

УДК 532.526

## ВЕТВЛЕНИЕ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТОНКОМ СЛОЕ

В. А. Батищев

Ростовский государственный университет, 344090 Ростов-на-Дону

При больших числах Марангони исследованы термокапиллярные течения жидкости в тонком слое с твердой нижней стенкой и свободной верхней поверхностью, вдоль которой в радиальном направлении задан градиент температуры. Для системы уравнений Прандтля численно и асимптотически построены автомодельные решения, описывающие осесимметричные режимы течений жидкости без окружной компоненты скорости. Показано, что от полученных режимов ответвляется пара новых, также автомодельных режимов течений жидкости с вращением, которые рассчитаны численно и асимптотически.

1. Стационарная задача о термокапиллярном течении несжимаемой жидкости в тонком горизонтальном слое, ограниченном снизу твердой стенкой  $S$ , а сверху свободной границей  $\Gamma$ , на которой задан ненулевой градиент температуры при малых коэффициентах вязкости ( $\nu \rightarrow 0$ ) и теплопроводности ( $\chi \rightarrow 0$ ), описывается системой уравнений

$$(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\rho^{-1}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi\Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} p &= 2\nu\rho\mathbf{n}\Pi\mathbf{n} - \sigma(k_1 + k_2) + p_*, & (r, \theta, z) \in \Gamma, \\ 2\nu\rho[\Pi\mathbf{n} - (\mathbf{n}\Pi\mathbf{n})\mathbf{n}] &= \nabla_\Gamma\sigma, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, & (r, \theta, z) \in \Gamma, \\ T &= T_\Gamma, \quad (r, \theta, z) \in \Gamma, \quad \mathbf{v} = T - T_S = 0, & (r, \theta, z) \in S. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$  — вектор скорости;  $(r, \theta, z)$  — цилиндрические координаты;  $\mathbf{g} = (0, 0, -g_t)$ ,  $g_t$  — ускорение свободного падения;  $T$  — температура;  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к свободной границе  $\Gamma$ ;  $\Pi$  — тензор скоростей деформации;  $k_1$  и  $k_2$  — главные кривизны поверхности  $\Gamma$ ;  $T_S$  — температура стенки;  $p_*$  и  $T_\Gamma$  — заданные давление и температура на свободной границе;  $\nabla_\Gamma = \nabla - (\mathbf{n}, \nabla)\mathbf{n}$  — градиент вдоль  $\Gamma$ ;  $\sigma = \sigma_0 - |\sigma_T|(T - T_*)$  — коэффициент поверхностного натяжения, линейно зависящий от температуры, где  $\sigma_0, \sigma_T, T_*$  — известные постоянные. Условия осевой симметрии здесь означают, что  $\mathbf{v}, p, T$  не зависят от окружной координаты  $\theta$ .

При неравномерном нагреве свободной границы  $\Gamma$  на ней вследствие термокапиллярного эффекта Марангони возникают поверхностные касательные напряжения, которые при  $\nu \rightarrow 0, \chi \rightarrow 0$  приводят к формированию нелинейных пограничных слоев.

Рассмотрим термокапиллярное течение жидкости в тонком слое, толщина которого имеет порядок толщины пограничного слоя  $O(\varepsilon)$ . Отметим, что ранее рассматривались течения, вызванные эффектом Марангони в слоях толщиной  $O(\varepsilon)$ , ограниченные твердой и свободной границами [1], а в [2] изучались течения на основе уравнений Прандтля

в тонких слоях между двумя твердыми стенками. В работе [3] построены нестационарные автомодельные решения, описывающие течения жидкости в пограничном слое вблизи свободной границы.

Рассмотрим термокапиллярное течение жидкости в тонком вязком слое толщиной  $O(\varepsilon)$  на основе системы уравнений Прандтля [1], которую запишем в цилиндрических координатах, учитывая, что  $v, p, T$  не зависят от окружной координаты  $\theta$ :

$$\begin{aligned} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} &= \nu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r}, & v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} &= \nu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial p'}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial(rv_z)}{\partial z} &= 0, & v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} &= \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $p' = p + \rho g_t z$ . Для системы (1.1) приведем краевые условия на твердой стенке  $z = 0$  и свободной границе  $z = \zeta$ , записывая их в приближении пограничного слоя:

$$\begin{aligned} \rho \nu \frac{\partial v_r}{\partial z} &= \frac{\partial \sigma}{\partial r}, & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} &= 0, & \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad (z = \zeta), \\ p' &= \rho g_t z - \sigma(k_1 + k_2) + 2\nu \rho \frac{\partial v_r}{\partial n} p_*, & T &= T_\Gamma \quad (z = \zeta), \\ v_r &= v_\theta = v_z = 0, & T &= T_S \quad (z = 0). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Краевые условия при  $z = \zeta$  — это динамические условия для касательных и нормальных напряжений, а также кинематическое условие на свободной границе  $\Gamma$ . Отметим, что касательные напряжения на  $\Gamma$  вызваны эффектом Марангони.

