

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТАНГЕНЦИАЛЬНЫХ РАЗРЫВОВ  
В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

В. Л. Сизоненко, К. Н. Степанов

(Харьков)

Исследование устойчивости тангенциальных разрывов идеально проводящей несжимаемой жидкости, проведенное С. И. Сыроватским [1, 2], показало, что достаточно сильное магнитное поле может стабилизировать тангенциальный разрыв.

Ниже исследуется устойчивость тангенциального разрыва идеально проводящей сжимаемой жидкости в сильном магнитном поле, когда альфвеновская скорость по обе стороны поверхности разрыва  $V_{a1,2}$  значительно больше скорости звука  $V_{s1,2}$  (в случае несжимаемой жидкости  $V_{a1,2} \ll V_{s1,2}$ ).

Показано, что тангенциальный разрыв неустойчив, если магнитное поле не изменяется по направлению (или поворачивается на  $180^\circ$ ) при переходе через поверхность разрыва и скачок скорости жидкости  $\mathbf{v}$  не коллинеарен магнитному полю.

Если же скорость  $\mathbf{v}$  коллинеарна магнитному полю или если угол между магнитными полями по обе стороны поверхности разрыва не близок к нулю, то тангенциальный разрыв устойчив при  $v < v_*$  и неустойчив при  $v > v_*$ , где  $v_*$  — порядка альфвеновской скорости. В работе найдена граница области устойчивости  $v = v_*$  для ряда предельных случаев<sup>1</sup>.

§ 1. Полная система уравнений, описывающих адиабатическое движение идеально проводящей сжимаемой жидкости, имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \times \text{rot } \mathbf{H}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \right) \frac{p}{\rho^\gamma} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{H}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0$$

Здесь  $\mathbf{v}$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$  — скорость, плотность, давление и температура жидкости,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля.

Будем считать, что плоскость  $z = 0$  совпадает с поверхностью тангенциального разрыва. В отсутствие возмущения имеем

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1, \quad \rho = \rho_1, \quad p = p_1, \quad T = T_1, \quad \mathbf{H} = H_1 \quad \text{при } z > 0 \text{ (область 1)}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_2, \quad \rho = \rho_2, \quad p = p_2, \quad T = T_2, \quad \mathbf{H} = H_2 \quad \text{при } z < 0 \text{ (область 2)}$$

В случае тангенциального разрыва магнитное поле в отсутствие возмущения лежит [4] в плоскости разрыва  $H_{z1} = H_{z2} = 0$ .

<sup>1</sup> После того как настоящая статья была отправлена в печать, появилась работа [3], в которой также рассматривается устойчивость тангенциального разрыва в идеально проводящей сжимаемой жидкости. В работе [3] найдены в случае малой сжимаемости поправки к критерию устойчивости С. И. Сыроватского [1]. Граница области устойчивости при  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$  и  $\mathbf{H}_1 \perp \mathbf{H}_2$  определена неправильно (при  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$  результаты [4] противоречат условию (2.4), а при  $\mathbf{H}_1 \perp \mathbf{H}_2$  граничная кривая лежит при  $V_s = 0$  в области  $V_a/v > 1$ , что противоречит условию  $1/2 < V_a/v < 1$ , которое следует из уравнения (2.7) данной работы.

Будем искать решения для малых возмущений  $f'$  величины  $f$  в виде плоских волн  $f' \sim \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$ , где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор,  $\omega$  — комплексная частота. Тогда, линеаризуя уравнения (1.1), получим

$$v_i' [(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_a)^2] + v_j' [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_a)(k_i V_{aj} + k_j V_{ai}) - k_i k_j (V_s^2 + V_a^2)] = 0$$

$$(\mathbf{V}_a (4\pi\rho)^{-1/2} \mathbf{H}) \quad (1.2)$$

Здесь  $V_s$  — скорость звука,  $V_a$  — альфвеновская скорость. Возмущения плотности, давления и магнитного поля определяются через  $v'$  согласно соотношениям

$$\rho' = \rho \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}, \quad p' = V_s^2 \rho', \quad \mathbf{H}' = \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') \mathbf{H} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{v}'}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \quad (1.3)$$

Приравнявая определитель однородной системы (1.2) нулю, получим

$$k_{zi} = \pm \sqrt{f_i(\omega, k_x, k_y)}$$

$$f_i = \frac{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i)^4}{(V_{si}^2 + V_{ai}^2)(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i)^2 - V_{si}^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{ai})^2} - k_x^2 - k_y^2 \quad (i = 1, 2) \quad (1.4)$$

Здесь индекс  $i = 1, 2$  различает среды по обе стороны разрыва.

