

УПРУГО-ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В МАТЕРИАЛЕ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ТЕКУЧЕСТЬЮ

В. А. Котляревский (Москва)

Рассмотрена задача о распространении волн в упруго-вязко-пластическом материале с запаздывающей текучестью. Как показано в работе [1], к материалам такого типа может быть отнесена малоуглеродистая сталь с явно выраженной площадкой текучести.

1. Рассмотрим случай распространения плоской волны в полубесконечном невозмущенном призматическом стержне, к концевому сечению $x = 0$ которого в момент $t = 0$ приложено растягивающее динамическое напряжение

$$\sigma(0, t) = \psi(t), \quad d\psi/dt > 0$$

Разгрузка не рассматривается.

Здесь и в дальнейшем под σ понимается условное напряжение, отнесенное к первоначальной площади поперечного сечения стержня.

Предполагается, что материал стержня (малоуглеродистая сталь) до динамического предела текучести при условии [1]

$$\int_0^t \sigma^\alpha(\xi) d\xi \leq t_0 \sigma_-^\alpha$$

независимо от вида функции $\sigma(\xi)$ может рассматриваться как линейно упругий и подчиняющийся закону Гука.

Закон деформирования в вязко-пластической стадии принимается в виде степенной функции

$$\frac{\sigma}{\sigma_-} = \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\beta \dot{\epsilon}_*} \right)^\beta, \quad \dot{\epsilon}_* = \frac{\sigma_-}{Et_0}, \quad \beta = \frac{1}{\alpha + 1} \quad (1.1)$$

Здесь σ — динамическое напряжение, σ_- — статический предел текучести, ϵ — деформация, E — модуль упругости, α , t_0 — постоянные материалы, точкой обозначено дифференцирование по времени.

Внесем величину σ из соотношения (1.1) в уравнение движения

$$\partial \sigma / \partial x = \rho \partial^2 u / \partial t^2 \quad (1.2)$$

где u — смещение частиц, ρ — плотность материала.

Продифференцируем (1.1) по x

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = n \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} \right)^\beta = n \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^\beta, \quad n = \sigma_- (\beta \dot{\epsilon}_*)^{-\beta}$$

Подставим выражение для $\partial \sigma / \partial x$ в (1.2); в результате получим

$$\frac{n}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^\beta = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \text{или} \quad \frac{n}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} \right)^\beta = \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

Дифференциальное уравнение можно упростить, если исходить из линеаризованного закона деформирования

$$\sigma = \sigma_{m-1} v_m (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_{m-1}), \quad \dot{\epsilon}_{m-1} < \dot{\epsilon} < \dot{\epsilon}_m \quad \left(v_m = \frac{\sigma_m - \sigma_{m-1}}{\dot{\epsilon}_m - \dot{\epsilon}_{m-1}} \right) \quad (1.4)$$

где v_m — коэффициент пластической вязкости.

Параметры σ_m , $\dot{\epsilon}_m$ соответствуют точкам пересечения аппроксимирующих зависимостей (1.1) прямых.

Продифференцировав (1.4) по x и подставив значение производной в (1.2), получим для смещений в вязко-пластической области

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b_m^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \quad \left(b_m^2 = \frac{v_m}{\rho} \right) \quad (1.5)$$

Уравнения для скоростей смещений v , напряжений σ и скоростей деформаций $\partial \epsilon / \partial t$ получим в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = b_m^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = b_m^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = b_m^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \quad (1.6)$$

Вязко-пластической области предшествует упругая волна, распространяющаяся с постоянной скоростью $a = \sqrt{E/\rho}$ и с повторением истории напряженного состояния в каждом сечении.

