ПМТФ, № 4, 1968

К ИЗУЧЕНИЮ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ УПРУГОМ РЕЖИМЕ ФИЛЬТРАЦИИ В ГЛУБИННЫХ ПЛАСТАХ

В. Н. Николаевский

(Москва)

Предлагается нелокальная формулировка гипотезы о постоянстве горного давления при нестационарной напорной фильтрации в глубинном упругом пласте. Согласно предлагаемой формулировке изменения напряжений в скелете пласта происходят при изменениях порового давления в окрестности рассматриваемой точки.

1. Нестационарные явления при фильтрации однородной капельной жидкости (нефти, воды) в глубинных пластах связаны с эффектом сжимаемости порового пространства при снижении давления в жидкости. Сжимаемость определяется гидростатическим расширением зерен среды, а также сжатием скелета породы пласта под воздействием горного давления. Строгий расчет переходных процессов должен основываться на математической модели насыщенной жидкостью деформируемой пористой среды [1,2] с учетом происходящих перераспределений напряжений в окружающей толще пород. Соответствующая краевая задача оказывается, однако весьма сложной и, самое главное, ее постановка в каждом конкретном случае весьма неопределенна из-за отсутствия подробных данных о геологическом разрезе и механических свойствах окружающих горных пород. Поэтому до сих пор широко пользуются элементарной теорией упругого режима фильтрации [3], основанной на гипотезе о постоянстве горного давления $\Gamma(x_i)$ в каждой точке пласта мощности $2h$

$$\sigma(x_1, x_2; t) + p(x_1, x_2; t) = \Gamma(x_1, x_2) \qquad (1.1)$$

при переходных процессах, когда меняются во времени поровое давление p и эфффективное давление в скелете породы σ. В упрощенной постановке на основе экспериментальных данных вводится зависимость пористости m от давлений p, σ, что позволяет уравнения неразрывности для жидкой фазы и движения (закон Дарси)

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) = G, \qquad \mathbf{w} = -\frac{k}{\mu}\operatorname{grad} p \qquad (1.2)$$

свести в линейном приближении к следующему уравнению:

$$(a_\rho + a)\frac{\partial p}{\partial t} - b\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{k_0}{m_0\mu_0}\nabla^2 p + \frac{G}{m_0\rho_0} \qquad (1.3)$$

Здесь введены распределенные источники и стоки $G(x_i, t)$, имитирующие работу скважин, через которые поступает или отбирается из пласта жидкость.

Использование гипотезы (1.1) позволяет преобразовать далее уравнение (1.3) к уравнению пьезопроводности (терминология принадлежит В. Н. Щелкачеву [4]).

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa\nabla^2 p + q, \qquad \varkappa = \frac{k_0}{\mu_0\beta m_0}, \qquad q = \frac{G}{m_0\beta\rho_0} \qquad (1.4)$$

Здесь $\varkappa$ — коэффициент пьезопроводности, k — проницаемость пласта, β — его сжимаемость, ρ — плотность жидкости, μ — ее вязкость

$$(\rho / \rho_0) = 1 + a_\rho (p - p_0), \quad (m / m_0) = 1 + a (p - p_0) - b (\sigma - \sigma_0),$$
$$\beta = a_\rho + a + b$$

Укажем, что для сцементированных песчаников

$$a \sim 5 \cdot 10^{-6} \text{ атм}^{-1}, \quad b \sim 10^{-4} \text{ атм}^{-1}, \quad m = 0.1 \div 0.2, \quad k = 10^{-10} \div 10^{-9} \text{ см}^2,$$

для воды

$$a_\rho \sim 5 \cdot 10^{-5} \text{ атм}^{-1},$$

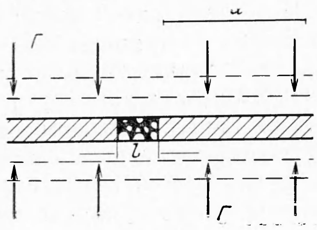
для нефти

$$a_\rho \sim 10^{-5} \div 10^{-3} \text{ атм}^{-1}$$

Вывод уравнения (1.4), предложенный впервые Джейкобом [3], недавно обсуждался в статье [5].

Анализ различных вариантов [3,6,7] формулировки локальной гипотезы (1.1) содержится в статьях [8,9]. В работе [9], кроме того, показано, что пренебрежение в законе Дарси скоростью смещения твердых частиц при одновременном фактическом учете сжимаемости твердой фазы в уравнении неразрывности (1.2) допустимо для сцементированных пористых сред (отношение a / b составляет доли единицы).

2. Локальная формулировка гипотезы (1.1) о постоянстве горного давления в каждой точке пласта не учитывает, что окружающие, прочные на сдвиг горные породы при снижении порового давления играют не только роль нагрузки, но и перекрытия.



