

УДК 539.324;539.376

ТЕРМОМЕХАНИКА ПРОЦЕССОВ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО И СВЕРХПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МЕТАЛЛОВ

А. А. Маркин

Тульский государственный университет, 300600 Тула

На основе теории процессов А. А. Ильюшина рассматриваются задачи определения термомеханических параметров материального элемента по заданным процессам деформирования и изменения температуры, при этом учитываются упругие, пластические и вязкие свойства сверхпластического деформирования. Полученные соотношения применимы для процессов при произвольном напряженном состоянии и конечных деформациях. Проблема разделения мер деформаций и напряжений на упругую, пластическую и вязкую составляющие решается на основе разделения процессов на обратимые, необратимые равновесные и неравновесные.

1. Основные термомеханические соотношения. Процесс конечного деформирования задается законом изменения во времени меры $\hat{K}(t)$, обобщенная производная Яуманна которой совпадает с тензором деформации скорости [1]. При этом шаровая составляющая θ (свертка \hat{K} с единичным тензором \hat{E}) определяется согласно закону объемного изменения элемента:

$$\frac{dv}{dv_0} = \exp \theta,$$

где dv_0 — начальный, dv — текущий объем.

Изменению девиаторной составляющей $\hat{K}(t)$ соответствует изменение формы элемента. По координатам \hat{K} в полярном базисе строится вектор формоизменения \mathbf{k} в пятимерном пространстве Ильюшина [2]. Конец вектора $\mathbf{k}(t)$ описывает траекторию формоизменения с дуговой координатой $s(t)$. Скорость формоизменения определяется через девиатор деформации скорости \hat{W} выражением $|\mathbf{k}| = \dot{s} = |\hat{W} \cdot \hat{W}|^{1/2}$.

Процесс нагружения описывается обобщенным тензором истинных напряжений $\hat{\sigma}(t)$, связанным с $\hat{K}(t)$ через выражение удельной (отнесенной к начальному объему) элементарной работы напряжений, которое имеет вид

$$d^1 A = \hat{\sigma} \cdot \overset{\Delta}{d} \hat{K} = \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{k} + \sigma_0 d\theta.$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}$ — вектор нагружения, соответствующий девиаторной составляющей $\hat{\sigma}$; $\sigma_0 = (1/3)\hat{\sigma} \cdot \hat{E}$ — гидростатическая составляющая напряжения. Знаком « Δ » обозначена обобщенная производная Яуманна.

Внешнее тепловое воздействие на элемент за время Δt характеризуется приращением тепловой энергии $d^1 Q$. Дифференциалы параметров состояния связаны термодинамическим тождеством [3]

$$d\Psi + S dt - d^1 A + d^1 w \equiv 0, \quad (1.1)$$

где Ψ — свободная энергия; S — удельная энтропия; $d'w$ — диссипация в элементе объема.

Согласно второму началу термодинамики дифференциал энтропии связан с приращениями тепловой энергии и диссипации следующим образом:

$$T dS = d'Q + d'w, \quad d'w \geq 0. \quad (1.2)$$

Из общего постулата изотропии напряженное состояние изотропного и ненапряженного при $t = t_0$ материального элемента в момент $t = t^*$ определяется законами деформирования $\hat{K}(t)$ и изменения температуры $T(t)$ на временном отрезке $[t_0, t^*]$. Изменения свободной энергии и энтропии в общем случае также являются функционалами процесса деформирования.

Реакция материала зависит как от его свойств, так и от характера течения процессов деформирования и изменения температуры. В дальнейшем будем различать неравновесные, необратимые равновесные и обратимые равновесные процессы.

При адиабатическом процессе и неизменном деформированном состоянии все термомеханические характеристики должны сколь угодно долго сохранять свои значения, достигнутые в результате равновесного процесса. Если скорости формоизменения, изменения объема и температуры стремятся к нулю, то процесс приближается к равновесному.