Длительность упругой фазы в каждом сечении равна времени запаздывания τ , поэтому для вязко-пластической области с движущейся границей $x = a(t - \tau)$ может быть сформулирована следующая краевая задача, например, исходя из уравнения (1.6) для первого участка аппроксимации в форме: (1.7)

$$\sigma = \sigma(\tau) + \nu_1 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial t} \right), \quad \nu_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma(\tau)}{(\partial \varepsilon / \partial t)_1 - \partial \varepsilon(\tau) / \partial t}, \quad \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial t} < \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} < \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right)_1$$

Найти функцию $\partial \varepsilon(x, t) / \partial t$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = b_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (0 < x < a(t - \tau)), \quad \left(b_1^2 = \frac{\nu_1}{\rho} \right) \quad (1.8)$$

при граничных и начальном условиях

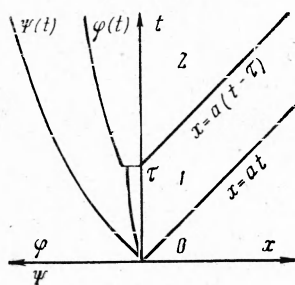
$$\frac{\partial \varepsilon(0, t)}{\partial t} = \varphi(t), \quad \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon[a(t - \tau), t] = \frac{\partial \varepsilon(0, \tau)}{\partial t} = \varphi(\tau), \quad t > \tau$$

Время τ достижения динамического предела текучести $\sigma(\tau)$ определяется [1-3] из выражения

$$\int_0^{\tau} \sigma^\alpha(t) dt = t_0 \sigma_-^\alpha$$

Так как задается непрерывная вместе со своей первой производной функция $\psi(t)$, то следует от функции $\psi(t)$ перейти к $\varphi(t)$.

В плоскости xt (фиг. 1) имеем ненапряженную 0, упругую 1 и вязко-пластическую 2 области.



Фиг.

В области 1

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

и на линии $x = a(t - \tau)$

$$\varphi(\tau - 0) = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon[a(t - \tau - 0), t] = \frac{\partial \varepsilon(0, \tau - 0)}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \psi(\tau)}{\partial t}$$

В области 2 в точках $[\sigma_m, (\partial \varepsilon / \partial t)_m]$ имеем зависимость, вытекающую из (1.1)

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right)_m = \frac{\sigma_m^{\alpha+1}}{t_0 E (\alpha + 1) \sigma_-^\alpha}$$

и в остальных точках на первом участке аппроксимации, — вытекающую из (1.7)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\sigma - \sigma(\tau)}{\nu_1} + \frac{\partial \varepsilon(\tau + 0)}{\partial t} = \frac{\sigma [\sigma_1^{\alpha+1} - \sigma^{\alpha+1}(\tau)] - \sigma(\tau) \sigma_1 [\sigma_1^\alpha - \sigma^\alpha(\tau)]}{[\sigma_1 - \sigma(\tau)] (\alpha + 1) t_0 E \sigma_-^\alpha} \quad (1.9)$$

На линии $x = a(t - \tau)$

$$\varphi(\tau + 0) = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon[a(t - \tau + 0), t] = \frac{\partial \varepsilon(0, \tau + 0)}{\partial t} = \frac{\sigma^{\alpha+1}(\tau)}{(\alpha + 1) t_0 E \sigma_-^\alpha} = \frac{\psi^{\alpha+1}(\tau)}{(\alpha + 1) t_0 E \sigma_-^\alpha}$$

Таким образом, на линии $x = a(t - \tau)$ имеет место разрыв скорости деформации. Из (1.9) имеем зависимость для определения функции $\varphi(t)$ в области 2

$$\varphi(t) = \frac{\partial \varepsilon(0, t)}{\partial t} = \frac{\psi(t) [\sigma_1^{\alpha+1} - \psi^{\alpha+1}(\tau)] - \psi(\tau) \sigma_1 [\sigma_1^\alpha - \psi^\alpha(\tau)]}{[\sigma_1 - \psi(\tau)] (\alpha + 1) t_0 E \sigma_-^\alpha}$$

2. Введем функцию $T = \partial \varepsilon / \partial t - \varphi(\tau + 0)$, удовлетворяющую (1.8), и новое независимое переменное $t^* = t - \tau$.