В самом деле, если в тонком пласте (фигура) изменение порового давления Δp происходит лишь в достаточно узком элементе (длины l), то в силу работы окружающей толщи как перекрытия (балки) изменения эффективного давления в середине этого элемента не будут удовлетворять условию (1.1), т. е. $\Delta\sigma + \Delta p \neq 0$. Качественно видно, что с увеличением длины l зона падения порового давления прогиб «балки», а следовательно, и изменение $\Delta\sigma$ будет возрастать, причем имеется некоторая характерная длина d, такая, что при $l \gg d$ в центре выделенной зоны окажется выполненным равенство $\Delta\sigma + \Delta p = 0$. Поэтому следует считать параметр d величиной, характерной для заданного пласта (механических свойств его самого и всей толщи пород).

Желая сохранить элементарность развиваемой теории, сформулируем нелокальную гипотезу о постоянстве горного давления в виде

$$\sigma(x_i, t) + \iint \Phi(x_i, x_i'; d)\, p(x_i', t)\, dx_1'\, dx_2' = \Gamma(x_i) \tag{2.1}$$

Здесь $\Phi(x_i, x_i'; d)$ — некоторая функция влияния, параметрически зависящая от величины d, а интегрирование распространено по всей плоскости пласта. В случае изотропии и однородности пласта допустимо приближенно (эти условия, вообще говоря, нарушаются из-за неоднородности и неизотропности полей порового давления; тогда d — не скаляр) считать функцию влияния зависящей только от разности координат

$$\Phi(x_i, x_i'; d) = \Phi(x_i - x_i'; d)$$

Зададимся, например, функцией Φ вида

$$\Phi\left(\frac{x_i - x_i'}{d}\right) = \frac{1}{\pi d^2} \exp\left\{-\sum_{i=1,2} \frac{(x_i - x_i')^2}{d^2}\right\} \tag{2.2}$$

Тогда в пределе при $d \to 0$ функция (2.2) переходит в дельта-функцию $\delta(x_1 - x_1')\,\delta(x_2 - x_2')$, а условие (2.1) вырождается в локальное условие (1.1). В другом предельном случае, при $d \to \infty$ гипотеза (2.1) сводится к условию неизменности во времени среднего напряжения в скелете породы: $\partial\sigma / \partial t = 0$. При этом перераспределение давления будет описываться уравнением (1.4), но с большим коэффициентом пьезопроводности, соответствующим только сжимаемости из-за гидростатического сжатия материала зерен среды и поровой жидкости.

Отметим, что введение зависимости функции Ф от времени открывает возможности учета эффектов ползучести толщи пород, а введение временной зависимости в определяющее уравнение для пористости — ползучесть самого скелета среды.

На тот факт, что эффективное давление в пласте меняется только при изменениях среднепластового давления (т. е. некоторого осредненного по площади порового давления), указал еще Г. В. Исаков [6], однако соответствующей математической формулировки для предположения подобного типа до сих пор найдено не было.

3. Если функция влияния Ф зависит только от разностей координат $x_i - x_i'$, то для решения задач можно воспользоваться интегралами Фурье [10,11]. В самом деле, применяя, например, преобразование Фурье к уравнениям (1.3), (2.1), (2.2), получим

$$(1-\alpha)\frac{dP}{dt} - \alpha\frac{d\Pi}{dt} + \varkappa(\xi^2+\eta^2)P = X(\xi, \eta, t)$$

$$\frac{d\Pi}{dt} = -F(\xi, \eta)\frac{dP}{dt}, \qquad F(\xi, \eta) = \exp\left(-\frac{\xi^2+\eta^2}{4}d^2\right)$$

$$\Pi = L\sigma, \qquad P = Lp, \qquad X = Lq, \qquad \alpha = \frac{b}{\beta}$$

$$Lf = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2; t)\, e^{i\xi x_1 + i\eta x_2}\, dx_1\, dx_2 \tag{3.1}$$

Если $P_0 = Lp\,(x_i;\, t = 0)$, то общее решение системы (3.1) имеет вид

$$P = P_0(\xi, \eta)\, e^{-\varkappa t(\xi^2+\eta^2)A} + \int\limits_0^t X(\xi, \eta, \tau)\, A e^{-\varkappa(t-\tau)(\xi^2+\eta^2)A}\, d\tau \tag{3.2}$$

$$A^{-1} = 1 - \alpha(1 - F)$$

Искомое решение для $p\,(x_i,\, t)$ находится применением к выражению (1.3) теоремы обращения Фурье [11].

