

## ВЛИЯНИЕ ОТСОСА НА ЛАМИНАРНОЕ СЖИМАЕМОЕ ТЕЧЕНИЕ И ТЕПЛОПЕРЕДАЧУ ВБЛИЗИ ДИСКА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ В ГАЗЕ

В. Д. Борисевич, Е. П. Потанин  
(Москва)

Отсос газа через обтекаемую стенку может быть использован для борьбы с неустойчивостью течения в области передней кромки крыла [1], характер дестабилизации потока в которой аналогичен развитию неустойчивости в пограничном слое на вращающемся диске [2]. Отсасывание пограничного слоя на обтекаемых телах или вращающихся поверхностях является также эффективным способом интенсификации процессов тепло- и массопереноса [3]. Знание гидродинамических и тепловых характеристик пограничного слоя на вращающемся диске необходимо и в целом ряде других технических приложений [4].

Для исследования несжимаемого ламинарного потока вблизи вращающегося диска при различных внешних условиях успешно применен метод осреднения нелинейных инерционных членов в уравнениях движения по толщине пограничного слоя (метод Слезкина — Тарга), позволивший получить аналитические зависимости для характеристик течения, необходимые при проведении инженерных расчетов [5—8]. В настоящей работе на основе модифицированного метода Слезкина — Тарга изучается ламинарный пограничный слой на вращающемся в газе неограниченном диске при наличии равномерного отсоса с его поверхности с учетом сжимаемости среды. Рассматривается процесс теплообмена между диском и внешним потоком. Рассчитываются толщины гидродинамического и теплового пограничных слоев, а также величины коэффициента момента сопротивления диска  $c_M$  и числа Нуссельта  $Nu$  в зависимости от параметра отсоса и отношения температур во внешнем потоке и на диске. Показывается, что отсос существенно влияет на профиль гидродинамического потока у поверхности диска, увеличивая его момент сопротивления и теплоотдачу. Результаты расчета  $c_M$  сравниваются с известными данными точного решения уравнений пограничного слоя на вращающемся диске в случае несжимаемой жидкости.

1. В пренебрежении вязкой диссипацией [5, 9] уравнения пространственных гидродинамического и теплового пограничных слоев на вращающемся диске в общепринятых обозначениях запишем в виде

$$(1.1) \quad \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial z} \right);$$

$$(1.2) \quad \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v}{\partial z} \right);$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial}{\partial r} (\rho r u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho r w) = 0;$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0;$$

$$(1.5) \quad \rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right);$$

$$(1.6) \quad p = \rho \frac{RT}{\mu}.$$

Здесь  $u$ ,  $v$  и  $w$  — радиальная, азимутальная и осевая компоненты скорости среды;  $p$  — давление;  $\rho$  — плотность;  $T$  — температура;  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении;  $\mu$  — молекулярный вес газа;  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $\eta$  и  $\kappa$  — коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности среды;  $z$  — осевая координата, отсчитываемая от поверхности диска.

Систему уравнений (1.1)—(1.6) следует решать при граничных условиях

$$z = 0 : u = 0, v = \omega r, w = -k, T = T_0,$$

$$z \rightarrow \infty : u \rightarrow 0, v \rightarrow 0, T \rightarrow T_1,$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения диска;  $k$  — скорость отсоса на его по-

верхности;  $T_0$  — температура диска;  $T_1$  — температура газа во внешнем течении.

Пусть температура не зависит от радиальной координаты [4]. Пренебрежем также, как это обычно делается, изменением удельной теплоемкости  $c_p$ .

Введем аналогично [10] преобразование Дородницына

$$(1.7) \quad Z = \int_0^z \frac{\rho(z)}{\rho_1} dz$$

( $\rho_1$  — плотность газа во внешнем потоке).