Тогда для T будем иметь

$$\frac{\partial T}{\partial t^*} = b_1^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (0 < x < at^*)$$

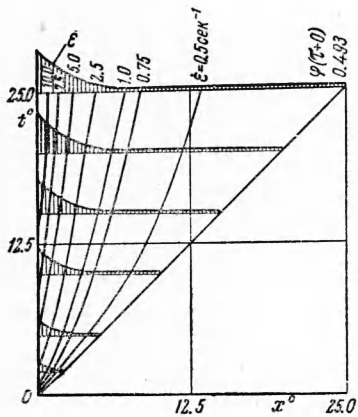
$$T(0, t^*) = \varphi(t^* + \tau) - \varphi(\tau + 0) = \varphi^*(t^*)$$

$$T(at^*, t^*) = T(0, 0^*) = \varphi^*(0^*) = 0 \quad (t^* > 0)$$

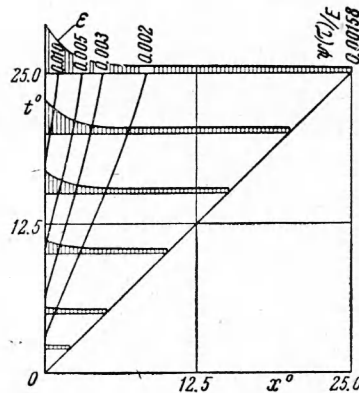
Решение задачи согласно [4] будет

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(x, t) &= \varphi(\tau + 0) + \frac{1}{b_1 \sqrt{\pi}} \int_{\tau}^{t-\tau} \left[\mu(\eta) \exp\left(-\frac{(x-a\eta)^2}{4b_1^2(t-\tau-\eta)}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \kappa(\eta) \exp\left(-\frac{x^2}{4b_1^2(t-\tau-\eta)}\right) \right] \frac{\partial \eta}{(t-\tau-\eta)^{3/2}} \\ \mu(t) &= b_1 \int_{\tau}^{t-\tau} - \sum_{k=0}^{\infty} w_{2k+1}(\xi, t) [\varphi(\xi) - \varphi(\tau + 0)] \exp\left[-\left(\frac{a}{2b_1}\right)^2(t-\tau)\right] d\xi \\ \kappa(t) &= b_1 \int_{\tau}^{t-\tau} \sum_{k=0}^{\infty} w_{2k}(\xi, t) [\varphi(\xi) - \varphi(\tau + 0)] d\xi \\ w_{\gamma}(\xi, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\left(\frac{\gamma a \xi}{2b_1}\right)^2 (t-\tau-\xi)^{-5/2} + \left(\frac{\gamma a}{2b_1}\right)^2 (t-\tau-\xi)^{-3/2} \xi - \right. \\ &\quad \left. - 0.5(t-\tau-\xi)^{-3/2} \right] \exp\left[-\frac{(\gamma a \xi)^2}{4b_1^2(t-\tau-\xi)} - \left(\frac{\gamma a}{2b_1}\right)^2 \xi\right] \end{aligned}$$

Решение задачи при $\partial \varepsilon / \partial t > (\partial \varepsilon / \partial t)_1$ значительно усложняется в связи с необходимостью отыскания в плоскости xt границ $(\partial \varepsilon / \partial t)_m$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Выражение для относительной деформации в области 2 имеет следующий вид

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\Psi(\tau)}{E} + \int_{x/a}^{t-\tau} \dot{\varepsilon}(x, \xi) d\xi$$

Динамическое напряжение

$$\sigma(x, t) = \Psi(\tau) + \nu_1 [\dot{\varepsilon}(x, t) - \varphi(\tau + 0)]$$

Смещение

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{a}{E} \int_0^{\tau} \Psi(\xi) d\xi + \int_x^{a(t-\tau)} \varepsilon(\chi, t) d\chi = \\ &= \frac{\Psi(\tau)}{E} [a(t-\tau) - x] + \frac{a}{E} \int_0^{\tau} \Psi(\xi) d\xi + \int_x^{a(t-\tau)} \int_{x/a}^{t-\tau} \dot{\varepsilon}(\chi, \xi) d\xi d\chi \end{aligned}$$

Численное решение задачи для различных вариантов функции $\psi(t)$ получено интегрированием дифференциального уравнения теплопроводности для области с движущейся границей на быстродействующей электронной вычислительной машине методом прогонки.