Чтобы возмущения были ограниченными при  $|z| \rightarrow \infty$ , выбираем те решения (1.4), для которых  $\text{Im } k_{z1} \geq 0$  и  $\text{Im } k_{z2} \leq 0$ . К уравнениям (1.1) необходимо добавить условие равенства давлений на границе разрыва

$$\left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right)_1 = \left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right)_2$$

Отсюда получим (1.5)

$$\left(p' + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}'}{4\pi}\right)_1 = \left(p' + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}'}{4\pi}\right)_2 \quad \left(p' + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}'}{4\pi} = \left[\frac{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{k_z} \rho - \rho \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_a)^2}{k_z (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}\right] v_z'\right)$$

Учитывая, что нормальная составляющая скорости точки поверхности разрыва связана со смещением  $\zeta$  в направлении  $z$  соотношением  $v_z' = d\zeta/dt = -i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})\zeta$  и  $\zeta_1 = \zeta_2$ , получим из (1.5) дисперсионное уравнение

$$\frac{k_{z1}}{\rho_1 [(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1)^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{a1})^2]} = \frac{k_{z2}}{\rho_2 [(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{a2})^2]} \quad (1.6)$$

Здесь  $k_{z1,2}$  определяются выражениями (1.4). Дисперсионное уравнение (1.6) совпадает с уравнением, полученным С. И. Сыроватским [2].

Возводя правую и левую части уравнения (1.6) в квадрат, получим в системе отсчета, в которой  $\mathbf{v}_2 = 0$

$$\rho_2^2 \left[ \frac{(V_f - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v})^4}{(V_{s1}^2 + V_{a1}^2)(V_f - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v})^2 - V_{s1}^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_{a1})^2} - 1 \right] [V_f^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_{a2})^2]^2 =$$

$$= \rho_1^2 \left[ \frac{V_f^4}{(V_{s2}^2 + V_{a2}^2)V_f^2 - V_{s2}^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_{a2})^2} - 1 \right] [(V_f - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v})^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_{a1})^2]^2 \quad (1.7)$$

Здесь

$$V_f = \frac{\omega}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}, \quad \mathbf{n} = \left( \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}, \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}, 0 \right), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

Уравнение (1.7) более удобно для исследования, чем уравнение (1.6). Однако при переходе от уравнения (1.6) к уравнению (1.7) возникают лишние корни. Поэтому необходимо каждый раз проверять, является ли решение уравнения (1.7) также и решением уравнения (1.6).

Если уравнение (1.6) имеет решения с  $\text{Im } \omega > 0$ , то тангенциальный разрыв неустойчив. Если все решения уравнения (1.6) вещественные, то тангенциальный разрыв устойчив.

Исследуем решения уравнения (1.6) в некоторых предельных случаях.

Если магнитное поле слабое, так что альфвеновская скорость значительно меньше скорости звука, то

$$k_{z1} = -k_{z2} = i \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad \text{при } v \ll V_{s1,2}, \quad |V_f| \ll V_s, \quad V_{a1,2} \ll V_{s1,2}$$

В этом случае уравнение (1.6) совпадает с дисперсионным уравнением для несжимаемой жидкости

$$\rho_1[(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1)^2 - (\mathbf{kV}_{a1})^2] + \rho_2[(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{kV}_{a2})^2] = 0 \quad (1.8)$$

Отсюда

$$\omega = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} [\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \pm \left( \left( 1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{a1})^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{a2})^2] - \frac{\rho_2}{\rho_1} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 \right)^{1/2}]$$