2. Построим автомодельное решение системы (1.1), (1.2) при условии, что температура на свободной границе зависит только от радиальной координаты по квадратичному закону  $T_\Gamma = 0,5 A_\Gamma r^2$ . В этом случае касательные напряжения на  $\Gamma$  действуют в радиальном направлении и отсутствуют в окружном. Приведем автомодельное решение системы (1.1):

$$\begin{aligned} v_r &= r \Psi'(\xi) \nu h L^{-2}, & v_\theta &= r g(\xi) \nu h L^{-2}, & v_z &= 2\Phi(\xi) \nu h^2 L^{-1}, \\ T &= 0,5 r^2 A_\Gamma T_1(\xi), & \frac{\partial p}{\partial r} &= \rho q r \nu^2 L^{-2} h^2, & \xi &= 1 - \frac{z}{H}. \end{aligned}$$

Здесь  $H$  — толщина слоя;  $L = (\rho \nu^2 A_\Gamma^{-1} |\sigma_T|^{-1})^{1/3}$  — масштаб длины;  $h = H/L$  — безразмерный параметр. Краевые условия на свободной границе выполняются, если  $\zeta = H = \text{const}$ , а  $p_*$  зависит от координаты  $r$  по квадратичному закону. Отметим, что в рассматриваемом приближении свободная граница прямолинейна и слой имеет постоянную толщину порядка  $\nu^{2/3}$ . Очевидно, здесь  $\varepsilon = O(\nu^{2/3})$ .

Полученное автомодельное решение описывает термокапиллярное течение жидкости только вблизи оси симметрии  $Oz$  и не распространяется на случай больших значений радиальной координаты  $r$ .

Функции  $\Phi(\xi)$ ,  $g(\xi)$ ,  $T_1(\xi)$  и параметр  $q$  определяются из краевой задачи

$$\begin{aligned} \Phi''' &= \lambda(\Phi'^2 - 2\Phi\Phi'' - g^2 + q), & g'' &= 2\lambda(\Phi'g - \Phi g'), & q' &= 0, \\ T_1'' &= 2\lambda \text{Pr}(\Phi'T_1 - \Phi T_1'), & \Phi(0) &= 0, & \Phi''(0) &= 1, \\ g'(0) &= 0, & T_1(0) &= 1, & \Phi(1) = \Phi'(1) = g(1) = T_1(1) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $\lambda = h^3$  считается заданным параметром;  $\text{Pr}$  — число Прандтля; касательные напряжения на свободной границе направлены к оси симметрии.

Обозначим через  $\Phi_0(\xi, \lambda)$ ,  $q_0(\lambda)$ ,  $g_0 \equiv 0$  решение системы (2.1), которое описывает течение жидкости с нулевой окружной компонентой скорости. Для конечных  $\lambda$  это решение

получено численно. На рис. 1 кривой 1 изображена зависимость параметра  $p_0 = -q_0 h^2$  от безразмерной толщины слоя  $h$ . При малых  $\lambda$ , разлагая функцию  $\Phi_0(\xi, \lambda)$  в степенной ряд по переменной  $\xi$  и оставляя три члена, находим асимптотику ( $\lambda \rightarrow 0$ )

$$\Phi_0 = -\xi(\xi - 1)^2/4 + o(1), \quad q_0 = -1,5/\lambda + o(1). \quad (2.2)$$

При  $h = 0,5$  у численного и асимптотического значений  $q_0$  совпадают первые три значащие цифры. При больших значениях  $\lambda$  решение строится методом сращивания асимптотических разложений:

$$\Phi_0 = 0,5\xi(\xi - 1) + \lambda^{-1/2}g_a(\eta) + O(\lambda^{-1}), \quad q_0 = -1/4 + O(\lambda^{-1/2}) \quad (\lambda \rightarrow \infty).$$

Здесь  $\eta = (1 - \xi)\lambda^{-1/2}$ , а функция  $g_a(\eta)$  определяется из краевой задачи

$$g_a''' = 2g_a g_a'' - g_a'^2 + \eta g_a' + g_a', \quad g_a(0) = g_a'(0) - 0,5 = g_a'(\infty) = 0.$$

Численный расчет приводит к значению  $g_a''(0) = 0,5478$ .