Тогда выражение для преобразованной осевой компоненты скорости  $w_1$  примет вид

$$(1.8) \quad w_1 = w_0/\rho_1 + u dz/\partial r.$$

Полагая  $u = rF(Z)$ ,  $v = rG(Z)$ ,  $T = T_0 + (T_1 - T_0)\theta(Z)$ ,  $\partial p/\partial r = 0$ ,  $\eta = \eta_1 T/T_1$ ,  $\kappa = \kappa_1 T/T_1$  ( $\eta_1$  и  $\kappa_1$  — коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности во внешнем потоке) и используя (1.1)–(1.8), получим

$$(1.9) \quad F^2 + w_1 F' - G^2 = \nu_1 F'';$$

$$(1.10) \quad 2FG + w_1 G' = \nu_1 G'';$$

$$(1.11) \quad 2F + w_1' = 0;$$

$$(1.12) \quad w_1 \theta' = \chi_1 \theta''.$$

Здесь  $\chi_1 = \kappa_1/(\rho_1 c_p)$ ;  $\nu_1 = \eta_1/\rho_1$ ; штрих означает дифференцирование по  $Z$ .

Для решения системы (1.9)–(1.12) введем обозначение  $w_1 = w_0 - k_1$ , в котором  $k_1 = \rho_0 k/\rho_1$ ,  $\rho_0$  — плотность газа на поверхности диска.

Выделяя в правых частях уравнений члены, пропорциональные  $k_1$ , систему (1.9)–(1.12) преобразуем к виду

$$(1.13) \quad \frac{1}{\nu_1} (F^2 + w_0 F' - G^2) = F'' + \frac{F'}{l};$$

$$(1.14) \quad \frac{1}{\nu_1} (2FG + w_0 G') = G'' + \frac{G}{l};$$

$$(1.15) \quad 2F + w_0' = 0;$$

$$(1.16) \quad \frac{1}{\chi_1} w_0 \theta' = \theta'' + \frac{\theta'}{l_1},$$

где  $l = \nu_1/k_1$ ;  $l_1 = \chi_1/k_1$ .

Заменяя члены в левых частях уравнений (1.13), (1.14) и (1.16) их средними значениями по толщинам гидродинамического  $\delta_1$  и теплового  $h_1$  пограничных слоев с учетом (1.15), имеем

$$(1.17) \quad \frac{3}{\nu_1 \delta_1} \int_0^{\delta_1} F^2 dZ - \frac{1}{\nu_1 \delta_1} \int_0^{\delta_1} G^2 dZ = \frac{d^2 F}{dZ^2} + \frac{1}{l} \frac{dF}{dZ};$$

$$(1.18) \quad \frac{4}{\nu_1 \delta_1} \int_0^{\delta_1} FG dZ = \frac{d^2 G}{dZ^2} + \frac{1}{l} \frac{dG}{dZ};$$

$$(1.19) \quad -\frac{2}{\chi_1 h_1} \int_0^{h_1} \left( \int_0^Z F dZ \right) \frac{d\theta}{dZ} dZ = \frac{d^2 \theta}{dZ^2} + \frac{1}{l_1} \frac{d\theta}{dZ}.$$

Формально уравнения (1.17)–(1.19) совпадают с системой (5) из работы [8], посвященной исследованию случая несжимаемой жидкости. Поэтому для величин  $F$ ,  $G$  и  $\theta$  могут быть использованы выражения (7)–(9) указанной работы, в которых координата  $z$  заменена на функцию  $Z = \int_0^z \frac{\rho(z)}{\rho_1} dz$ .

При  $\rho = \rho_1 = \rho_0 = \text{const}$  и  $k \rightarrow 0$  ( $l \rightarrow \infty$ ) соотношения для радиальной и окружной компонент скорости переходят в решение Тарга, описываемое степенными полиномами [5]. В другом предельном случае больших отсосов ( $k \rightarrow \infty$ ,  $l \rightarrow 0$ ,  $l_1 \rightarrow 0$ ) выражения для  $F$ ,  $G$  и  $\theta$  совпадают с точным решением уравнений пограничного слоя [8].

