени t_1 распределение потенциала является стационарным для данных $E_0(t_1)$, $f_{0e}(v, t_1)$, $f_{0i}(v, t_1)$, и распределение $\varphi(x, t)$ во времени представляет собой непрерывный переход друг в друга стационарных распределений потенциала. Эта квазистационарность распределения $\varphi(x, t)$ нарушается, если для данных $E_0(t)$, $f_{0e}(v, t)$, $f_{0i}(v, t)$ не существует стационарного распределения $\varphi(x)$ или если граничные условия меняются слишком быстро ($\tau \approx 1/\omega_0$). Выясним, какие режимы могут привести к нарушению квазистационарности.

Напишем закон сохранения заряда на эмиттере

$$\frac{dE_0}{dt} = j_{0e} - j_{0i} + j_k \quad \left(j_{0e} \equiv \int_{v_{em}}^{\infty} f_{0e} v dv, j_{0i} \equiv \int_{v_{im}}^{\infty} f_{0i} v dv \right) \quad (2.2)$$

Здесь j_k — некоторый ток компенсации, подаваемый на эмиттер извне. Из (2.2) следует, что для квазистационарных режимов полный ток $I \equiv j_{0e} - j_{0i} + j_k$ должен быть очень малым. В противном случае произошла бы быстрая перезарядка эмиттера за время

$$\Delta t = \frac{E^0}{4\pi en v^0} = \frac{mv^0^2}{er_d 4\pi en v^0} = \frac{1}{\omega_0} \quad \left(\Delta t \approx \frac{1}{\omega_0} \right)$$

Следовательно, при некотором случайном малом изменении тока I ток электронно-ионного потока $j_0 \equiv j_{0i} - j_{0e}$ должен измениться так, чтобы равенство

$$j_{0e} - j_{0i} + j_k = 0 \quad (2.3)$$

не нарушалось. Изменение тока j_0 происходит за счет появления флуктуации E_0 из-за ухода заряда с эмиттера, и соответствующего изменения v_{em} , v_{im} при заданных значениях $f_{0e}(v)$, $f_{0i}(v)$, так как функции $f_{0e}(v, t)$, $f_{0i}(v, t)$ ($v > 0$) по условию медленно меняются во времени. Если $I = 0$, а случайно меняется E_0 , то это вызывает изменение j_0 , т. е. ведет снова к изменению I и задача сводится к предыдущей.

Будем называть режим неустойчивым, если малое изменение I может вызвать такое E_0 , при котором для данных $f_{0e}(v)$, $f_{0i}(v)$ не существует стационарного режима, а также если такой стационарный режим существует, но ему соответствует ток j_0 , увеличивающий I , — тогда сколь угодно малое колебание I может вызвать автоматический рост I до конечных значений, что также означает нарушение квазистационарности. Под устойчивым режимом будем понимать режим, при котором небольшие колебания I вызывают изменения E_0 , меняющие ток j_0 так, чтобы обратить I снова в нуль.

Изменение I удобно представить себе как малое изменение j_k , ведущее к изменению заряда на эмиттере, и вопрос состоит в том, будет ли ток j_0 изменяться при этом так, чтобы скомпенсировать ток j_k .

Отсутствие стационарных режимов при близких значениях E_0 ведет к неустойчивостям двух типов. Возьмем для простоты случай $E_0 > 0$ без медленных ионов. Первый тип неустойчивых режимов показан на фиг. 1 ($Y = E^2/2$, по поводу графиков $Y(\varphi|x)$ см. [8]). Здесь, поскольку j_{0i} не зависит от колебаний E_0 , при уменьшении j_k должно увеличиться j_{0e} , т. е. φ_{em} должно уменьшиться, чтобы пропустить часть медленных электронов на бесконечность.