Таким образом, любому неравновесному процессу формоизменения ставится в соответствие равновесный процесс с той же траекторией в пространстве Ильюшина. В качестве временного параметра можно использовать любой монотонно возрастающий параметр, например путь, пройденный по траектории формоизменения. Ниже индекс p у девиатора и вектора напряжений обозначает равновесный процесс.

Равновесный процесс перехода из состояния $T_M, \hat{\sigma}_M, \hat{K}_M, \Psi_M, S_M$ в состояние $T_N, \hat{\sigma}_N, \hat{K}_N, \Psi_N, S_N$ называется обратимым, если при любом обратном переходе (с произвольными законами изменения $\hat{\sigma}$ и T) из $T_N, \hat{\sigma}_N$ в $T_M, \hat{\sigma}_M$ значения \hat{K}, Ψ, S , соответствующие замкнутому по напряжениям и температуре процессу, совпадают с исходными \hat{K}_M, Ψ_M, S_M .

2. Модели равновесного и неравновесного деформирования. Введем некоторые допущения, отражающие свойства материалов при упругопластическом и сверхпластическом деформировании.

1. Материал остается изотропным в процессе деформирования.

2. Изменение объема обратимо (в результате любого, в том числе неравновесного, замкнутого по напряжениям и температуре процесса объем материального элемента не изменяется).

3. В пятимерном пространстве равновесных напряжений $\hat{\sigma}_p$ существует замкнутая поверхность $\Phi(\tau_p, T) = 0$. Если конец вектора равновесного напряжения τ_p находится внутри или на поверхности, причем $\dot{\tau}_p \cdot \text{grad } \Phi \leq 0$, то процесс обратим и поверхность не изменяется. Если же конец вектора τ_p находится на поверхности и выполняется условие $\dot{\tau}_p \cdot \text{grad } \Phi > 0$, то процесс развивается необратимо и поверхность изменяется.

4. Начальная поверхность обратимости — сфера радиуса τ_0 ; интенсивность равновесных напряжений ограничена

$$\Phi|_{t=t_0} = \tau - \tau_0(T) = 0, \quad \tau_p < \tau_s(T).$$

На основании введенных допущений текущему состоянию $\tau_p^{(s)}, k_s, T_s$ с поверхностью $\Phi_s(\tau_p, T_s) = 0$ ставится в соответствие необратимая (пластическая) составляющая k_p вектора формоизменения. Составляющая k_p определяется как значение k , получаемое в результате обратимого перехода при неизменной температуре из точки $\tau_p^{(s)}$ в точку пространства напряжений, в которой $\tau = 0$. В силу определения обратимости значение k_p

не зависит от формы траектории этого перехода и является мерой необратимости рассматриваемого состояния. При повторных обратимых процессах пластическая составляющая не изменяется:

$$\dot{\mathbf{k}}_p \equiv \mathbf{0}. \quad (2.1)$$

Изменяющуюся (упругую) при обратимом деформировании составляющую вектора \mathbf{k} обозначим через \mathbf{k}_e . В произвольной точке τ области обратимости \mathbf{k}_p определяется выражением

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{k} - \mathbf{k}_p. \quad (2.2)$$

Из (2.1) следует, что в обратимой области $\mathbf{k} = \mathbf{k}_e$. В случае, когда процесс необратим, пластическая составляющая изменяется, поэтому из (2.2) при $\dot{\tau}_p \cdot \text{grad } \Phi > 0$ получим

$$\dot{\mathbf{k}} = \dot{\mathbf{k}}_e + \dot{\mathbf{k}}_p. \quad (2.3)$$

В связи с предположением о сохранении изотропии упругих свойств полагаем, что свободная энергия в фиксированной точке обратимой области не зависит от пластической составляющей деформации. Свободную энергию примем в виде

$$\Psi = \Psi(\mathbf{k}_e, \theta, T). \quad (2.4)$$

Рассматривая замкнутый по напряжениям и температуре элементарный равновесный процесс, находим приращение диссипации $d'w$ на необратимой стадии

$$d'w_p = \tau_p \cdot d\mathbf{k}_p = \tilde{\sigma}_p \cdot d\tilde{K}_p. \quad (2.5)$$