Для определения неизвестных  $A_1$ ,  $\delta_1$  и  $h_1$  необходимо решить систему уравнений, аналогичную системе (10)–(12) [8] при  $p = 0$ .

Для перехода к реальным значениям  $\delta_r$  и  $h_r$  необходимо воспользоваться соотношениями

$$(1.20) \quad \frac{\delta_r \left(\frac{\omega}{v_1}\right)^{1/2}}{\delta_0} = \frac{1}{n} + \frac{1 - \frac{1}{n}}{[\exp(-f) + f \exp(-f) - 1]} \times \\ \times \left[ \frac{d \text{Pr}}{2} \exp(-f) - \frac{\exp(-d \text{Pr})}{d \text{Pr}} - 1 + \frac{1}{d \text{Pr}} \right];$$

$$(1.21) \quad \frac{h_r \left(\frac{\omega}{v_1}\right)^{1/2} \text{Pr}}{h_0} = \frac{1}{n} + \frac{1 - \frac{1}{n}}{[\exp(-f) + f \exp(-f) - 1]} \times \\ \times \left[ \frac{f}{2} \exp(-f) - \frac{\exp(-f)}{f} - 1 + \frac{1}{f} \right];$$

где  $\delta_0 = \delta_1 \left(\frac{\omega}{v_1}\right)^{1/2}$ ;  $h_0 = h_1 \left(\frac{\omega}{v_1}\right)^{1/2} \text{Pr}$ ;  $A_0 = A_1 \frac{v_1}{\omega^2}$ ;  $d = k_0 \delta_0 n$ ;  $f = k_0 h_0 n$ ;  $n = \frac{T_1}{T_0}$ ;  $k_0 = k \left(\frac{1}{\omega v_1}\right)^{1/2}$ ;  $\text{Pr} = \frac{v_1}{\chi_1}$  — число Прандтля.

Расчитанные зависимости величин  $\delta_0$  и  $h_0$  от параметра отсоса  $k_0$  для  $n = T_1/T_0 = 0,5; 0,75; 1; 1,5; 2$  (линии 1–5) и  $\text{Pr} = 1$  представлены на рис. 1 и 2. В качестве примера штриховыми линиями показаны аналогичные зависимости для безразмерных реальных толщин гидродинамического и теплового пограничных слоев, найденные в соответствии с (1.20) и (1.21) при  $n = 0,5$ .

Отсос вызывает дополнительный приток из внешней области течения к диску газа со скоростью вращения и температурой, отличными от значений, которые среда имеет вблизи поверхности. Это приводит к уменьшению толщин гидродинамического и теплового пограничных слоев с ростом параметра  $k_0$ , характеризующего интенсивность отсоса. Рост отношения температур во внешнем потоке  $T_1$  и на диске  $T_0$  ( $n = T_1/T_0$ ) при прочих равных условиях способствует увеличению эффективности отсоса вследствие относительного увеличения плотности отсасываемого газа, что также приводит к падению толщин пограничных слоев.

Отметим, что используемый приближенный метод расчета основан на осреднении левых частей уравнений (1.13), (1.14) и (1.16) по толщинам гидродинамического и теплового пограничных слоев. По этой причине его точность при возрастании  $k_0$  увеличивается из-за относительного уменьшения роли осредненных членов [8]. Применяя найденную зависимость (1.20), (7) из [8] и уравнение неразрывности (1.3), можно получить аналитическое выражение, связывающее осевой поток вдали от поверхности диска и параметр  $n$ .