3. Покажем, что при некотором значении  $\lambda$  от решения  $\Phi_0, q_0$  ответвляются два симметричных решения с ненулевой окружной компонентой скорости  $v_\theta \neq 0$ . Для этого рассмотрим сначала задачу на собственные значения, которая получается путем линеаризации задачи (2.1) вблизи решения  $\Phi_0, q_0$ :

$$\begin{aligned} f_1''' &= \lambda(2\Phi_0' f_1 - 2\Phi_0 f_1'' - 2\Phi_0'' f_1 + q_1), & g_1'' &= 2\lambda(\Phi_0' g_1 - \Phi_0 g_1'), & q_1' &= 0, \\ f_1(0) &= f_1''(0) = g_1'(0) = 0, & f_1(1) &= f_1'(1) = g_1(1) = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Полученная краевая задача (с учетом соответствующей задачи для функции  $T_1$ ) исследовалась численно для конечных значений  $\lambda$  и асимптотически при малых и больших  $\lambda$ . Расчеты показали, что при конечных значениях  $\lambda$  существует только одно простое собственное число  $\lambda_0 = 11,222$ , которому соответствует собственная функция  $g_1 = \varphi(\xi)$ ,  $f_1 = 0$ ,  $q_1 = 0$ ,  $T_1 = 0$  с условием нормировки  $\varphi(0) = 1$ . На отрезке  $[0, 1]$  с ростом  $\xi$  положительная функция  $\varphi(\xi)$  монотонно убывает от единицы до нуля. Исследование задачи (3.1) методом сращивания асимптотических разложений показало, что при  $\lambda \rightarrow \infty$  собственные значения отсутствуют. Для малых значений  $\lambda$  исследование с использованием формул (2.2) показало, что задача (3.1) также не имеет собственных значений. Задача (3.1) имеет лишь одно простое собственное число при всех  $\lambda \in (0, \infty)$ .

Перейдем к выводу уравнения разветвления для краевой задачи (2.1), используя метод работы [4] и представив решение в виде

$$\Phi(\xi, \lambda) = \Phi_0(\xi, \lambda) + \alpha f(\xi, \lambda, \alpha), \quad g(\xi, \lambda) = \alpha G(\xi, \lambda, \alpha), \quad q = q_0(\lambda) + \alpha Q(\lambda, \alpha), \quad (3.2)$$

где  $f, G, Q$  — неизвестные функции;  $\alpha$  — параметр, который выбирается так, чтобы выполнялось условие  $G = 1$  при  $\xi = 0$ . Введем линейные операторы

$$L = D^3 - \lambda(2\Phi_0' D - 2\Phi_0 D^2 - 2\Phi_0'' I),$$

$$K = D^2 - 2\lambda(\Phi_0' I - \Phi_0 D), \quad L_0 = L, \quad K_0 = K \quad (\lambda = \lambda_0).$$

Здесь  $D = d/d\xi$ ;  $I$  — единичный оператор.

Функции  $f, G, Q$  определяются из нелинейной краевой задачи

$$\begin{aligned} L_1(f, g, Q) &\equiv Lf - \lambda Q - \lambda\alpha(f'^2 - 2ff'' - G^2) = 0, \\ K_1(f, G) &\equiv KG - 2\lambda\alpha(f'G - fG') = 0, & Q' &= 0, \\ f(0) &= f''(0) = G'(0) = 0, & f(1) &= f'(1) = G(1) = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отметим, что система (3.3) при  $\lambda = \lambda_0, \alpha = 0$  имеет решение  $f = 0, G = \varphi(\xi), Q = 0$ , так как совпадает с задачей на собственные значения (3.1).

Рассмотрим теперь задачу Коши

$$L_1(f, G, Q) = 0, \quad K_1(f, G) = 0, \quad Q' = 0; \quad (3.4)$$

$$f = 0, \quad f' = p_1, \quad f'' = 0, \quad G = 1, \quad G' = 0, \quad Q = p_2 \quad (\xi = 0). \quad (3.5)$$

Параметры  $p_1, p_2$  пока неизвестны и находятся при выполнении краевых условий в (3.3) на твердой стенке при  $\xi = 1$ .