Определим вязкую составляющую девиатора напряжений $\tilde{\sigma}_V$ как разность между неравновесным и равновесным значениями девиатора в одной и той же точке траектории формоизменения:

$$\tilde{\sigma}_V = \tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}_p. \quad (2.6)$$

Разность между приращениями диссипации в неравновесном и равновесном процессах обозначим через $d'w_V$, тогда

$$d'w = d'w_p + d'w_V. \quad (2.7)$$

Подставляя выражения (2.3)–(2.7) в термодинамическое тождество (1.1), находим

$$\tilde{\sigma}_p = \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{K}_e}, \quad \sigma_0 = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad S = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}, \quad d'w_V = \tilde{\sigma}_V \cdot d'\tilde{K}, \quad (2.8)$$

где \tilde{K}_e — упругая составляющая меры \tilde{K} .

Из второго уравнения термодинамики (1.2) получим приращение тепловой энергии

$$d'Q = -T \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} dT + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T \partial \tilde{K}_e} \cdot d\tilde{K}_e + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T \partial \theta} \right) - d'w_p - d'w_V. \quad (2.9)$$

Соотношения (2.8), (2.9) необходимо дополнить уравнениями, определяющими пластическую составляющую вектора формоизменения и вязкую компоненту вектора напряжения. Воспользуемся принципом максимума производства диссипации [2], согласно которому истинное направление вектора напряжения соответствует максимальному значению скорости диссипации. Предположим, что принцип справедлив как для пластической, так и для вязкой составляющей диссипации. Из (2.5) следует, что скорость w_p максимальна, если вектор τ_p сонаправлен с вектором \mathbf{k}_p , тогда

$$\tau_p / \tau_p = \dot{\mathbf{k}}_p / \dot{s}_p, \quad (2.10)$$

где $\dot{s}_p = |\dot{\mathbf{k}}_p|$ — скорость пластического деформирования.

Из (2.10) и (2.5) получаем эволюционное уравнение для \mathbf{k}_p вида

$$\tau_p = \frac{\dot{w}_p}{\dot{s}_p^2} \dot{\mathbf{k}}_p. \quad (2.11)$$

Из выражения производства вязкой составляющей диссипации и (2.8) находим вязкую составляющую вектора нагружения

$$\tau_V = \frac{\dot{w}_V}{\dot{s}^2} \dot{\mathbf{k}}. \quad (2.12)$$

Уравнения (2.11), (2.12) определяют векторные свойства материала, а скалярные свойства зависят от w_p и w_V , которые являются функционалами процессов деформирования и изменения температуры. При этом функционал пластической составляющей диссипации ввиду его инвариантности относительно выбора временного параметра можно задавать на траектории пластического деформирования. Тогда

$$w_p(\dot{s}_p) = A_p[\dot{\mathbf{k}}_p(s_p), T(s_p)]_0^{\dot{s}_p}, \quad (2.13)$$

где A_p — функциональный оператор, универсальный для данного материала.

Функционал w_V существенно зависит от закона формоизменения $s = s(t)$, поэтому его общее представление имеет вид

$$w_V(t^*) = A_V[\mathbf{k}(t), T(t)]_{t_e}^{t^*}, \quad (2.14)$$

где t_e — момент выхода в необратимую область; A_V — «вязкий» оператор.

Таким образом, если заданы функция свободной энергии (2.4) и функционалы диссипации (2.13), (2.14), получаем замкнутую термодинамическую модель материала. Она включает систему эволюционных уравнений (2.5)–(2.9), (2.11), (2.12) и позволяет определить реакцию материала на различные термодинамические воздействия. В частности, основная термомеханическая задача состоит в нахождении по заданным законам деформирования и изменения температуры законов изменения термомеханических параметров $\dot{\sigma}(t)$, $\Psi(t)$, $S(t)$, $w(t)$, $Q(t)$.