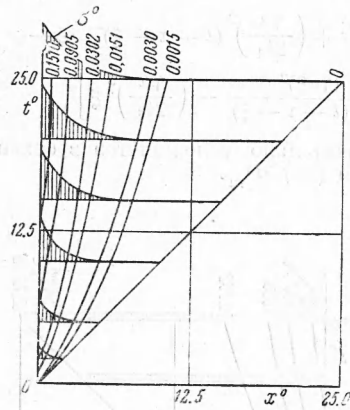
Для примера приводим решение задачи для функции

$$\psi(t) = c \sin \omega t$$

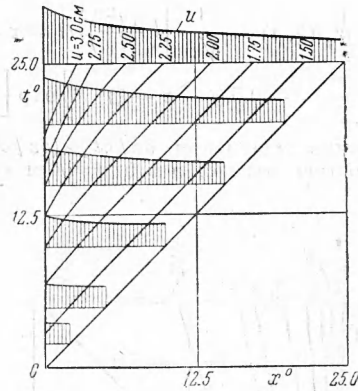
Значение параметров

$$\begin{aligned} c &= 2, E = 2.1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \rho = 7.95 \cdot 10^{-6} \text{ кг сек}^2/\text{см}^4, \sigma_0 = 2000 \text{ кг/см}^2 \\ \omega &= 300 \text{ сек}^{-1}, t_0 = 0.895 \text{ сек}, \alpha = 17, \sigma_1 = 4000 \text{ кг/см}^2, \tau = 3.255 \cdot 10^{-3} \text{ сек} \\ \psi(\tau) &= 3320 \text{ кг/см}^2, \varphi(\tau + 0) = 0.4931 \text{ сек}^{-1}, \nu_1 = 48.4 \text{ кг сек/см}^2 \end{aligned}$$

Решение задачи для вязко-пластической области в скоростях деформации $\dot{\epsilon}$ (фиг. 2), деформациях ϵ (фиг. 3), напряжениях $\sigma^0 = [\sigma - \psi(\tau)]/\psi(\tau)$ (фиг. 4) и смещениях u (фиг. 5) представлено на сетке $x^0 = x/\Delta x$, $t^0 = (t - \tau)/\Delta t$ с шагом вычислений по координате $\Delta x = 33.906 \text{ см}$ и по оси времени $\Delta t = 66.033 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$. На графиках показаны эпюры соответствующих параметров вдоль оси стержня для различных моментов времени, а также кривые постоянных значений этих параметров. Из приведенного решения видно, что интенсивные вязко-пластические деформации концентрируются в сравнительно узкой зоне у нагружаемого конца стержня.



Фиг. 4



Фиг. 5

Аналогичные задачи с иными краевыми условиями решаются подобным образом на основании формальной аналогии между соотношениями (1.6).

3. В задачах динамики сооружений, связанных с расчетом конструкций за пределом динамической текучести, возникает необходимость в определении вязко-пластических (для краткости — пластических) областей, которые могут трактоваться как волны запаздывания. В данном случае может быть предложен несколько иной подход к решению задач подобного типа без рассмотрения волновых процессов, описываемых дифференциальным уравнением теплопроводности, хотя их учет может быть осуществлен методом наложения.

Рассмотрим одномерный случай на примере растягиваемого стального арматурного стержня прямолинейного слабоармированного железобетонного изгибаемого элемента с постоянной по пролету жесткостью B (статически определимая система) под воздействием поперечной динамической нагрузки P , изменяющейся во времени по всему пролету l по одному и тому же закону

$$P(x, t) = p(x) f(t)$$

Кроме того, будем рассматривать элемент как систему с одной степенью свободы.

