ния газа. Из фиг. 1, 2 видно, что, несмотря на качественное соответствие картин движения воздуха, имеют место существенные количественные отличия, обусловленные учетом зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры. Учет данной зависимости приводит к росту влияния на движение сил вязкости в области повышенной температуры газа и уменьшению скорости всплывания термика, при этом соответственно замедляется и процесс трансформации шарового объема, заполненного нагретым газом, в вихревое кольцо.

Проведенные расчеты свидетельствуют о существенном влиянии величины вязкости на процесс конвективного всплывания нагретой массы воздуха и на скорость образования кольцевого вихря. При численном моделировании конвективного движения масс нагретого воздуха необходим конкретный учет зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности среды от температуры.

Авторы благодарят участников семинара под руководством Е. Е. Ловецкого за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977.
2. **Онуфриев А. Т.** Теория движения вихревого кольца под действием силы тяжести. Подъем облака атомного взрыва.— ПМТФ, 1967, № 2.
3. **Глаголева Ю. П., Жмайло В. А., Мальнаков В. Д. и др.** Образование кольцевого вихря при всплывании легкого газа в тяжелом.— ЧММСС, 1978, т. 5, № 1.
4. **Андрущенко В. А.** Образование кольцевого вихря при подъеме нагретой массы воздуха в стратифицированной атмосфере.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 2.
5. **Махвиладзе Г. М., Щербак С. Б.** Численный расчет газодинамических процессов, сопровождающих горение конденсированных веществ.— ФГВ, 1981, № 4.
6. **Махвиладзе Г. М., Николова И. П.** Численное моделирование развития очага горения в закрытом сосуде в условиях естественной конвекции.— ФГВ, 1982, № 5.
7. **Махвиладзе Г. М., Мелихов О. И.** Движение облака нагретых частиц над горизонтальной поверхностью в поле внешней силы.— ПМТФ, 1983, № 5.
8. **Заславский Б. И.** О начальной стадии развития термика.— ПМТФ, 1982, № 6.
9. **Заславский Б. И., Юрьев Б. В.** Экспериментальное исследование процесса трансформации свободного шарообразного объема легкого газа в вихревое кольцо.— Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1983, вып. 2, № 8.
10. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
11. **Ковеня В. М., Яненко Н. Н.** Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981.
12. **Махвиладзе Г. И., Щербак С. Б.** Численный метод исследования нестационарных пространственных движений сжимаемого газа.— ИФЖ, 1980, т. 38, № 3.

Поступила 30/III 1984 г.

УДК 532.526

ВЛИЯНИЕ СИЛ ПЛАВУЧЕСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ВБЛИЗИ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

В. А. Батищев

(Ростов-на-Дону)

В [1] построены формальные асимптотические разложения течений однородной жидкости со свободной границей при исчезающей вязкости. В данной работе построены главные члены асимптотики течения неоднородной несжимаемой жидкости и показано, что влияние сил плавучести приводит к передаче возмущений вверх по потоку и наличию колебаний профиля скорости в пограничном слое вблизи свободной границы.

Для уравнений Навье — Стокса при больших числах Рейнольдса рассматривается плоская стационарная задача о движении жидкости в области D, ограниченной свободной поверхностью Γ и непроницаемой стенкой S. Предполагается, что жидкость несжимаема, стратифицирована по плотности и диффузия плотности в ней отсутствует. Для рассматриваемой модели уравнения движения принимают вид [2]

$$(1)\qquad \rho(\mathbf{v}, \nabla)\,\mathbf{v} = -\nabla p + \varepsilon^2\Delta\mathbf{v} - \rho\cdot\mathbf{e}_z\cdot \mathrm{F}^{-1}, \quad \mathbf{v}\cdot\nabla\rho = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0,$$

$$p\cdot\mathbf{n} - 2\varepsilon^2\Pi\cdot\mathbf{n} = \mathbf{T}, \quad \mathbf{v}\cdot\nabla f_1 = 0, \quad (x, z)\in\Gamma, \quad \mathbf{v}\,|_s = 0.$$