3. Конкретизация модели упругопластического и сверхпластического деформирования. Полагаем скорость пластической диссипации функцией длины пластической траектории и температуры вида

$$\dot{w}_p = \tau_p(s_p, T) \dot{s}_p. \quad (3.1)$$

Наличие множителя \dot{s}_p необходимо, чтобы при интегрировании (3.1) по времени удовлетворялось условие (2.13).

Скорость вязкой диссипации считаем функцией s_p , скорости формоизменения и температуры

$$\dot{w}_V = \dot{w}_V(s_p, \dot{s}, T). \quad (3.2)$$

Из (2.8) находим упругую, а из (2.11) и (3.1) — пластическую составляющие девиатора деформации скорости. Подставляя их в (2.4), приходим к следующему уравнению, описывающему процесс равновесного деформирования:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{K}_e} \right)^{-1} \cdot \tilde{\sigma}_p \Delta + \frac{\partial s_p}{\partial \tau_p} \frac{\dot{\tau}_p}{\tau_p} \tilde{\sigma}_p = \tilde{W}. \quad (3.3)$$

Согласно (2.12) и (3.2) выражение для вязкой составляющей девиатора напряжения имеет вид

$$\tilde{\sigma}_V = \tau_V(s_p, \dot{s}, T) \frac{\tilde{W}}{\dot{s}}. \quad (3.4)$$

Интегрируя уравнения (3.3), (3.4) при известных $\dot{W}(t)$, $T(t)$ и заданных начальных условиях, получаем законы изменения во времени девиаторных составляющих тензора напряжений. Закон изменения шаровой составляющей находим из (2.8).

Сформулируем начальные условия и условия интегрирования в обратимой и необратимой областях. Решение в обратимой области (упругое) получается из (3.3), если положить $\dot{W}_p = 0$, оно справедливо при условии $\dot{\sigma} \cdot \dot{\sigma} \leq \tau_0^2$. Равновесное решение получим интегрированием (3.3) при начальном условии $\dot{\sigma}_p|_{t=t_0} = \dot{\sigma}_0$, где $\dot{\sigma}_0$ — значение девиаторной составляющей на начальной поверхности обратимости.

В результате интегрирования (3.3) на отрезке $[t_0, t]$ будет определен закон изменения равновесной составляющей напряжения $\dot{\sigma}_p(t)$. Отметим, что законы изменения термомеханических параметров равновесного процесса не зависят от неравновесной составляющей напряжений. Однако вязкая составляющая напряжений зависит от s_p и, следовательно, от решения (3.3). Суммируя пластическую и вязкую составляющие, получаем закон изменения девиатора напряжения в рассматриваемом неравновесном процессе.

При исследовании реальных процессов необходимо иметь конкретные представления законов (2.4), (3.1), (3.2). Представим свободную энергию в виде, аналогичном используемому в линейной теории термоупругости [3]:

$$\Psi = -S_0 T - b(T - T_0)\theta - \frac{1}{2} \frac{c(T - T_0)^2}{T_0} + \frac{1}{2} K\theta^2 + Gk_e^2, \quad (3.5)$$

где S_0 — значение энтропии в недеформированном состоянии; b — коэффициент, учитывающий изменение объема с изменением температуры; c — теплоемкость; K — модуль объемного изменения; G — модуль формоизменения.

С учетом требования ограниченности интенсивности напряжений при равновесном деформировании запишем закон пластического упрочнения в виде

$$s_p = \frac{\tau_s - \tau_0}{2G_p} \ln \left(\frac{\tau_s - \tau_0}{\tau_s - \tau_p} \right), \quad (3.6)$$

где $\tau_s(T)$ — предел пластического упрочнения (текучести), зависящий от температуры; $2G_p = (\partial\tau_p/\partial s_p)|_{s_p=0}$ — начальный касательный модуль кривой упрочнения.