Отметим, что задача (3.4), (3.5) при  $\lambda = \lambda_0, \alpha = 0$  имеет решение  $f = 0, G = \varphi(\xi), Q = 0, p_1 = p_2 = 0$ . Исследуем теперь решение этой задачи при значениях параметров  $(\lambda, \alpha)$ , близких к  $(\lambda_0, 0)$ . Очевидно, что это решение является решением краевой задачи (3.3) тогда и только тогда, когда функции  $f, G, Q$  удовлетворяют краевым условиям при  $\xi = 1$ :

$$f(1, \lambda, \alpha, p_1, p_2) = 0, \quad f'(1, \lambda, \alpha, p_1, p_2) = 0, \quad G(1, \lambda, \alpha, p_1, p_2) = 0. \quad (3.6)$$

Параметры  $p_1, p_2$  однозначно определяются из первых двух уравнений системы (3.6). Это устанавливается с помощью известной теоремы о неявных функциях [5]. В точке  $\lambda = \lambda_0, \alpha = 0$  вычисляется функциональный определитель  $D(f, f')/D(p_1, p_2)$ , который оказался отличным от нуля. При расчете определителя численно решались задачи Коши для производных по параметрам  $p_1, p_2$  от функций  $f$  и  $\partial f/\partial \xi$ .

Определив из первых двух уравнений системы (3.6) параметры  $p_1, p_2$  и подставляя их в третье, выводим уравнение разветвления

$$b(\lambda, \alpha) \equiv G(1, \lambda, \alpha, p_1(\lambda, \alpha), p_2(\lambda, \alpha)) = 0. \quad (3.7)$$

Используя метод работы [4], разложим функцию  $b(\lambda, \alpha)$  в конечный ряд Тейлора в окрестности точки  $\lambda = \lambda_0, \alpha = 0$ :

$$b(\lambda, \alpha) = b(\lambda_0, 0) + (\lambda - \lambda_0)b_\lambda + \alpha b_\alpha + 0,5\alpha^2 b_{\alpha\alpha} + \dots = 0. \quad (3.8)$$

Здесь  $b_\lambda, b_\alpha, b_{\alpha\alpha}$  — производные по параметрам  $\lambda, \alpha$  от функции  $b(\lambda, \alpha)$ , вычисленные в точке  $\lambda = \lambda_0, \alpha = 0$ .

Вычислим коэффициенты ряда (3.8). Покажем, что  $b(\lambda_0, 0) = 0$ . Для этого переходим к пределу при  $\lambda \rightarrow \lambda_0, \alpha \rightarrow 0$  в (3.7), задаче Коши (3.4), (3.5) и учитываем условия  $f = 0, f' = 0, G = 0$  при  $\xi = 1$ . Исследование полученных задач показывает, что  $G = \varphi(\xi), p_1 = p_2 = 0$  при  $\alpha = 0, \lambda = \lambda_0$  и, следовательно,  $b(\lambda_0, 0) = \varphi(1) = 0$ .

Найдем численное значение коэффициента  $b_\lambda$  в (3.8), используя соотношение

$$b_\lambda = \frac{\partial G}{\partial \lambda} + \frac{\partial G}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial G}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial \lambda} \quad (\lambda = \lambda_0, \alpha = 0).$$

Отметим, что  $\partial G/\partial p_1 = 0, \partial G/\partial p_2 = 0$  ( $\lambda = \lambda_0, \alpha = 0$ ). Это определяется путем исследования задач Коши, которые получаются дифференцированием задачи (3.4), (3.5) по параметрам  $p_1, p_2$ . Дифференцируя (3.4), (3.5) по  $\lambda$  и устремляя  $\lambda \rightarrow \lambda_0, \alpha \rightarrow 0$ , выводим задачу Коши для  $G_\lambda \equiv \partial G/\partial \lambda$ :

$$K_0 G_\lambda = 2\lambda_0(\Phi'_{0\lambda} G - \Phi_{0\lambda} G') + 2(\Phi'_0 \varphi - \Phi_0 \varphi'), \quad G_\lambda = 0, \quad G'_\lambda = 0 \quad (\xi = 0).$$

Функция  $\Phi_{0\lambda}$  определяется из краевой задачи

$$L_0 \Phi_{0\lambda} - \lambda_0 q_{0\lambda} = \Phi_0'^2 - 2\Phi_0 \Phi_0'' + q_0, \quad q'_{0\lambda} = 0, \\ \Phi_{0\lambda} = 0, \quad \Phi''_{0\lambda} = 0 \quad (\xi = 0), \quad \Phi_{0\lambda} = \Phi'_{0\lambda} = 0 \quad (\xi = 1).$$

Численный расчет приводит к значениям  $q_{0\lambda} = 0,0108, \Phi'_{0\lambda}(0) = -0,0024, G_\lambda(1) = -0,1629$ . Таким образом,  $b_\lambda = G_\lambda(1, \lambda_0, 0) = -0,1629$ .