Но для данных $f_{0i}(v)$, $f_{0e}(v)$ уменьшение φ_{em} вызовет уменьшение $Y(\varphi)$ на всем интервале $(0, \varphi_{em})$, т. е. Y в окрестности φ_k должно принять отрицательные значения, что невозможно. Таким образом, режим на фиг. 1 неустойчив относительно уменьшения j_k .

Второй тип неустойчивых режимов связан с нарушением условия

$$\left. \frac{dY}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_{em}} \leq 0 \quad (2.4)$$

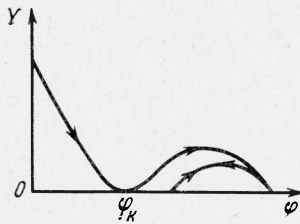
необходимого для положительности Y вблизи φ_{em} .

Рассмотрим функцию (фиг. 2)

$$Z(\varphi) \equiv \int_{v_{im}}^{\infty} f_{oi}(v) \sqrt{v^2 + 2\mu\varphi} v dv + \int_{\sqrt{2\varphi}}^{\infty} f_{oe}(v) \sqrt{v^2 - 2\varphi} v dv$$

которая обладает в точке φ_{em} той же производной, что и $Y(\varphi)$; следовательно, если для данного φ_{em} при заданных $f_{oe}(v)$, $f_{oi}(v)$ не выполняется условие

$$\left. \frac{dZ}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_{em}} \leq 0 \quad (2.5)$$



Фиг. 1

то стационарный режим с данными φ_{em} , f_{oe} , f_{oi} невозможен. Режимы с монотонным потенциалом ($dY/d\varphi = 0$ при $\varphi = \varphi_{em}$, фиг. 3) устойчивы лишь в том случае, если φ_{em} лежит в точке перегиба $Z(\varphi)$, причем $dZ/d\varphi < 0$ вблизи φ_{em} (φ_1 на фиг. 2), и неустойчивы, если φ_{em} лежит на экстремуме $Z(\varphi)$ или в точке перегиба $dZ/d\varphi > 0$ вблизи φ_{em} ($\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ на фиг. 2).

Неустойчивость третьего типа связана с наличием медленных ионов (при $E_0 > 0$) и проявляется в том, что малому изменению I соответствует такое малое изменение E_0 , которое увеличивает нескомпенсированный ток I и приводит к быстрому его нарастанию. Если рассматривать зависимость $j_0(E_0)$ при заданных $f_{oe}(v)$, $f_{oi}(v)$, то неустойчивость третьего типа будет при тех E_0 , для которых

$$dj_0/dE_0 < 0 \quad (2.6)$$

т. е., например, небольшой дополнительный уход ионов с эмиттера, вызванный небольшим увеличением j_0 , вызывает через уменьшение E_0 дальнейшее увеличение j_0 .

Вычислим dj_0/dE_0 . Имеем

$$j_0 = \int_{v_{im}}^{\infty} f_{oi}(v) v dv - \int_{v_{em}}^{\infty} f_{oe}(v) v dv \quad (2.7)$$

Отсюда

$$(2.8)$$

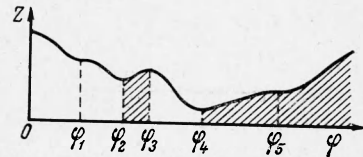
$$dj_0 = -f_{oi}(v_{im}) \mu d\varphi_{im} + f_{oe}(v_{em}) d\varphi_{em}$$

$$\varphi_{im} \equiv \mu^{-1} v_{im}^2 / 2, \quad \varphi_{em} \equiv v_{em}^2 / 2$$

Условие $Y(\varphi_{em}) = Y(-\varphi_{im}) = 0$ для случая $E_0 > 0$ означает (см. 2.1)

$$0 = \int_{v_{em}}^{\infty} f_{oe}(v) \sqrt{v^2 - v_{em}^2} v dv + \mu^{-1} \int_0^{\infty} f_{oi}(v) \sqrt{v^2 + \mu v_{em}^2} v dv + \mu^{-1} \int_0^{v_{im}} f_{oi}(v) \sqrt{v^2 + \mu v_{em}^2} v dv + C(E_0, v_{em}, v_{im}) \quad (2.9)$$

$$0 = \int_{v_{em}}^{\infty} f_{oe}(v) \sqrt{v^2 + \mu^{-1} v_{im}^2} v dv + \mu^{-1} \int_{v_{im}}^{\infty} f_{oi}(v) \sqrt{v^2 - v_{im}^2} v dv + C(E_0, v_{em}, v_{im}) \quad (2.10)$$