При описании вязких свойств сверхпластических материалов воспользуемся экспериментальными данными, приведенными в [4–6]. Согласно этим данным существенное скоростное упрочнение наблюдается в ограниченном диапазоне скоростей формоизменения. Данному условию удовлетворяет следующая аппроксимация закона скоростного упрочнения:

$$\tau_V = \tau_p(s_p, T) [\exp(2m_0 \operatorname{arctg}(\dot{s}/\dot{s}_0)) - 1]. \quad (3.7)$$

Для выяснения смысла входящих в (3.7) параметров $m_0(T)$ и $\dot{s}_0(T)$ рассмотрим процесс простого нагружения, когда направление вектора напряжения τ не изменяется. В этом случае $\tau = \tau_V + \tau_p$, и скалярные свойства материала на стадии, когда пластическое упрочнение отсутствует и $\tau_p \cong \tau_s$, согласно (3.7) описываются выражением

$$\tau = \tau_s(T) \exp(2m_0 \operatorname{arctg}(\dot{s}/\dot{s}_0)). \quad (3.8)$$

Представим зависимость (3.8) в логарифмических координатах $\ln(\tau/\tau_s)$, $\ln(\dot{s}/\dot{s}_m)$. Модуль скоростного упрочнения определяется из выражения

$$m = \frac{d \ln(\tau/\tau_s)}{d \ln(\dot{s}/\dot{s}_0)} = \frac{2m_0(\dot{s}/\dot{s}_0)}{1 + (\dot{s}/\dot{s}_0)^2} \quad (3.9)$$

i	$\dot{s}_i \cdot 10^3, \text{c}^{-1}$	$\sigma_i, \text{МПа}$	m_i
0	—	—	0,40
1	0,4	14	0,38
2	2,5	28	0,33
3	5,0	35	0,32
4	7,5	40	—

и принимает максимальное значение m_0 при $\dot{s} = \dot{s}_0$. Таким образом, m_0 является модулем, а \dot{s}_0 — скоростью сверхпластичности.

При обработке экспериментальных данных по растяжению-сжатию m удобно представить в виде $m = d \ln(\sigma/\sigma_1) / d \ln(\dot{s}/\dot{s}_1)$, где σ_1, \dot{s}_1 — известные значения напряжения и соответствующей скорости формоизменения при растяжении-сжатии.

В таблице приведены экспериментальные данные [4] по растяжению образцов при $T = 450 \text{ }^\circ\text{C}$ из сплава АМГ6 (поскольку данные взяты непосредственно с графиков, они весьма приближенны). В последней графе таблицы приведены оценки модуля скоростного упрочнения, рассчитанные с помощью конечных приращений напряжений и скоростей деформирования.

Подставляя значения m_1 и m_2 (см. таблицу) в формулу (3.9), получим систему двух уравнений, определяющих модуль и скорость сверхпластичности. В нашем случае $m_0 \approx 0,4; \dot{s}_0 \approx 1,95 \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}$. Эти оценки согласуются с приведенными в [6, с. 20] значениями, которые получены при растяжении для АМГ6 и $T = 400 \text{ }^\circ\text{C}$: $m_0 \approx 0,38; \dot{s}_0 \approx 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}$.

4. Процесс деформирования при плоском напряженном состоянии. Рассмотрим процессы деформирования, развивающиеся в условиях плоского напряженного состояния. Совместим оси Ox_1, Ox_2 декартовой системы с плоскостью напряжения, тогда $\sigma_{i3} = 0$. Поле скоростей представим в следующем виде:

$$V_1 = 2W_{12}(t)x_2(t) + W_{11}x_1, \quad V_2 = W_{22}x_2. \quad (4.1)$$

Поле скоростей (4.1) близко к имеющему место в экспериментах по комбинированному нагружению тонкостенных цилиндрических образцов. Скорости точек поперечных сечений образца можно записать в форме

$$V_1 = \frac{R_0}{L_0} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \dot{\varphi} x_2 + (\ln \lambda_1) \dot{x}_1, \quad V_2 = (\ln \lambda_2) \dot{x}_2, \quad (4.2)$$

где R_0, L_0 — начальные радиус и длина образца; λ_1, λ_2 — относительные изменения радиуса и длины образца; φ — угол поворота сечения $x_2 = L$.