Отсюда следует, что тангенциальный разрыв устойчив при выполнении условий [1, 2]

$$v^2 < \frac{\rho_1 + \rho_2}{4\pi\rho_1\rho_2} (H_1^2 + H_2^2), \quad |4\pi\rho_1\rho_2 [(\mathbf{v} \times \mathbf{H}_1)^2 + (\mathbf{v} \times \mathbf{H}_2)^2]| \ll \\ \ll |(\rho_1 + \rho_2) (\mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2)^2| \quad (1.9)$$

Остальные корни уравнения (1.7) в области  $v \ll V_{s1,2}$  вещественные. В области  $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}| \gg V_{a1,2}$  имеются два комплексных корня уравнения (1.6). Необходимым критерием вещественности всех решений уравнения (1.6) в этой области будет условие

$$|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}| > \sqrt{2}(V_{s1} + V_{s2})$$

Это неравенство не выполняется, если угол между векторами  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{v}$  достаточно близок к  $1/2\pi$ . Таким образом, в слабом магнитном поле критерий устойчивости тангенциального разрыва сжимаемой идеально проводящей жидкости совпадает с критерием устойчивости для несжимаемой жидкости.

§ 2. Рассмотрим устойчивость тангенциального разрыва в сильном однородном магнитном поле в отсутствие скачка плотности ( $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ). Так как  $V_{a1} = V_{a2} = V_a$ , то из условия баланса давлений в состоянии равновесия

$$V_{a1}^2 + \gamma_1 V_{s1}^2 = V_{a2}^2 + \gamma_2 V_{s2}^2$$

следует, что  $V_{s1} = V_{s2} = V_s$ , если  $\gamma_1 = \gamma_2$ . В этом случае уравнение (1.7) является полиномом девятой степени относительно  $V_f$ . Если  $V_f$  — решение уравнения (1.6), то

$$V_f' = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} - V_f$$

также будет решением уравнения (1.6).

Так как  $V_a \gg V_s$ , то нетрудно найти все девять корней уравнения (1.7)

$$V_f = \pm V_s \cos \vartheta, \quad V_f = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \pm V_s \cos \vartheta, \quad V_f = 1/2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \\ V_f = 1/2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \pm \sqrt{V_a^2 + 1/4 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})^2 + V_a \sqrt{V_a^2 \sin^4 \vartheta + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})^2}} \\ V_f = 1/2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \pm \sqrt{V_a^2 + 1/4 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})^2 - V_a \sqrt{V_a^2 \sin^4 \vartheta + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})^2}} \quad (2.1)$$

Из выражений (2.1) следует критерий устойчивости

$$V_a^2 + 1/4(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})^2 > V_a \sqrt{V_a^2 \sin^4 \vartheta + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})^2} \quad (2.2)$$

т. е.

$$\text{либо } (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})^2 < 4V_a^2 \cos^2 \vartheta, \quad \text{либо } (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})^2 > 4V_a^2 (1 + \sin^2 \vartheta) \quad (2.3)$$

Если  $\mathbf{v}$  не коллинеарно  $\mathbf{H}$ , то первое неравенство (2.3) не может выполняться при  $\vartheta \rightarrow 1/2\pi$ , а второе неравенство (2.3) не выполняется, если угол  $\psi$  между  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{v}$  близок к  $1/2\pi$ . Таким образом, тангенциальный разрыв в однородном магнитном поле в отсутствие скачка плотности неустойчив, если  $\mathbf{v}$  не коллинеарно  $\mathbf{H}$ .

Если  $\mathbf{v}$  коллинеарно  $\mathbf{H}$ , то условие (2.2) выполняется для любых  $\vartheta$  при

$$v < 2V_a \quad (2.4)$$

в противоположном случае тангенциальный разрыв неустойчив. Отметим, что при  $\rho_1 = \rho_2$ ,  $\mathbf{H}_1 = \pm \mathbf{H}_2$  и  $\pm \mathbf{v} \parallel \mathbf{H}_{1,2}$  условие (2.4) будет необходимым критерием устойчивости [2] и при  $V_a \lesssim V_s$ ; при  $V_a \gg V_s$  условие (2.4) будет также и достаточным критерием устойчивости.

Рассмотрим устойчивость тангенциального разрыва в отсутствие скачка плотности, когда

магнитные поля  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$  одинаковы по абсолютной величине, но не коллинеарны и  $V_{s1} = V_{s2} = V_s$ .