В случае, если область D не ограничена по координате x, считаем, что задано условие периодичности либо задано поведение поля скоростей при $|x|\to\infty$. Все величины в (1) безразмерны; динамический коэффициент вязкости μ принят постоянным; $\varepsilon^2 = 1/\mathrm{Re}$ — малый параметр; $\mathrm{Re} = U_1L\rho_*\mu^{-1}$ — число Рейнольдса; $\mathrm{F} = U_1^2/(gL)$ — число Фруда; g — ускорение силы тяжести; U_1, L, ρ_* — характерные размеры скорости, длины, плотности; ось z направлена вертикально вверх; $\mathbf{e}_z = (0, 1)$ — орт оси z; $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к свободной границе; $f_1(x, z) = 0$ — уравнение Γ в неявной форме; Π — тензор скоростей деформации; $\mathbf{T} = (T_1, T_2)$ — заданная нагрузка на Γ; причем $T_1 = \mathbf{T}\cdot\mathbf{n} = 0$, что соответствует отсутствию нормальных напряжений на Γ. Предполагается, что $T_2 = O(\varepsilon^2)$, где T_2 — касательное напряжение на Γ. Введем функцию тока ψ ($v_x = \partial\psi/\partial z$, $v_z = -\partial\psi/\partial x$). Отметим, что в случае конечной глубины рассматривается задача с условием периодичности по координате x для $\mathbf{v}$, p, $\mathbf{T}$.

Асимптотические разложения решения задачи (1) при исчезающей вязкости $\varepsilon\to 0$ строятся в виде

$$(2)\qquad \psi\sim\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k(\psi_k+\Psi_k+\Phi_k), \quad \rho\sim\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k\left(\rho_k+R_k+\tilde{r}_k\right), \quad \zeta\sim\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^k\zeta_k,$$

где $z = \zeta(x)$ — уравнение свободной границы. Аналогичный ряд строится для функции p с коэффициентами p_k, q_k, χ_k. При исчезающей вязкости вблизи границ области формируются пограничные слои. Обозначим через D_S и D_Γ области пограничных слоев соответственно вблизи твердой границы S и свободной поверхности Γ. Тогда Ψ_k, R_k, q_k — функции типа решений задачи пограничного слоя в D_Γ, а Φ_k, $\tilde{r}_k$, χ_k — в D_S. Функции ψ_k, ρ_k, p_k определяют решение вне D_Γ. Далее предполагается, что в области D_Γ число Фруда имеет порядок $O(\varepsilon^2)$, т. е. $\mathrm{F} = \lambda\varepsilon^2$, $\lambda = O(1)$. В этом случае проявляется действие сил плавучести в D_Γ. Всюду вне области D_Γ число F принимает конечное значение F_0. Отметим, что значениям $\mathrm{F} = O(\varepsilon^2)$ в D_Γ отвечают малые скорости потока вблизи свободной поверхности. Такие случаи встречаются в экваториальной зоне океана [3], где на глубине вблизи термоклина имеются мощные «подповерхностные» течения, ориентированные вдоль экватора на восток, а вблизи поверхности океана формируются обратные течения с существенно меньшими скоростями, направленные на запад по направлению ветра. Кроме того, торможение потока вблизи свободной поверхности и образование противотечений могут возникать при пространственной неравномерности касательного напряжения [4].

Главные члены асимптотики ψ_0, ρ_0 находятся из решения задачи о течении невязкой жидкости в области D_0 со свободной границей Γ_0. Функции ψ_0, ρ_0 удовлетворяют системе

$$(3)\quad \rho_0 J(\Delta\psi_0, \psi_0) + \frac{\partial\rho_0}{\partial z}J\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial z}, \psi_0\right) + \frac{\partial\rho_0}{\partial x}J\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial x}, \psi_0\right) = \mathrm{F}_0^{-1}\frac{\partial\rho_0}{\partial x}, \ J(\rho_0, \psi_0) = 0$$

с краевыми условиями

$$p_0 = \psi_0 = 0, \ (x, z)\in\Gamma_0, \ \mathbf{v}_0\cdot\mathbf{n}_1|_s = 0$$

и соответствующими условиями по x. Здесь $J(A, B) = (\partial A/\partial x)(\partial B/\partial z) - (\partial A/\partial z)(\partial B/\partial x)$; $\mathbf{n}_1$ — вектор нормали к S. Из (3) следует, что $\rho_0 = f(\psi_0)$, где $f(\psi_0)$ — произвольная функция ψ_0. Далее предполагается, что решение задачи (3) известно.

Функции ψ_k, ρ_k $(k \geqslant 1)$ строятся с помощью первого итерационного процесса [5] и удовлетворяют линейным системам

$$
\sum_{i+j+n=k} \left[\rho_i J(\Delta\psi_j, \psi_n) + \frac{\partial\rho_i}{\partial z} J\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial z}, \psi_n\right) + \frac{\partial\rho_i}{\partial x} J\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial x}, \psi_n\right)\right] = \tag{4}
$$

$$
= \mathrm{F}_0^{-1} \frac{\partial\rho_k}{\partial x} + \Delta^2\psi_{k-2},
$$

$$
\sum_{i+j=k} J(\rho_i, \psi_j) = 0, \quad \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_1|_S = 0.
$$

Из (4) следует, что $\rho_1 = \psi_1 f'(\psi_0)$, $\rho_2 = \psi_2 f'(\psi_0) + 0{,}5\psi_1^2 f''(\psi_0)$ и т. д. Краевые условия на свободной границе для системы (4) будут даны ниже.