Рассмотрим в качестве примера задачу о нестационарных изменениях давления в пласте, в который в момент времени $t = 0$ через галерею, расположенную в сечении $x = 0$, была мгновенно закачена масса жидкости G_0. В этом случае

$$q\,(x_i,\, t) = q_0\delta\,(x_1)\delta\,(t)$$

а поэтому

$$X\,(\xi, \eta;\, \tau) = q_0\delta\,(\tau) \,/\, \sqrt{2\pi}$$

Тогда решение имеет вид

$$p\,(x,\, t) - p_0 = \frac{q_0}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{1 - \alpha(1 - F(\xi))} \exp\left\{-\frac{\varkappa\xi^2 t}{1 - \alpha(1 - F(\xi))}\right\} d\xi = \frac{q_0}{\pi\sqrt{\varkappa t}}\, I$$

$$I = \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos mz}{1 - \alpha[1 - \exp(-\chi z^2/4)]} \exp\left\{-\frac{z^2}{1 - \alpha[1 - \exp(-\chi z^2/4)]}\right\} dz \tag{3.3}$$

где использована четность оригинала искомой функции и введены обозначения

$$\chi = d^2 / (\varkappa t), \quad m = x / \sqrt{\varkappa t}$$

Приводим вычисленные на ЭВМ значения $^1/_2\, I$ при $\alpha = {}^1/_2$ для ряда значений m и для $\chi = 0$ и $\chi = 10$.

$m = 0$	0.1	0.5	1	2	3	
$0.5I = 0.4431$	0.4420	0.4163	0.3451	0.1630	0.0467	$(\chi = 0)$
$0.5I = 0.4386$	0.4380	0.4208	0.3706	0.2147	0.0662	$(\chi = 10)$

Из выражения (3.3) следуют решения для предельных частных случаев ($\chi \to 0$ и $\chi \to \infty$), которые можно интерпритировать как асимптотические решения

$$p(x, t) - p_0 = \frac{q_0}{\sqrt{\varkappa t}} \frac{\sqrt{\pi}}{4} \exp\left(-\frac{x^2}{4\varkappa t}\right), \quad d^2 \ll \varkappa t, \quad x \sim \sqrt{\varkappa t} \quad (\chi \to 0) \tag{3.4}$$

$$p(x, t) - p_0 = \frac{q_0 (1-\alpha)^{-1}}{\sqrt{\varkappa_1 t}} \frac{\sqrt{\pi}}{4} \exp\left(-\frac{x^2}{4\varkappa_1 t}\right), \quad \varkappa_1 = \frac{\varkappa}{1-\alpha}$$

$$d^2 \gg \varkappa t, \qquad x \sim \sqrt{\varkappa t} \quad (\chi \to \infty) \tag{3.5}$$

Как и следовало ожидать, в областях движения гораздо больших, чем масштаб d, решение примерно соответствует обычной локальной теории. Если же область движения гораздо меньше масштаба d, то также можно приближенно пользоваться локальной теорией, но эффективный коэффициент пьезопроводности оказывается большим $\varkappa_1 = \varkappa (1-\alpha)^{-1}$. Здесь при том же количестве закаченной жидкости давление должно быть больше, чем согласно локальной теории (ср. значения подсчета при $m \sim 1$, $\chi = 10$).

Автор признателен Э. А. Авакян и Н. А. Ефремовой за проведение вычислений.

Поступила 5 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 1944, т. 8, № 4.
2. Николаевский В. Н. Об основных уравнениях динамики насыщенных жидкостью упругих пористых сред. Сб. «Добыча нефти», М., «Недра», 1964.
3. Jacob C. E. On the flow of water in on elastic artesian aquifer. Tran. Amer. Geophys. Union, Reps, and Papers, Part 2, Hydrology, Washington, Nat. Acad. Sci., D. C., 1940.
4. Щелкачев В. Н. Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой среде. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 2.
5. De Wiest R. G. M. On the storage coefficient and the equations of groundwater flow. G. Ceophys, Res., 1966, vol. 71, No 4.
6. Исаков Г. В. О деформациях нефтяных коллекторов. Нефт. хоз-во, 1948, № 11.
7. Баренблатт Г. И., Крылов А. П. Об упруго-пластическом режиме фильтрации. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 2.
8. Geertsma J. The effect of fluid pressure decline on volumetric changes of porous rocks. J. Petr. Technol., 1957, vol. 9, No 12.
9. Золотарев П. П., Николаевский В. Н. О распространении волн давления в насыщенных жидкостью горных породах. Тр. Всес. нефтегаз. н-и. инта, 1965, вып. 42, стр. 112—130.
10. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.— Л., Гостехиздат, 1948.
11. Снеддон И. Преобразование Фурье. М., Изд-во иностр. лит. 1955.