Обозначим через  $\vartheta_{1,2}$  угол между векторами  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{H}_{1,2}$ , через  $\Phi_{1,2}$  — угол между  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{H}_{1,2}$ , через  $\psi$  — угол между  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{v}$ , а через  $\varphi$  — угол между  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$  (фиг. 1).

Нетрудно убедиться, что если  $V_f(\vartheta_1, \vartheta_2, \Phi_1, \Phi_2)$  — решение уравнения (1.6), то величина

$$V_f' = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} - V_f(\vartheta_2, \vartheta_1, \Phi_2, \Phi_1)$$

также будет решением этого уравнения.

Рассмотрим сначала случай, когда  $\cos^2 \vartheta_1$  не близок к  $\cos^2 \vartheta_2$ . Тогда при  $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}| \lesssim V_s$  нетрудно найти восемь вещественных корней уравнения (1.7)

$$V_f = \pm V_s \cos \vartheta_2 \pm \frac{V_s^3}{2V_a^2} \frac{\cos^2 \vartheta_2}{1 - (\cos \vartheta_2 / \cos \vartheta_1)^4}$$

$$V_f = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \pm V_s \cos \vartheta_1 \pm \frac{V_s^3}{2V_a^2} \frac{\cos^2 \vartheta_1}{1 - (\cos \vartheta_1 / \cos \vartheta_2)^4} \quad (2.5)$$

$$V_f = \pm V_a \sqrt{1/2(\cos^2 \vartheta_1 + \cos^2 \vartheta_2)}, \quad V_f = \pm V_a + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{1 - (\sin \vartheta_1 / \sin \vartheta_2)^4}$$

Девятый корень этого уравнения также является вещественным. Поэтому в области  $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}| \lesssim V_s$  и  $\cos^2 \vartheta_1$ , не близком к  $\cos^2 \vartheta_2$ , тангенциальный разрыв устойчив. Если  $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}| \lesssim V_s$  и  $\cos^2 \vartheta_1 \rightarrow \cos^2 \vartheta_2$ , то решения (2.5) переходят соответственно в первое, второе, пятое и четвертое решения (2.1), причем в последних двух можно пренебречь величиной  $nv$  по сравнению с  $V_a$ . Таким образом, в области  $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}| \lesssim V_s$  и  $\cos^2 \vartheta_1 \approx \cos^2 \vartheta_2$  все решения уравнения (1.7) будут также вещественными, т. е. при  $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}| \lesssim V_s \ll V_a$  тангенциальный разрыв всегда устойчив.

Если  $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}| \gg V_s$ , то нетрудно найти четыре вещественных корня уравнения (1.7)

$$V_f = \pm V_s \cos \vartheta_2, \quad V_f = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \pm V_s \cos \vartheta_1$$

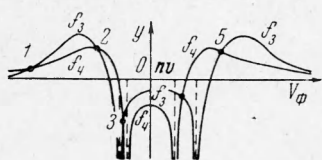
Для остальных корней получим из (1.7), пренебрегая членами порядка  $V_s^2 / V_a^2$  уравнение

$$f_3(V_f) = f_4(V_f) \quad (2.6)$$

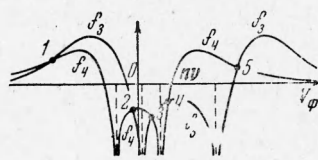
где

$$f_3(V_f) = \frac{(V_f - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v})^2 - V_a^2}{[(V_f - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v})^2 - V_a^2 \cos^2 \vartheta_1]^2}, \quad f_4(V_f) = \frac{V_f^2 - V_a^2}{(V_f^2 - V_a^2 \cos^2 \vartheta_2)^2}$$

Графики функций  $y = f_3(V_f)$  и  $y = f_4(V_f)$  при  $\cos^2 \vartheta_1 > \cos^2 \vartheta_2$  схематически показаны на фиг. 2–5. (Если  $\cos^2 \vartheta_1 < \cos^2 \vartheta_2$ , то достаточно сделать замену  $V_f = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} - V_f^0$ , чтобы получить для  $V_f^0$  такое же уравнение, как и для  $V_f$  при  $\cos^2 \vartheta_1 > \cos^2 \vartheta_2$ .)