При дифференцировании тензора напряжений по времени используем производную Яуманна, тогда

$$\dot{\sigma}^\Delta = \dot{\sigma} + \hat{\omega} \cdot \sigma - \sigma \cdot \hat{\omega}, \quad (4.3)$$

где ненулевые компоненты тензора вихря $\hat{\omega}$ определяются выражением $\omega_{12} = -\omega_{21} = (1/2)(V_{1,2} - V_{2,1})$. Полагая материал несжимаемым, из (3.3), (3.5), (3.6) и (4.1)–(4.3) получим систему уравнений, описывающую процесс равновесного формоизменения:

$$\frac{1}{2G} \dot{\sigma}_{p11} + \frac{r\lambda_1}{2\lambda_2} \frac{\sigma_{p12}}{2G} + \dot{\lambda} \sigma_{p11} = (\ln \lambda_1) \dot{\varphi}, \quad \frac{1}{2G} \dot{\sigma}_{p22} - \frac{r\lambda_1}{2\lambda_2} \frac{\sigma_{p12}}{2G} + \dot{\lambda} \sigma_{p22} = (\ln \lambda_2) \dot{\varphi}, \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{2G} \dot{\sigma}_{p12} + \frac{r\lambda_1}{4\lambda_2} (\dot{\sigma}_{p22} - \dot{\sigma}_{p11}) = \frac{r\lambda_1}{2\lambda_2} \dot{\varphi},$$

где $r = R_0/L_0$; $\dot{\lambda} = (\tau_s - \tau_0) \cdot \dot{\tau}_p / (2G_p(\tau_s - \tau_p))$.

В частности, если заданы законы движения торцевого сечения образца $\varphi(t)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ и закон изменения температуры, то, интегрируя систему (4.4), получим законы изменения равновесных компонент тензора напряжений. Затем из выражений (3.4) и (3.7) находим вязкие составляющие и определяем изменение напряженного состояния.

В качестве примера рассмотрим процесс растяжения вдоль оси Ox_2 с последующим кручением. При этом $\sigma_{11} = \sigma_{33} = 0$, девиаторные составляющие имеют вид

$$\tilde{\sigma}_{11} = \tilde{\sigma}_{33} = -\frac{1}{3}\sigma_{22}, \quad \tilde{\sigma}_{22} = \frac{2}{3}\sigma_{22}. \quad (4.5)$$

Положим, что на стадии растяжения пластическое упрочнение практически отсутствует, тогда $\tau_p \rightarrow \tau_s$, $\dot{\tau}_p \rightarrow 0$. Коэффициент $\dot{\lambda}$ в (4.4) становится неопределенным, а сама система вырождается в уравнения течения типа Прандтля — Рейса. Согласно (4.5) условие текучести представляется в форме

$$\tau_s = \left(\frac{2}{3}\sigma_{p22}^2 + 2\sigma_{p11}^2 \right)^{1/2}. \quad (4.6)$$

Условие (4.6) удовлетворится тождественно, если ввести угловой параметр α и представить компоненты напряжений в виде

$$\sigma_{p22} = \sqrt{\frac{3}{2}}\tau_s \cos \alpha, \quad \sigma_{p12} = \frac{\tau_s}{\sqrt{2}} \sin \alpha. \quad (4.7)$$

Подставляя (4.5) и (4.7) в систему (4.4) и полагая, что при кручении длина образца не изменяется ($\lambda_2 = \text{const}$), получаем систему двух дифференциальных уравнений относительно параметров $\alpha(\varphi)$ и $\lambda_1(\varphi)$:

$$\frac{d}{d\varphi}(\lambda_1^{-1}) = -\frac{r\tau_s}{8\sqrt{2}G\lambda_2} \sin \alpha; \quad (4.8)$$

$$(r\lambda_1)^{-1}\lambda_2 \frac{d\alpha}{d\varphi} = -\frac{\sqrt{2}G}{\tau_s} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad (4.9)$$