Фиг. 2

В соотношениях (2.9) и (2.10) выражение для $C(E_0, v_{em}, v_{im})$ имеет вид

$$C(E_0, v_{em}, v_{im}) = \frac{E_0^2}{2} - \left(\int_0^{v_{em}} f_{0e} v^2 dv + \int_0^\infty f_{0e} v^2 dv + \right. \\ \left. + \mu^{-1} \int_0^{v_{im}} f_{0i} v^2 dv + \mu^{-1} \int_0^\infty f_{0i} v^2 dv \right) \quad (2.11)$$

Так как при изменении $\varphi_{em}, \varphi_{im}, E_0$ эти равенства должны сохраняться, то можно взять от них дифференциалы

$$E_0 dE_0 = \left[-\frac{dY}{d\varphi} (\varphi_{em}) + f_{0e}(v_{em}) v_{em} \right] d\varphi_{em} - \\ - f_{0i}(v_{im}) (\sqrt{v_{im}^2 + \mu v_{em}^2} - v_{im}) d\varphi_{im} \quad (2.12)$$

$$E_0 dE_0 = f_{0e}(v_{em}) (\sqrt{v_{em}^2 + \mu^{-1} v_{im}^2} + v_{em}) d\varphi_{em} + \\ + \left[\frac{dY}{d\varphi} (\varphi_{im}) + f_{0i}(v_{im}) v_{im} \right] d\varphi_{im} \quad (2.13)$$

Выражая $d\varphi_{em}, d\varphi_{im}$ через $E_0 dE_0$ и подставляя полученные выражения в (2.8), найдем связь dj_0 и dE_0 (для случая $E_0 > 0$)

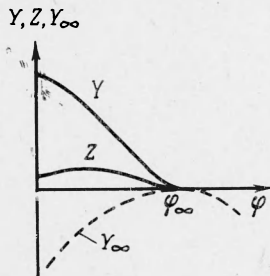
$$dj_0 = E_0 dE_0 \frac{f_{im} f_{em} v_1 (\mu + \mu^{1/2}) + \mu f_{im} Y_{em}' + f_{em} Y_{im}'}{(-Y_{em}' + f_{em} v_{em})(Y_{im}' + f_{im} v_{im}) + f_{em} f_{im} (v_{em} + v_1)(\mu^{1/2} v_1 - v_{im})} \quad (2.14)$$

$$\frac{d\varphi_{im}}{d\varphi_{em}} = \frac{-Y_{em}' - f_{em} v_1}{Y_{im}' + \mu^{1/2} f_{im} v_1}, \quad Y_{em}' \equiv \frac{dY}{d\varphi} (-\varphi_{em}), \quad Y_{im}' \equiv \frac{dY}{d\varphi} (-\varphi_{im}) \\ f_{em} \equiv f_{0e}(v_{em}), \quad f_{im} \equiv f_{0i}(v_{im}), \quad v_1 \equiv \sqrt{v_{em}^2 + \mu^{-1} v_{im}^2} \quad (2.16)$$