2. Используя выражение для азимутальной компоненты скорости, вычислим момент сил трения  $M_0$ , действующий на одну сторону поверхности диска радиуса  $R_0$ :

$$M_0 = 2\pi\eta_1 \int_0^{R_0} r^3 \left| \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z=0} dr = \frac{\pi\eta_1 \omega R_0^4 (\omega/v_1)^{1/2} dn [\exp(-d) - 1]}{2\delta_0 [1 - (1+d) \exp(-d)]}.$$

На рис. 3 приведены зависимости коэффициента момента трения  $c_M = \frac{2M_0}{\pi\eta_1 R_0^4 (\omega^3/v_1)^{1/2}}$  от  $k_0$  при  $n = 2; 1,5; 1; 0,75; 0,5$  (линии 1–5), штри-

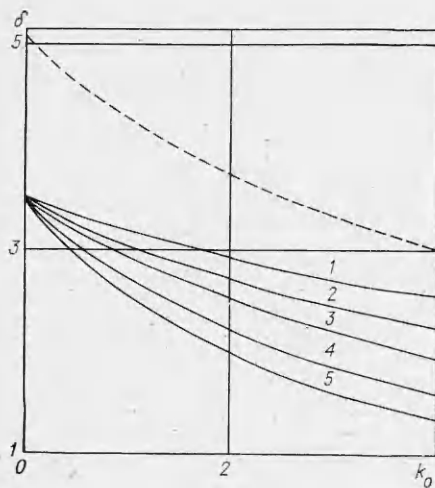


Рис. 1

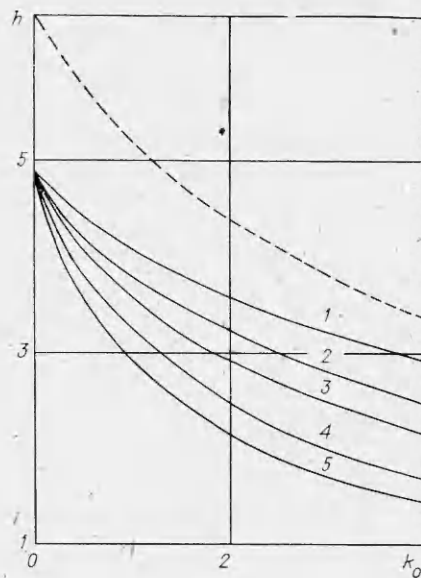


Рис. 2

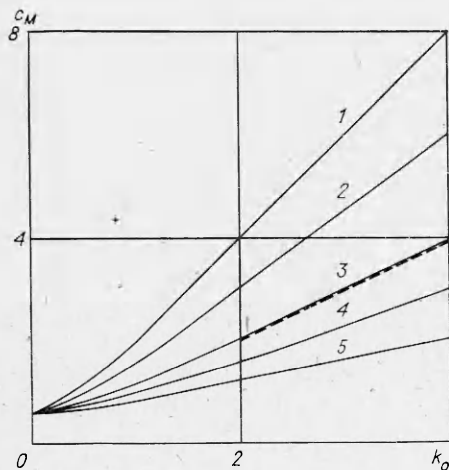


Рис. 3

хойвой линией показаны результаты расчета  $c_M$ , полученные на основе точного решения уравнений пограничного слоя при больших  $k_0$  и  $n = 1$  [4]. Видно, что отсос резко увеличивает сопротивление диска, причем при больших значениях  $k_0$  справедливо соотношение  $c_M \approx k_0 n$ . Возрастание коэффициента момента трения с ростом параметра  $n$  в случае  $k_0 \neq 0$  объясняется увеличением эффективности отсоса вследствие возрастания плотности отсасываемого газа. В другом предельном случае ( $k_0 \rightarrow 0$ ) величина  $c_M$  не зависит от  $n$ . Последнее связано с тем обстоятельством, что при охлаждении диска уменьшение динамической вязкости вблизи его поверхности компенсируется увеличением осевого градиента азимутальной скорости, вызванным падением реальной толщины пограничного слоя. Расчитанное значение  $c_M = 0,579$  при  $k_0 = 0$  практически совпадает с результатом [10].