Пренебрегая влиянием изгиба стержня и располагая начало координат в сечении (или в одном из сечений) с наиболее жестким режимом нагружения $\sigma(0, t) = \sigma_0(t)$ (в данном сечении в момент τ_0 , соответствующий времени запаздывания, впервые будет достигнут динамический предел текучести $\sigma_0(\tau_0)$ и образуется пластический шарнир), имеем выражение для напряжений в стержне

$$\sigma(x, t) = F(x) \sigma_0(t) \quad (t > 0) \quad (3.1)$$

где $F(x)$ может приниматься в соответствии с эпюрой изгибающих моментов от статически действующей нагрузки $p(x)$.

Приведенное сопротивление системы при $t \geq \tau_0$ определяется динамическим моментом в пластическом шарнире и применительно к слабоармированному железобетонному элементу, для которого с известным приближением плечо внутренней пары может быть принято за постоянную величину, — пропорционально напряжению $\sigma_0(t)$.

Поэтому дифференциальное уравнение движения динамической системы может быть записано в виде

$$m\ddot{y} = P_* f(t) - k\tau_0(t), \quad P_* = \int_0^l p(x) dx \quad (t \geq \tau_0) \quad (3.2)$$

Здесь y — перемещение (прогиб) системы, m — приведенная масса, k — коэффициент сопротивления.

В связи с эффектом запаздывания динамической текучести в стержне образуется зона перегрузки переменной длины с напряжениями, превышающими статический предел текучести. Граница $X_-(t)$ зоны перегрузки в процессе возрастания напряжений $\sigma_0(t)$ смещается в сторону положительного направления оси x .

В зоне перегрузки время запаздывания $\tau(x)$ определяется из выражения [1]

$$\int_0^{\tau(x)} \sigma^\alpha(x, t) dt = t_0 \sigma_-^\alpha \quad (3.3)$$

При введении обратной функции получим уравнение для закона смещения границы пластической области $\lambda(t)$

$$\int_0^t \sigma^\alpha[\lambda(t), \xi] d\xi = t_0 \sigma_-^\alpha \quad (3.4)$$

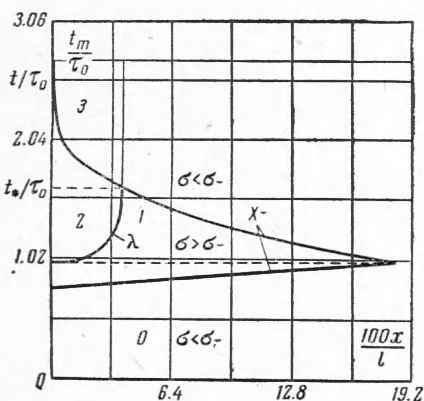
Смещение границы пластической области зафиксировано экспериментально в арматурных стержнях железобетонных балок по резкому выбросу записи тензодатчиков деформации (фиг. 6), наклеенных вдоль стержня.

В связи с непрерывностью напряжений в момент τ_0 и с интенсивным развитием пластической области при $t > \tau_0$ может происходить резкое снижение скорости деформации, что приводит к падению напряжений после достижения динамического предела текучести, наблюдаемому экспериментально.

Таким образом, в момент τ_0 величина зоны перегрузки оказывается максимальной и при $t > \tau_0$ граница X_- движется в обратном направлении. Максимальная длина пластической зоны достигается в момент t_* встречи границ X_- и λ . При $t > t_*$ происходит убывание активно деформируемого участка стержня. Таким образом, в плоскости xt имеем (фиг. 7) области: 0 — упругую ($\sigma < \sigma_-$), 1 — упругую ($\sigma > \sigma_-$), область перегрузки, 2 — пластическую (активная деформация), 3 — область остаточных деформаций.