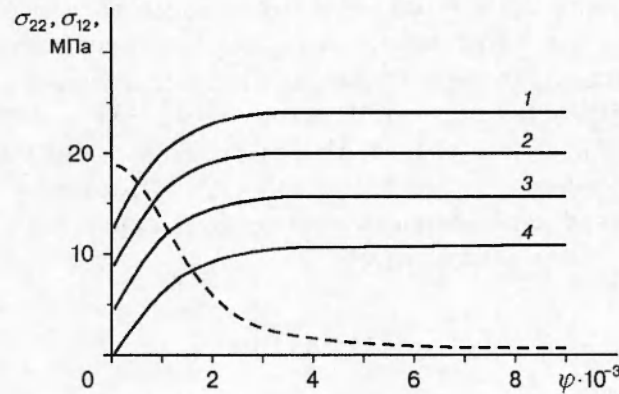
Из (4.8) следует, что параметр λ_1 для реальных материалов, например алюминиевых сплавов ($\tau_s/G \sim 10^{-3}$), в процессе кручения не изменяется. Интегрируя (4.9), полагаем, что λ_1 сохраняет значение, полученное при растяжении и равно в силу несжимаемости $\lambda_2^{-1/2}$. Пренебрегая слагаемыми порядка τ_s/G по сравнению с единицей, в результате интегрирования (4.9) и добавления вязких составляющих получим законы изменения компонент тензора напряжений на стадии кручения

$$\sigma_{22} = \sqrt{\frac{3}{2}}\tau_s \frac{2 \exp(k\varphi)}{\exp(2k\varphi) + 1}, \quad \sigma_{12} = \frac{\tau_s}{\sqrt{2}} \left(\frac{1 - \exp(2k\varphi)}{1 + \exp(2k\varphi)} + \exp(2m_0 \arctg(\dot{s}/\dot{s}_0)) \right),$$

где $k = \sqrt{2}r\lambda_2^{-3/2}G/\tau_s$; $\dot{s} = \lambda_2^{-3/2}\dot{\varphi}/\sqrt{2}$.

Отметим, что тот же результат получается, если вместо производной Яуманна использовать абсолютную производную по времени, следовательно, на стадии течения выбор типа производной не влияет на напряженное состояние.

На рисунке приведены зависимости σ_{22} (штриховая линия) и σ_{12} (сплошные линии) от угла поворота. Графики построены для материала АМГ6 при $T = 450^\circ\text{C}$, $\lambda_2 = 1,2$, $r = 0,25$, $m_0 = 0,4$, $\dot{s}_0 = 1,95 \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}$, $\tau_s = 15 \text{ МПа}$, $G = 2,7 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ (линиям 1–3 соответствуют относительные скорости деформирования $\dot{s}_1/\dot{s}_0 = 1$, $\dot{s}_2/\dot{s}_0 = 10^{-1}$, $\dot{s}_3/\dot{s}_0 = 10^{-2}$; линией 4 показано изменение σ_{12} в равновесном процессе). Видно, что растягивающее напряжение с ростом φ быстро падает независимо от скорости деформирования, тем самым



подтверждается известный эффект запаздывания векторных свойств. Независимость σ_{22} от скорости обусловлена отсутствием дополнительной осевой деформации при кручении. Касательные напряжения быстро принимают стационарные значения, увеличивающиеся с ростом скорости деформирования.

5. Сравнение с определяющим соотношением О. М. Смирнова [6]. В работе [6] предложено описание процесса деформирования выражением, которое в наших обозначениях имеет следующий вид:

$$\bar{W} = (\tau_m/k_V)^{1/m_V} (\tau - \tau_s)^{1/m_V} (\tau_m - \tau)^{-1/m_V} \frac{\dot{\sigma}}{\tau}, \tag{5.1}$$

где k_V, m_V — постоянные в изотермическом процессе параметры.