3. Оценим теперь локальное число Нуссельта, характеризующее интенсивность теплового потока  $q = -\kappa \partial T / \partial z$  на поверхности диска. Используя выражение (9) из [8], найдем

$$\text{Nu} = \frac{q(0)}{(T_0 - T_1) \alpha_1} \left( \frac{\nu_1}{\omega} \right)^{1/2} = \frac{\text{Pr} f [\exp(-f) - 1]}{i_0 [\exp(-f) + f \exp(-f) - 1]}$$

Результаты расчета  $\text{Nu}$  для различных значений  $k_0$  и  $n$  при  $\text{Pr} = 1$  приведены в табл. 1. Как следует из полученных зависимостей, отсос способствует увеличению теплоотдачи диска. При больших параметрах отсоса значение  $\text{Nu}$  выходит на асимптотику  $\text{Nu} = \text{Pr} k_0 n$ .

В табл. 2 представлены данные расчета безразмерной толщины теплового пограничного слоя  $h_0 / \text{Pr}$  и  $\text{Nu}$  для различных значений  $\text{Pr}$  при  $k_0 = 0$  и  $n = 1$ . Здесь же для сравнения приведены результаты расчета  $\text{Nu}^*$  из [11].

Т а б л и ц а 1

n	Nu					
	k <sub>0</sub>					
	0,1	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0
0,5	0,436	0,550	0,717	1,112	1,560	2,033
0,75	0,449	0,644	0,906	1,560	2,275	3,012
1,0	0,463	0,717	1,112	2,033	3,012	4,006
1,5	0,491	0,906	1,560	3,012	4,504	6,002
2,0	0,520	1,112	2,033	4,006	6,002	8,001

Т а б л и ц а 2

Pr	h <sub>0</sub> /Pr	Nu	Nu*	Pr	h <sub>0</sub> /Pr	Nu	Nu*
1,0	4,861	0,415	0,400	0,85	5,389	0,374	0,365
0,95	5,010	0,402	0,389	0,8	5,649	0,357	0,353
0,9	5,183	0,389	0,377	0,75	5,951	0,341	0,340

В заключение отметим простоту и наглядность использованного в настоящей работе подхода к анализу уравнений пограничного слоя, позволяющего получать аналитические выражения для гидродинамических и тепловых характеристик сжимаемого потока, а также профилей скорости и температуры во всем диапазоне изменения параметра  $k_0$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бегяев С. К. Структура ламинарного пограничного слоя с распределенным отсосом // ПМТФ.— 1984.— № 5.
2. Малик М. Р., Уилкинсон С. П., Оршаг С. А. Неустойчивость и переход течения на вращающемся диске // РТК.— 1981.— Т. 19, № 10.
3. Волчков Э. П., Синайко Е. И., Терехов В. И. Турбулентный пограничный слой с отсосом в неизотермических условиях // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1979.— № 2.
4. Дорфман Л. А. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел.— М.: Физматгиз, 1960.
5. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений.— М.; Л.: Гостехиздат, 1951.
6. Горбачев Л. П., Потанин Е. П. К расчету МГД-пограничного слоя на дисках // Магнит. гидродинамика.— 1969.— № 2.
7. Борисевич В. Д., Потанин Е. П. О влиянии равномерного отсоса на МГД-течение вблизи вращающегося в потенциальном потоке диска // Магнит. гидродинамика.— 1984.— № 4.
8. Борисевич В. Д., Потанин Е. П. Пограничный слой на вращающемся в однородном осевом потоке диске при наличии отсоса // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1985.— № 4.
9. Solan A., Olek S., Toren M. Rotating compressible flow over an infinite disk // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1983.— V. 50.
10. Шидловский В. П. Ламинарный пограничный слой на неограниченном диске, вращающемся в газе // ПММ.— 1960.— Т. 24, вып. 1.
11. Riley N. The heat transfer from a rotating disk // Quart. Journ. Mech. and Appl. Math.— 1964.— V. 17, pt 3.

Поступила 19/XII 1985 г.