Закон смещения границы $X_-(t)$ описывается функциональным уравнением

$$\sigma_0^\alpha(t) F[X_-(t)] = \sigma_- \quad (3.5)$$



Фиг. 7

Для определения σ и λ следует использовать зависимость между перемещением системы и деформацией в стержне. Так как для некоторых типов конструкций (например, консольных балок с заделанными концами арматурных стержней длиной λ_0) следует учесть возможность образования пластической зоны вне пределов рассматриваемой области, то в общем случае выражение для абсолютной пластической деформации $\delta(t)$ в стержне можно записать следующим образом:

$$\delta(t) = \int_0^{\lambda(t)} \int_{\tau(x)}^t \dot{\varepsilon}(x, \xi) d\xi dx + \lambda_0 \int_{\tau_0}^t \dot{\varepsilon}(0, \xi) d\xi$$

Приняв закон деформирования в виде

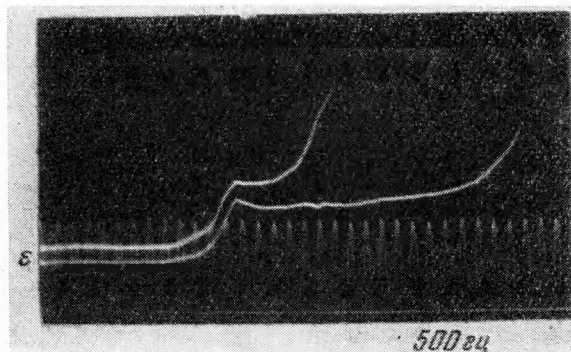
$$\sigma = \sigma_- + \nu \partial \varepsilon / \partial t$$

и учитывая соотношение

$$y(t) = y(\tau_0) + k_1 \delta(t) \quad (t > \tau_0)$$

связывающее перемещение системы и абсолютную пластическую деформацию (k_1 — параметр, определяемый из геометрических соображений в зависимости от типа, размеров конструкции и плеча внутренней пары), можем записать

$$y(t) = y(\tau_0) + \frac{k_1}{\nu} \int_0^{\lambda(t)} \int_{\tau(x)}^t [\sigma(x, \xi) - \sigma_-] d\xi dx + \frac{k_1 \lambda_0}{\nu} \int_{\tau_0}^t [\sigma_0(\xi) - \sigma_-] d\xi \quad (3.6)$$



Фиг. 6

Продифференцировав (3.6) дважды по времени с учетом (3.1) и подставив полученное выражение в (3.2), после некоторых преобразований, получим

$$\frac{d\sigma_0(t)}{dt} \left(\lambda_0 + \int_0^{\lambda(t)} F(x) dx \right) + \frac{d\lambda(t)}{dt} (F[\lambda(t)] \sigma_0(t) - \sigma_-) = \frac{v}{mk_1} (P_* f(t) - k\sigma_0(t)) \quad (3.7)$$

Выражение (3.4) с учетом (3.1) перепишем следующим образом:

$$F[\lambda(t)] = \left(\frac{1}{t_0 \sigma_-^\alpha} \int_{\tau_0}^t \sigma_0^\alpha(\xi) d\xi + 1 \right)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (3.8)$$

Приведенная выше система уравнений дает полное представление о деформировании рассматриваемой конструкции за пределом динамической текучести при $\tau_0 < t < t_*$.

Численное интегрирование системы уравнений (3.7), (3.8) можно упростить, линеаризуя функцию $F(x)$. Ограничиваясь первым участком аппроксимации, положим $F(x) = 1 + rx$, где коэффициент r определяется наклоном аппроксимирующей прямой.