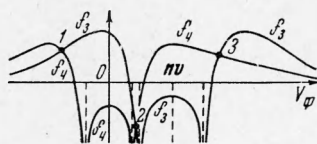


Фиг. 2

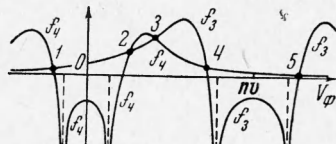


Фиг. 3

Здесь фиг. 2 соответствует области  $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}| < V_a(|\cos \vartheta_1| - |\cos \vartheta_2|)$ , где все корни уравнения (2.6), соответствующие точкам пересечения 1, ..., 5 кривых  $y = f_3(V_f)$  и  $y = f_4(V_f)$ , вещественные. Если  $V_a(|\cos \vartheta_1| - |\cos \vartheta_2|) < |\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}| < V_a(|\cos \vartheta_1| + |\cos \vartheta_2|)$ , то, как видно из фиг 3, все пять корней уравнения (2.6) по-прежнему вещественны.



Фиг. 4



Фиг. 5

Два комплексно сопряженных корня появляются лишь тогда, когда  $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}| > a$ , где  $a$  — граница области вещественности всех корней уравнения (2.6) при заданных  $\cos^2 \vartheta_1$  и  $\cos^2 \vartheta_2$  — должна удовлетворять неравенству (фиг. 4)

$$V_a(|\cos \vartheta_1| + |\cos \vartheta_2|) < a < V_a(1 + \sqrt{2 - \cos^2 \vartheta_1}) \quad (2.7)$$

Граница  $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}| = a$  определяется из условия касания кривых  $y = f_3(v_f)$  и  $y = f_4(v_f)$ . При дальнейшем увеличении  $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|$  все корни уравнения (2.6) будут вещественными при  $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}| > b$ , где  $b$  — вторая граница области вещественности всех корней (фиг. 5).

Случай, когда  $\cos^2 \vartheta_2$  (либо  $\cos^2 \vartheta_1$ ) близок к нулю, не отличается от рассмотренного выше. Исключение составляет лишь случай, когда  $\cos^2 \vartheta_2 = 0$ . При этом графические решения, схематически показанные на фиг. 2, 4, 5, остаются пригодными (хотя ветвь функции  $y = f_4(V_f)$  в области  $-V_a|\cos \vartheta_2| < V_f < V_a|\cos \vartheta_2|$  исчезает, а решения, соответствующие фиг. 3, исключаются из рассмотрения).

Так как условие устойчивости  $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}| > b$  не может выполняться при  $|\cos \vartheta| \approx 0$ , то для определения границы устойчивости достаточно исследовать

довать условие  $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}| < a$ . Для этого удобно ввести величины

$$x = \frac{V_f}{V_a} - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{2V_a}, \quad \eta = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_i}{2V_a}$$

$$\cos^2 \vartheta = \frac{1}{2}(\cos^2 \vartheta_1 + \cos^2 \vartheta_2), \quad \varepsilon = \frac{\cos^2 \vartheta_1 - \cos^2 \vartheta_2}{\cos^2 \vartheta_1 + \cos^2 \vartheta_2}$$

Тогда уравнение (2.6) примет вид

$$P(x) = x^5 + \varepsilon \frac{\cos^2 \vartheta}{\eta} x^4 - 2(1 + \eta^2)x^3 - \varepsilon \frac{\cos^2 \vartheta}{\eta} (1 + \cos^2 \vartheta + 4\eta^2)x^2 +$$

$$+ [\eta^4 - 2\eta^2 + 2\cos^2 \vartheta - (1 + \varepsilon^2)\cos^4 \vartheta]x - \varepsilon \frac{\cos^2 \vartheta}{\eta} (\cos^2 \vartheta - \eta^2) = 0 \quad (2.8)$$