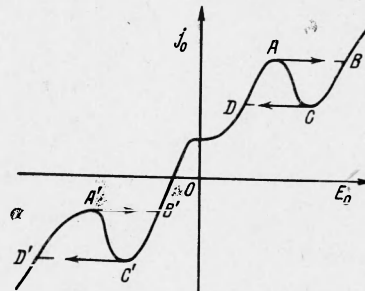
Аналогично для $E_0 < 0$

$$dj_0 = E_0 dE_0 \frac{-f_{im} f_{em} v_1 (\mu + \mu^{1/2}) + \mu f_{im} Y_{em}' + f_{em} Y_{im}'}{(-Y_{em}' + f_{em} v_{em})(Y_{im}' + f_{im} v_{im}) + f_{em} f_{im} (\mu^{1/2} v_1 + v_{em})(v_1 - v_{em})} \\ \frac{d\varphi_{em}}{d\varphi_{im}} = \frac{Y_{im}' - \mu^{1/2} f_{im} v_1}{-Y_{em}' + f_{em} v_1} \quad (2.17)$$

Учитывая, что $Y_{em}' \leq 0$ и $Y_{im}' \geq 0$ для стационарных режимов, за-



Фиг. 3



Фиг. 4

метим, что знаменатели выражений (2.14) — (2.17) неотрицательны, а числители могут быть как положительными, так и отрицательными. Для

устойчивого режима должно выполняться

$$dj_0 / dE_0 \geq 0 \quad (2.18)$$

Легко видеть, что если $d\varphi_{em} / d\varphi_{im} \leq 0$, то (2.18) заведомо выполняется. Условие (2.18) не выполняется в случае, если $f_{em} = 0$, $f_{im} \neq 0$ для $E_0 > 0$ или $f_{em} \neq 0$, $f_{im} = 0$ для $E_0 < 0$ и в достаточно близких случаях ($f_{em} \approx 0$, $f_{im} \approx 0$ соответственно). Тогда

$$\frac{dj_0}{dE_0} = -E_0 \frac{f_{im}}{Y_{im}' + f_{im}v_{im}} \equiv -\mu \frac{F_0}{v_i^\circ}, \quad E_0 > 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{dj_0}{dE_0} = E_0 \frac{f_{em}}{-Y_{em}' + f_{em}v_{em}} \equiv \frac{F_0}{v_e^\circ}, \quad E_0 < 0 \quad (2.20)$$

$$v_i^\circ = v_{im} + \frac{Y_{im}'}{f_{im}}, \quad v_e^\circ = v_{em} - \frac{Y_{em}'}{f_{em}}$$

Пример графика $j_0(E_0)$ приведен на фиг. 4. Участки AC , $A'C'$ являются неустойчивыми, так как из точек A , A' режим скачком переходит соответственно в точки B и B' , а из точек C , C' в D , D' .

В заключение автор благодарит А. И. Морозова за интерес к работе и полезные дискуссии.

Поступила 19 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ораевский В. Н. и Сагдеев Р. З. Об устойчивости установившихся продольных колебаний плазмы. Ж. техн. физ., 1962, т. 32, № 11, стр. 1291.
2. Ораевский В. Н. К вопросу устойчивости установившихся колебаний плазмы без магнитного поля. Ж. техн. физ., 1963, т. 33, № 2, стр. 259.
3. Pearlstein L. D., Rosenbluth M. N. and Stuart Cr. W. Neutralization of Ion Beams. Electric propulsion development, Acad. Press, 1963, p. 379.
4. Montgomery D. Stability of large amplitude waves in the One-Dimensional Plasma. Physics of Fluids, 1960, vol. 3, No. 2, p. 274.
5. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. Об устойчивости плоских электронных пучков в ограниченных системах с тормозящим электрическим полем. Ж. эксперим. и теор. физ., 1962, т. 43, № 1, стр. 158.
6. Minardi E. Energy Principle for Electrostatic Stability of a plasma. Nuovo Cimento, 1964, vol. 31, No. 3, p. 674.
7. Minardi E. Microstability Conditions for a Plasma in a Box. Nuovo Cimento, 1964, vol. 31, p. 679.
8. Смирнов В. М. Нелинейные стационарные колебания потенциала в ионно-электронных потоках, эмиттируемых плоскостью. Радиотехн. и электрон., 1963, т. 8, № 10, стр. 1729.