Теперь определим функции Ψ_k, R_k, которые сосредоточены вблизи свободной границы и компенсируют невязки, возникающие при выполнении динамического условия для касательного напряжения на Г. Вблизи Г введем локальные координаты (r, φ) по формулам

$$
x = X(\varphi) + rn_{x0}, \quad z = Z(\varphi) + rn_{z0},
$$

где r — расстояние точки (x, z) до Γ_0 — свободной границы невязкого течения (3); n_{x0}, n_{z0} — компоненты единичного вектора нормали к Γ_0; $x = X(\varphi)$, $z = Z(\varphi)$ — параметрическое уравнение контура Γ_0. Уравнения для Ψ_k, R_k находятся применением второго итерационного процесса [5] к системе (1). Подставляем (2) в (1), полученные уравнения записываем в локальных координатах и разлагаем известные коэффициенты в ряды Тейлора по степеням r. Полагаем $r = \varepsilon s$, $\mathrm{F} = \lambda\varepsilon^2$ для функций Ψ_k, R_k, и $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0$ для ψ_k, ρ_k. Приравнивая нулю коэффициенты при ε^0, $\varepsilon, \ldots, \varepsilon^N$, выводим уравнения для определения Ψ_k, R_k. Функция Ψ_0 удовлетворяет однородной краевой задаче, решение которой возьмем в виде $\Psi_0 = 0$. Аналогично $\Psi_1 = 0$. Функция Ψ_k $(k \geqslant 2)$ удовлетворяет задаче

$$
sa(\varphi)\frac{\partial^2\Psi_k}{\partial s^2} + b(\varphi)\frac{\partial^2\Psi_k}{\partial s\partial\varphi} - a(\varphi)\frac{\partial\Psi_k}{\partial s} = \frac{1}{\rho_0|_\Gamma}\frac{\partial^3\Psi_k}{\partial s^3} - \frac{f'(0)}{\lambda\rho_0|_\Gamma} n_{x0}\Psi_k + M_k, \tag{5}
$$

$$
\left.\frac{\partial^2\Psi_k}{\partial s^2}\right|_{s=0} = \left[\delta^{-2}\frac{\partial^2\psi_{k-2}}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial^2\psi_{k-2}}{\partial r^2} - \varkappa\frac{\partial\psi_{k-2}}{\partial r}\right]_{r=0} + N_k, \quad \Psi_k|_{s=\zeta_1} = Q_k,
$$

$$
\Psi_k|_{s=-\infty} = 0.
$$

Коэффициенты M_k, N_k, Q_k известны и не выписаны ввиду их громоздкости, а $M_2 = Q_2 = 0$, $N_2 = T_2(\varphi)$. Здесь

$$
a(\varphi) = \frac{\partial}{\partial r}[\mathbf{v}_0 \cdot \nabla r]_{r=0}; \quad b(\varphi) = \mathbf{v}_0 \cdot \nabla\varphi|_{r=0};
$$

$\varkappa$ и δ — кривизна и коэффициент Ламэ контура Γ_0. Краевое условие $\Psi_k|_{s=\zeta_1} = Q_k$ получается применением второго итерационного процесса к кинематическому условию на Г.

Рассмотрим случай, когда свободная граница невязкого течения Γ_0 прямолинейна $(z = 0)$. Теперь $n_{x0} = 0$, $n_{z0} = 1$. Применяя второй итерационный процесс к (1), выводим краевую задачу для Ψ_k

$$
sa(x)\frac{\partial^3\Psi_k}{\partial s^3} + b(x)\frac{\partial^3\Psi_k}{\partial x\partial s^2} = \frac{1}{\rho_0|_\Gamma}\frac{\partial^4\Psi_k}{\partial s^4} + \beta\frac{\partial\Psi_k}{\partial x} + \widetilde{M}_k, \tag{6}
$$

$$
\left.\frac{\partial^2\Psi_k}{\partial s^2}\right|_{s=0} = \frac{\partial^2\psi_{k-2}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi_{k-2}}{\partial x^2} + \widetilde{N}_k, \quad \Psi_k|_{s=\zeta_1} = \widetilde{Q}_k, \quad \Psi_k = \frac{\partial\Psi_k}{\partial s} = 0 \ (s = -\infty),
$$

где $\beta = \lambda^{-1}f'(0)/\rho_0|_\Gamma$; $f'(0) = (\partial\rho_0/\partial z)/v_{x0}|_{z=0}$; $\widetilde{M}_2 = \widetilde{Q}_2 = 0$, $\widetilde{N}_2 = T_2(x)$; $a(x) = [\partial v_{z0}/\partial z]_{z=0}$; $b(x) = v_{x0}|_{z=0}$; $s = z/\varepsilon$.