Кратные корни, соответствующие касанию кривых  $y = f_3(V_f)$  и  $y = f_4(V_f)$ , должны удовлетворять уравнению

$$P'(x) = 5x^4 + 4\varepsilon\eta^{-1}\cos^2 \vartheta x^3 - 6(1 + \eta^2)x^2 -$$

$$- 2\varepsilon\eta^{-1}\cos^2 \vartheta (1 + \cos^2 \vartheta + 4\eta^2)x + \eta^4 - 2\eta^2 + 2\cos^2 \vartheta -$$

$$- (1 + \varepsilon^2)\cos^4 \vartheta = 0 \quad (2.9)$$

Нетрудно убедиться, что при выполнении неравенств

$$|\eta^2 - \cos^2 \vartheta| \ll 1, \quad \varepsilon^2 \cos^4 \vartheta \ll 1 \quad (2.10)$$

уравнения (2.8) и (2.9) имеют общий корень  $|x| \ll 1$ .

Так как в рассматриваемом случае  $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}| \sim V_a$ , то из условия  $|x| \ll 1$  следует, что  $V_f \approx \frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$ . Этот корень является решением уравнения (1.6). Из первого неравенства (2.10) следует, что  $\eta^2 \approx \cos^2 \vartheta$ , т. е. границей вещественных корней при выполнении условий (2.10) является

$$a = |\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}| = \sqrt{2V_a^2(\cos^2 \vartheta_1 + \cos^2 \vartheta_2)}$$

Второе неравенство (2.10) хорошо выполняется при  $\varphi < 60^\circ$ . Условие  $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}| < a$  выполняется для любых значений  $n$ , если

$$\frac{v}{V_a} < \frac{2 \sin^2 \varphi}{\sin^2 \vartheta_1 + \sin^2 \vartheta_2} \quad (2.11)$$

Максимальная относительная ошибка (порядка 10%) в определении правых частей этих неравенств достигается при  $\varphi \sim 50-60^\circ$ .

Интересно отметить, что условия (2.11) совпадают с условиями устойчивости несжимаемой жидкости ( $V_a \ll V_s$ ), хотя они получены в противоположном случае ( $V_a \gg V_s$ ).

Условие  $\varepsilon^2 \cos^4 \vartheta \ll 1$  плохо выполняется при  $\varphi > 60^\circ$ , если  $\mathbf{n}$  почти перпендикулярно  $\mathbf{H}_{1,2}$ . Полагая в этом случае  $\cos^2 \vartheta_1 \approx 1$ ,  $\cos^2 \vartheta_2 \approx \cos^2 \varphi$ , найдем два вещественных корня уравнения (2.7)

$$V_f = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \pm V_a$$

Остальные три корня определяются из уравнения

$$(V_f^2 - V_a^2)[(V_f - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v})^2 - V_a^2] = (V_f^2 - V_a^2 \cos^2 \varphi)^2 \quad (2.12)$$

Необходимо, согласно (2.8), найти условие вещественности корней уравнения (2.12) в области

$$V_a(1 + |\cos \varphi|) < |\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}| < 2V_a$$

Это условие имеет вид

$$v < V_a \frac{F(\varphi)}{|\cos \vartheta_{1,2}|}, \quad F(\varphi) \approx \frac{1}{\sqrt{3}} + \left( \frac{5}{6} + \cos^2 \varphi - \frac{3}{2} \cos^4 \varphi \right)^{1/2} \quad (2.13)$$

При получении (2.13) отброшены члены, меньшие 0.1 по сравнению с единицей.

Таким образом, тангенциальный разрыв в отсутствие скачка плотности устойчив при  $\varphi < 60^\circ$ , если выполняются условия (2.11), при  $\varphi > 60^\circ$  тангенциальный разрыв устойчив, если, кроме (2.11), выполняется (2.13). В противоположном случае тангенциальный разрыв неустойчив.

§ 3. Перейдем к исследованию устойчивости тангенциального разрыва в сильном магнитном поле при наличии скачка плотности ( $\rho_1 \neq \rho_2$ ).