Введением функции

$$Q(t) = (1 + r\lambda(t))^{-\alpha} \quad (3.9)$$

система (3.7), (3.8) приводится к дифференциальному уравнению второго порядка

$$\ddot{Q} = \frac{N_1 f(t) - N_2 \dot{Q}^{\frac{1}{\alpha}} + \dot{Q}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} Q^{-\frac{\alpha+2}{\alpha}} - N_3 \dot{Q} Q^{-\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{0.5(2r\lambda_0 - 1 + Q^{-2/\alpha}) \dot{Q}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} \quad (3.10)$$

$$N_1 = \frac{N_2 N_3 P_*}{k\sigma_-}, \quad N_2 = \frac{r\alpha k v}{mk_1}, \quad N_3 = t_0^{-1/\alpha}$$

Начальные условия при интегрировании этого уравнения принимаются, исходя из непрерывности в момент τ_0 напряжений, деформаций и скорости системы, и определяются динамическим расчетом упругой системы при $t \leq \tau_0$. Коэффициент пластической вязкости определяется из выражения

$$v = (\sigma_0(\tau_0) - \sigma_-) / \dot{\epsilon}(\tau + 0)$$

Параметр τ_0 вычисляется при помощи выражения (3.3).

Для определения величины λ_0 предполагается условие

$$\dot{\epsilon}(x, t) = \dot{\epsilon}(0, t) \quad (\lambda_0 < x < 0)$$

из которого следует

$$\lambda_0 = v \dot{y}(\tau_0) / k_1 [\sigma_0(\tau_0) - \sigma_-]$$

Здесь $\dot{y}(\tau_0)$, $\sigma_0(\tau_0)$ определяются из решения в упругой фазе.

При $t > t_*$ имеем

$$\delta(t) = \int_0^{X_-(t)} \int_{\tau(x)}^t \dot{\epsilon}(x, \xi) d\xi dx + \int_{X_-(t)}^{\lambda(t_*)} \int_{\tau(x)}^{\tau_-(x)} \dot{\epsilon}(x, \xi) d\xi dx + \lambda_0 \int_{\tau_0}^t \dot{\epsilon}(0, \xi) d\xi \quad (3.11)$$

Исключив ϵ с учетом $\tau_-[X_-(\tau)] = t$ и решив совместно (3.2), (3.5) и (3.11), получим

$$F^{-2}[X_-(t)] \frac{d}{dt} F[X_-(t)] \left(\lambda_0 F(0) + \int_0^{X_-(t)} F(x) dx \right) = \frac{v}{k_1 m \sigma_-} \left(\frac{k\sigma_-}{F[X_-(t)]} - P_* f(t) \right) \quad (3.12)$$

При линеаризации $F(x)$ и с учетом $F(0) = 1$ получим уравнение, описывающее смещение границы области активной пластической деформации при $t > t_*$

$$\frac{dX_-(t)}{dt} = \frac{N_4 (1 + rX_-(t)) [P_* f(t) (1 + rX_-(t)) - k\sigma_-]}{\lambda_0 + X_-(t) + 0.5rX_-^2(t)} \quad \left(N_4 = \frac{-v}{rmk_1 \sigma_-} \right) \quad (3.13)$$

Это уравнение может быть проинтегрировано численными методами при начальных условиях $X_- = \lambda(t_*)$, $t = t_*$. Далее не представляет затруднений определить $\sigma_0(t)$ при помощи (3.5).

4. Ниже приведены результаты расчета (интегрирование проводилось методом Рунге — Кутты) сопротивления и смещения границы пластической области для растянутых стержней консольной железобетонной балки (без учета напряжений от собственного веса конструкции) под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки

$$f(t) = P_1 t / \theta \quad (0 \leq t \leq \theta), \quad f(t) = P_1 \quad (t \geq \theta)$$