Из (5.1) находим зависимость между интенсивностью напряжений и скоростью деформирования

$$\tau = (\dot{s}^{m_V} \tau_m k_V + \tau_s \tau_m) / (\dot{s}^{m_V} k_V + \tau_m). \tag{5.2}$$

Представление (5.1) в отличие от соотношений (3.3)–(3.6) учитывает лишь скоростное упрочнение и не описывает эффект запаздывания векторных свойств, стадию упругой нагрузки и разгрузки. Таким образом, уравнения (3.3)–(3.6) более универсальны, что важно для описания неоднородного деформирования, когда в один и тот же момент времени различные части тела могут находиться в упругом, упругопластическом и сверхпластическом состояниях.

Представляет интерес сравнение закона (5.2) с выражением (3.8), справедливым, как и (5.2), на стадии, когда пластическое упрочнение отсутствует. Оба подхода учитывают ограниченность влияния скорости деформирования на напряженное состояние. Так, из (5.2) следует, что $\lim_{\dot{s} \rightarrow 0} \tau = \tau_s$, $\lim_{\dot{s} \rightarrow \infty} \tau = \tau_m$. Из (3.8) имеем $\lim_{\dot{s} \rightarrow \infty} \tau = \tau_s$, кроме того,

$$\lim_{\dot{s} \rightarrow \infty} \tau = \tau_m = \tau_s \exp(m_0 \pi). \tag{5.3}$$

В работах, посвященных исследованию явлений сверхпластичности, τ_s называют пороговым напряжением, а τ_m — пределом текучести.

В соотношении (5.2) необходимо определить четыре параметра τ_s, τ_m, k_V, m_V . При этом k_V и m_V не имеют простого механического смысла, в частности, m_V не совпадает с максимальным значением модуля скоростного упрочнения (3.9).

В соотношении (3.8) необходимо экспериментально определить три постоянные τ_s, m_0, s_0 , имеющие явный физический смысл. Заметим, что в нашем случае пороговое напряжение и предел текучести связаны соотношением (5.3). С одной стороны, это снижает

возможности аппроксимации, а с другой — позволяет вместо τ_s использовать более достоверное значение τ_m . Известно, что эксперименты по непосредственному определению порогового напряжения весьма трудоемки и приводят к существенному разбросу результатов. В работе [6] приведены значения $\sigma_m = 3$ МПа для сплава Al — 33% Cu при $T = 520$ °С и $\sigma_s = 0,3$ МПа при $T = 477$ °С, $m_0 = 0,63$. Из (5.3) следует, что $\sigma_m/\sigma_s \approx 7,4$. Для сплава Mg — 6% Zn — 6,5% Zr имеем $\sigma_m = 4$ МПа, $\sigma_s = 1,4$ МПа, $m_0 = 0,46$. Из (5.3) находим, что $\sigma_m/\sigma_s \approx 4,5$. Учитывая ненадежность определения порогового напряжения, формула (5.3) дает вполне приемлемые результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркин А. А., Толоконников Л. А. Меры и определяющие соотношения конечного упруго-пластического деформирования // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения: Всесоюз. межвуз. сб. Горький: Горьк. ун-т, 1987. С. 32–37.
2. Маркин А. А. Об изменении упругих и пластических свойств при конечном деформировании // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1990. № 2. С. 120–126.
3. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
4. Горев Б. В., Ратничкин А. А., Соснин О. В. Закономерности деформирования материалов в условиях, близких к сверхпластичности // Пробл. прочности. 1987. № 11. С. 36–41.
5. Горев Б. В., Ратничкин А. А., Соснин О. В. Закономерности деформирования материалов в условиях, близких к сверхпластичности. 2. Плоское напряженное состояние // Там же. С. 42–47.
6. Смирнов О. М. Обработка металлов давлением в состоянии сверхпластичности. М.: Машиностроение, 1979.

Поступила в редакцию 22/1 1998 г.