Рассмотрим сначала случай, когда магнитное поле  $\mathbf{H}_1$  параллельно или антипараллельно полю  $\mathbf{H}_2$  ( $\cos^2 \vartheta_1 = \cos^2 \vartheta_2 = \cos^2 \vartheta$ ), а угол  $\Phi_{1,2}$  между  $\mathbf{H}_{1,2}$  и  $\mathbf{v}$  не близок к нулю или  $\pi$ ; покажем, что тангенциальный разрыв в этом случае неустойчив. Рассмотрим для этого уравнение (1.6) при  $V_{a1,2} |\cos \vartheta| \lesssim V_{s1,2}$ . Считая, что

$$|V_f - \mathbf{n}\mathbf{v}| \ll V_{a1}, |V_f| \ll V_{a2}$$

найдем, что

$$k_{z1} = -k_{z2} = i\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

Тогда уравнение (1.6) совпадает с уравнением (1.8) для несжимаемой жидкости. Очевидно, что в этом случае условие (1.9) не может выполняться, так как  $\sin \varphi = 0$ , т. е. тангенциальный разрыв в рассматриваемом случае действительно неустойчив.

Рассмотрим теперь случай, когда  $\mathbf{v}$  параллельно или антипараллельно  $\mathbf{H}_{1,2}$ . Если  $V_{a1,2} |\cos \vartheta| \gg V_{s1,2}$ , то в области  $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}| \lesssim V_{s1,2}$  корни уравнения (1.7), удовлетворяющие условию  $|V_f| \lesssim V_{s1,2}$  не являются решениями уравнения (1.6). Остальные корни уравнения (1.7), которые при  $V_{a1,2} |\cos \vartheta| \gg V_{s1,2}$  и  $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}| \lesssim V_{s1,2}$  значительно больше по абсолютной величине  $V_{s1,2}$ , находятся из уравнения

$$f_5(V_f) = f_6(V_f) \tag{3.1}$$

где

$$f_5(V_f) = \frac{V_f^2 - V_{a1}^2}{V_f^2 - V_{a2}^2}, \quad f_6(V_f) = \frac{\rho_1}{\rho_2} \left( \frac{V_f^2 - V_{a1}^2 \cos^2 \vartheta}{V_f^2 - V_{a2}^2 \cos^2 \vartheta} \right)^2$$

Графики функций  $y = f_5(V_f)$  и  $y = f_6(V_f)$  для случая  $\rho_1 < \rho_2$  схематически показаны на фиг. 6, откуда видно, что все решения уравнения (3.1) вещественны (отметим, что двукратно вырожденный корень  $V_f = 0$  не удовлетворяет условию  $|V_f| \gg V_{s1,2}$  и не является решением уравнения (1.6)). Таким образом, при  $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}| \lesssim V_{s1,2}$  и  $V_{a1,2} |\cos \vartheta| \gg V_{s1,2}$  тангенциальный разрыв для рассматриваемого случая устойчив.

При  $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}| \gg V_{s1,2}$  нетрудно найти шесть вещественных корней уравнения (1.7)

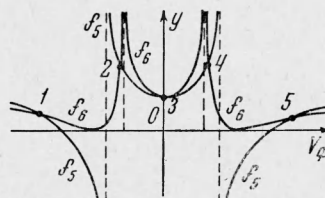
$$V_f = \pm \frac{V_{s2} V_{a2} \cos \vartheta}{\sqrt{V_{s2}^2 + V_{a2}^2}}, \quad V_f = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \pm \frac{V_{s1} V_{a1} \cos \vartheta}{\sqrt{V_{s1}^2 + V_{a1}^2}}, \quad V_f = \frac{V_{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1 \pm V_{\rho_2}}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})$$

Остальные корни определяются из уравнения

$$f_7(x) = f_8(x), \quad f_7(x) = (x - \alpha)^2 - \sin^2 \gamma, \quad f_8(x) = \frac{x^2}{x^2 - \cos^2 \gamma} \tag{3.2}$$

$$x = \frac{\rho_a^2 \sin^2 \vartheta}{\sqrt{\rho_1 \rho_2 (V_{a1}^2 + V_{a2}^2)}}, \quad x = \frac{V_f}{\sqrt{V_{a1}^2 + V_{a2}^2}}, \quad \alpha = \frac{v \cos \vartheta}{\sqrt{V_{a1}^2 + V_{a2}^2}},$$

$$\text{tg } \gamma = \frac{V_{a1}}{V_{a2}}, \quad \rho V_a^2 \equiv \rho_1 V_{a1}^2 = \rho_2 V_{a2}^2$$