Отметим, что в соотношении (3.8)  $b_\alpha = 0$ . Это устанавливается при исследовании задач Коши для производных  $\partial G/\partial \alpha, \partial G/\partial p_1, \partial G/\partial p_2$ .

Определим коэффициент  $b_{\alpha\alpha}$  в (3.8), учитывая, что  $b_{\alpha\alpha} = G_{\alpha\alpha}$  при  $\lambda = \lambda_0$ ,  $\alpha = 0$ . Функция  $G_{\alpha\alpha}$  находится при численном решении задачи Коши

$$K_0 G_{\alpha\alpha} = 4\lambda_0(f'_\alpha\varphi - f_\alpha\varphi') \quad (\lambda = \lambda_0, \alpha = 0), \quad G_{\alpha\alpha} = 0, \quad G'_{\alpha\alpha} = 0 \quad (\xi = 0).$$

Краевая задача для  $f_\alpha$  получается путем замены в (3.1) функций  $f_1, q_1$  соответственно на  $f_\alpha$  и  $Q_\alpha + \varphi^2$ . Численный расчет приводит к значению  $G_{\alpha\alpha} = 6,6987$  ( $\xi = 1, \lambda = \lambda_0, \alpha = 0$ ).

Используя диаграмму Ньютона [5], из уравнения разветвления (3.8) находим параметр  $\alpha$ :

$$\alpha = \pm(2b_\lambda b_{\alpha\alpha}^{-1}(\lambda_0 - \lambda))^{1/2} + \dots \quad (\lambda \rightarrow \lambda_0).$$

Отсюда следует, что в точке  $\lambda = \lambda_0$  от решения  $\Phi_0, q_0$  ответвляется два симметричных решения, отличающихся друг от друга только направлением окружной компоненты скорости и существующих при всех  $h > h_0 = 2,2388$  ( $\lambda > \lambda_0$ ).

Построим асимптотику ответвившихся решений при  $\lambda \rightarrow \lambda_0$ . Вводя малый параметр  $\varepsilon_1 = (\lambda - \lambda_0)^{1/2}$ , представим решение задачи (2.1) в виде рядов

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_{00}(\xi) + \varepsilon_1 F_1 + \varepsilon_1^2(\Phi_{02} + F_2) + \dots, \\ g &= \varepsilon_1 G_1 + \varepsilon_1^2 G_2 + \varepsilon_1^3 G_3 + \dots, \quad q = q_{00} + \varepsilon_1 Q_1 + \varepsilon_1^2(q_{02} + Q_2) + \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

Отметим, что здесь использовано представление функций  $\Phi_0(\xi, \lambda), q_0(\lambda)$  в виде рядов по степеням параметра  $\varepsilon_1$ , причем коэффициенты этих рядов находятся из соотношений  $\Phi_{00} = \Phi_0(\xi, \lambda_0), q_{00} = q_0(\lambda_0), \Phi_{02} = \partial\Phi_0/\partial\lambda, q_{02} = \partial q_0/\partial\lambda$  ( $\lambda = \lambda_0$ ).

Ряды (3.9) подставляем в систему (2.1) и приравниваем к нулю коэффициенты при  $\varepsilon_1, \varepsilon_1^2, \dots$ . Для  $F_1, G_1, Q_1$  выводим задачу на собственные значения, которая получается из (3.1) заменой функций  $f_1, g_1, q_1$  соответственно на  $F_1, G_1, Q_1$ . Решение последней задачи получается в виде  $F_1 = Q_1 = 0, G_1 = c_1\varphi(\xi)$ , где  $\varphi$  — нормированная собственная функция, найденная выше, а  $c_1$  — постоянная, которая определяется из условий разрешимости краевой задачи в третьем приближении. Теперь выводим краевые задачи для функций  $F_2, G_2, Q_2$ :

$$\begin{aligned} L_0 F_2 &= \lambda_0(Q_2^2 - G_2^2), & K_0 G_2 &= 0, & Q_2' &= 0, \\ F_2 &= F_2'' = G_2' = 0 \quad (\xi = 0), & F_2 &= F_2' = G_2 = 0 \quad (\xi = 1). \end{aligned}$$