Основные параметры

$$P_1 = 11.5 \text{ кг/см}, \theta = 0.005 \text{ сек}, l = 200 \text{ см}, m = 0.635 \text{ кг сек}^2/\text{см}, B = 3.51 \cdot 10^9 \text{ кг см}^2$$

$$\sigma_- = 2000 \text{ кг/см}^2, k = 1.24 \text{ см}^2, k_1 = 14.83, r = -9 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}, \tau_0 = 0.0314 \text{ сек}$$

$$\sigma_0(\tau_0) = 2980 \text{ кг/см}^2, \dot{\epsilon}(\tau + 0) = 77.457 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}, \nu = 12653 \text{ кг сек/см}^2$$

$$\lambda_0 = 35.24 \text{ см.}$$

Так как $f(t) = f(\tau_0) = \text{const}$ при $t > 0$, то введением функции $\Omega = dQ/dt$ выражение (3.10) приводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{d\lambda}{d\Omega} = \frac{-(\lambda_0 + 0.5r\lambda^2 + \lambda)(1+r\lambda)^{\alpha+1}}{\alpha [N_1 f(\tau_0) \Omega^{-1/\alpha} + \Omega(1+r\lambda)^{\alpha+2} - N_3 \Omega^{(\alpha-1)/\alpha} (1+r\lambda)^{\alpha+1} - N_2]} \quad (4.1)$$

На фиг. 8 приведен график $\lambda^\circ(\Omega^\circ)$, $\lambda^\circ = 100\lambda/l$, $\Omega^\circ = \Omega/\Omega(\tau_0)$, полученный при интегрировании (4.1) при начальном условии

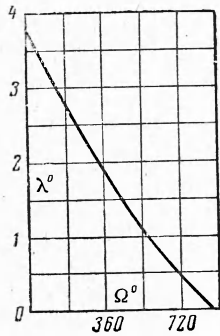
$$\Omega = t_0^{-1} (\sigma_0(\tau_0) / \sigma_-)^\alpha = 982.49 \text{ сек}^{-1}, \quad \lambda = 0$$

Зависимость $t = t(\lambda)$ определялась интегрированием выражения

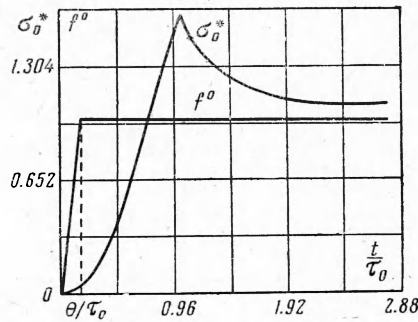
$$\frac{dt}{d\lambda} = -\frac{r\alpha}{\Omega} (1+r\lambda)^{-(\alpha+1)} \quad (0 < \lambda < \lambda(t_*))$$

при начальном условии $\lambda = 0, t = \tau_0$.

При $t > t_*$ зависимость $t(X_-)$ определялась интегрированием (3.13) в промежутке $0 < X_- < \lambda(t_*)$.



Фиг. 8



Фиг. 9

Напряжение σ_0 определялось по формулам

$$\sigma_0 = \sigma_-(t_0 \Omega)^{1/\alpha} \quad (\Omega[\lambda(t_*)] < \Omega < \Omega(0))$$

$$\sigma_0 = \sigma_-(rX_- - 1)^{-1} \quad (\lambda(t_*) > X_- > 0)$$

Результаты вычислений представлены на фиг. 7 и 9, на котором $\sigma_0^* = k\sigma_0/P_1 P_*$, $f^0 = f/P_1$.

Автор глубоко благодарен С. С. Григоряну и Н. И. Поляковой за обсуждение работы.

Поступила 15 VIII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Котляревский В. А. Механические характеристики малоуглеродистой стали при импульсивном нагружении с учетом запаздывающей текучести и вязкопластических свойств. ПМТФ, 1961, № 6.
2. Taylor D. B. C. The dynamic straining of metals having definite yield points. J. of Mech. and Phys. of Solids. 1954, vol. 3, № 1.
3. Campbell J. D. The dynamic yielding of mild steel. Acta metallurgica. 1953, vol. 1, № 6.
4. Любов Б. Я. Решение нестационарной одномерной задачи теплопроводности для области с равномерно движущейся границей. ДАН СССР, 1947, т. LVII, № 6.