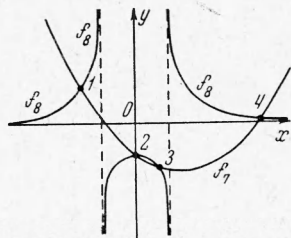
Фиг. 6

Графики функций  $y = f_7(x)$  и  $y = f_8(x)$  схематически показаны на фиг. 7. Как видно из фиг. 7, уравнение (3.2) может иметь комплексные корни при  $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ , где значения  $\alpha = \alpha_{1,2}$  определяются из условия касания кривых  $f_7(x)$  и  $f_8(x)$ .

Найдем величины  $\alpha_{1,2}$  при  $\rho_2 \ll \rho_1$ , т. е.  $V_{a1} \ll V_{a2}$ . В этом случае  $\sin \gamma \approx \gamma \approx \sqrt{\rho_2/\rho_1}$ ,  $\kappa \approx \gamma \sin^2 \vartheta$ , и уравнение (3.2) принимает вид

$$(x^2 - 1)(x - \alpha)^2 = \gamma^2[\sin^4 \vartheta + x^2 - 1 - (x - \alpha)^2]$$

Отсюда при  $\alpha$ , не близком к единице, находим четыре решения



Фиг. 7

$$x = \pm 1, \quad \xi = \gamma \left( \frac{\sin^4 \vartheta + \alpha^2 - 1}{\alpha^2 - 1} \right)^{1/2} \quad (3.3)$$

$$= \alpha \pm \xi,$$

Неустойчивость имеет место при

$$1 - \sin^4 \vartheta < \alpha^2 < 1, \quad \text{или} \quad \alpha_1 = 1 - \sin^4 \vartheta, \quad \alpha_2 = 1$$

Нетрудно проверить, что  $x = \alpha \pm \xi$  будет решением уравнения (1.6).

При  $\alpha \rightarrow 1$  инкремент нарастания, как видно из (3.3), возрастает.

Однако выражением (3.3) можно пользоваться при  $|\xi| \ll |1 - \alpha|$ . Если же это неравенство несправедливо то  $\xi$  определяется из уравнения

$$\xi^3 - (1 - \alpha)\xi^2 - 1/2\gamma^2 \sin^4 \vartheta = 0$$

При  $|1 - \alpha| \ll |\xi|$  отсюда получим для максимального инкремента нарастания.

$$\xi = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2^{1/3}} (\gamma \sin^2 \vartheta)^{2/3}$$

Нетрудно убедиться, что условие устойчивости  $\alpha^2 > 1$  не выполняется при малых  $\cos^2 \vartheta$ . Условие устойчивости  $\alpha^2 < 1 - \sin^4 \vartheta$  выполняется для любых  $\vartheta$ , если

$$v < V_{a2} \quad (3.4)$$

Таким образом, при  $v$ , параллельном (или антипараллельном)  $\mathbf{H}_{1,2}$ , тангенциальный разрыв при  $\rho_2 \ll \rho_1$  устойчив, если выполняется условие (3.4).

В общем случае, когда  $\rho_1 \neq \rho_2$  и  $\mathbf{H}_1$  не параллельно или антипараллельно  $\mathbf{H}_2$ , нетрудно показать, исследуя уравнение (1.6), что сильное магнитное поле стабилизирует тангенциальный разрыв при  $0 < v \ll \bar{V}_{a1,2}$ . Однако точное определение верхней границы области устойчивости возможно, по-видимому, только при помощи численных расчетов.

Поступила 6 III 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сыроватский С. И. Об устойчивости тангенциальных разрывов в магнитогидродинамической среде. Ж. эксперим. и теор. физ., 1953, т. 24, № 6.
2. Сыроватский С. И. Некоторые свойства поверхностей разрыва в магнитной гидродинамике. Тр. Физ. ин-та АН СССР, 1956, т. 8, стр. 14.
3. Fejer J. Y. Hydromagnetic Stability at a Fluid Velocity Discontinuity Between Compressible Fluids. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 4.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, 1959.