Численный расчет приводит к значениям  $Q_2 = 0,7183c_1^2, F_2'(0) = 0,3629c_1^2$ . Для  $G_2$  получаем  $G_2 = c_2\varphi$ , где постоянная  $c_2$  определяется при исследовании условий разрешимости краевых задач в четвертом приближении. Выписывая краевую задачу для функции  $G_3$  и выполняя условие ее разрешимости, находим постоянную  $c_1$ :

$$\begin{aligned} c_1^2 &= -I_1/I_2, & I_2 &= \lambda_0 \int_0^1 \varphi_*(\tilde{F}_2'\varphi - \tilde{F}_2\varphi') d\xi, \\ I_1 &= \int_0^1 \varphi_*(\Phi'_{00}\varphi - \Phi_{00}\varphi' + \lambda_0\Phi'_{02}\varphi - \lambda_0\Phi_{02}\varphi') d\xi. \end{aligned}$$

Здесь  $\tilde{F}_2 = F_2 c_1^{-2}$ , а  $\varphi_*$  определяется из краевой задачи  $K_*\varphi_* = 0, \varphi'_*(0) = \varphi_*(1) = 0$ , где  $K_* = D^2 - 2\lambda_0(2\Phi'_{00}I + \Phi_{00}D)$  — оператор, сопряженный с  $K_0$ . В результате численного расчета находим значение постоянной  $c_1^2 = 0,0486$ .

Для конечных значений разности  $\lambda - \lambda_0$  (при всех  $\lambda > \lambda_0$ ) ответвившиеся решения построены путем численного интегрирования системы (2.1). Отметим, что эти решения отличаются друг от друга только знаком функции  $g(\xi, \lambda)$ . Это означает, что одно ответвившееся решение получается из другого изменением направления окружной компоненты

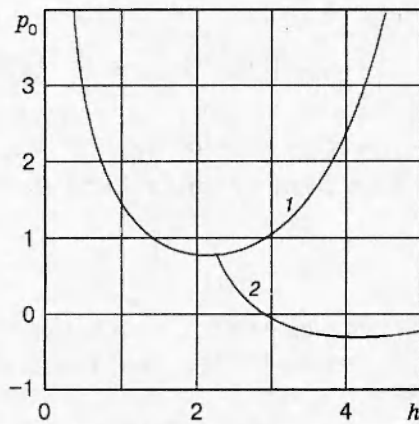


Рис. 1

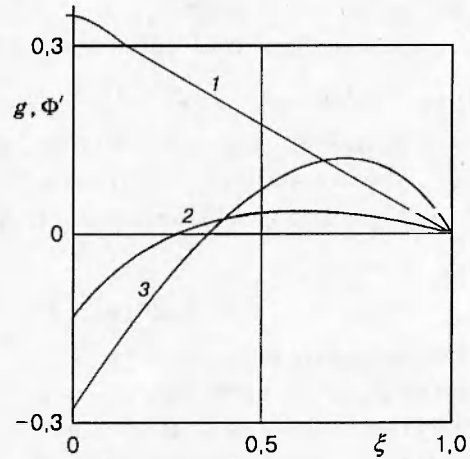


Рис. 2

скорости  $v_\theta$ , тогда как у «основного» решения  $v_\theta = 0$ . На рис. 1 кривой 2 показана зависимость  $p_0 = -qh^2$  от толщины слоя  $h$  для ответвившегося решения. На рис. 2 кривыми 1 и 2 представлены соответственно функции  $g(\xi)$  и  $\Phi'(\xi)$  также для ответвившихся решений, а кривая 3 — график  $\Phi'(\xi)$  для «основного» решения ( $g = 0$ ) при  $\lambda = 27$ , что соответствует  $h = 3$ . Очевидно, что радиальная компонента скорости один раз изменяет свое направление внутри слоя, а окружная компонента, монотонно убывая от свободной границы к твердой стенке, сохраняет свое направление.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Батищев В. А. Автономные решения, описывающие термокапиллярные течения жидкости в вязких слоях // Прикл. математика и механика. 1991. Т. 55, вып. 3. С. 389–395.
2. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Т. 2.
3. Пухначев В. В. Групповой анализ уравнений нестационарного пограничного слоя Маранго-ни // Докл. АН СССР. 1984. Т. 229, № 5. С. 1061–1064.
4. Келлер Дж. Б., Антман С. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. М.: Мир, 1974.
5. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.

Поступила в редакцию 30/VI 1997 г.