Определим краевые условия для системы (4) на свободной границе Г. Запишем уравнение Г в виде $r = \zeta(\varphi) = \varepsilon\zeta_1(\varphi) + \varepsilon^2\zeta_2(\varphi) + \ldots$ (здесь учтено, что $r = 0$ — уравнение Г при $\varepsilon = 0$). Применяя одновременно первый и второй итерационные процессы к кинематическому условию, динамическому условию для нормального напряжения и учитывая условие $\Psi_k = Q_k(s = \zeta_1)$, выводим соотношения

$$\zeta_k \frac{\partial \psi_0}{\partial r}\bigg|_{r=0} + \psi_k|_{r=0} = E_k, \quad p_k + q_k + \zeta_k \frac{\partial p_0}{\partial r} + \frac{2}{\delta}\frac{\partial^2 \psi_{k-2}}{\partial r \partial \varphi} - \frac{2\varkappa}{\delta}\frac{\partial \psi_{k-2}}{\partial \varphi} = \tilde{G}_k \ (r=0),$$

где $k \geqslant 1$; $E_1 = \tilde{G}_1 = \psi_{-1} = 0$.

Функции пограничного слоя Φ_k, r_k, χ_k проявляют себя в области D_S и компенсируют невязки, возникающие при выполнении условий прилипания в (1). Функция Φ_0 удовлетворяет однородной краевой задаче, решение которой берется в виде $\Phi_0 = 0$. В случае $\mathrm{F} = O(1)$ в D_S для Φ_1 получаем нелинейную задачу, которая, как и в [1], приводится к уравнениям пограничного слоя Прандтля однородной жидкости. Пусть $\mathrm{F} = \lambda_1 \varepsilon$ в D_S. Теперь для определения Φ_1 применяем метод пограничного слоя так же, как и при выводе (5). Введем (r_1, φ_1) — локальные ортогональные координаты в окрестности границы S. Задача для $\Phi_1(\xi, \varphi_1)$ имеет вид

$$\frac{1}{\delta_1}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} + b_1\right)\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi \partial \varphi_1} + \left(-\frac{1}{\delta_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_1} + \delta_1 a_1\right)\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} - a_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} = \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \xi^3} - \frac{f'(0)}{\lambda_1 \rho_0|_\Gamma} n_{x1}\Phi_1,$$

$$\Phi_1|_{\xi=0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} = -\frac{\partial \psi_0}{\partial r_1}\bigg|_{r_1=0}, \quad \Phi_1|_{\xi=\infty} = 0,$$

где $\xi = r_1/\varepsilon$; $b_1(\varphi_1) = \partial\psi_0/\partial r_1 \ (r_1 = 0)$; $a_1 = -\delta_1^{-1}\partial^2\psi_0/\partial r_1 \partial \varphi_1 \ (r_1 = 0)$; δ_1 — коэффициент Ламэ контура S; $\mathbf{n}_1 = (n_{x1}, n_{z1})$.

Рассмотрим случай прямолинейной границы $S: z = -h$. Теперь действие сил плавучести проявляется в D_S при $\mathrm{F} = \lambda\varepsilon^2$. Уравнение пограничного слоя для Φ_1 получается в виде

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi_1} + v_{x0}|_S\right)\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x \partial \xi_1^2} + \left(-\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \xi\frac{\partial v_{z0}}{\partial z}\bigg|_S\right)\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \xi_1^3} = \frac{1}{\rho_0|_S}\frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \xi_1^4} + \beta_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x},$$

$$\Phi_1 = 0, \ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi_1} = -v_{x0} \quad (z = -h); \quad \Phi_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi_1} = 0 \quad (\xi_1 = \infty),$$

где $\beta_1 = \lambda^{-1} f'(0)/\rho_0|_S$; $\xi_1 = (z+h)/\varepsilon$.

Итак, при интегрировании системы (1) сначала определяется течение невязкой жидкости (3), далее — течение в пограничном слое D_S и первое приближение внешнего течения (4), а затем — течение в пограничном слое вблизи D_Γ. При отсутствии твердой границы после интегрирования системы (3) определяется течение в пограничном слое вблизи Γ.

Пример. Пусть течение невязкой жидкости задано полем скоростей $v_{x0} = U(z)$, $v_{z0} = 0$ и распределением плотности $\rho_0 = \rho_0(z)$. Область D_0 — полупространство $z \leqslant 0$, свободная граница Γ_0 прямолинейна. Касательное напряжение на Γ зададим по формуле $T_2(x) = -U'(0) + T_* e^{-\omega x}$ при $x > 0$ и $T_2(x) = -U'(0)$ при $x < 0$ $(\omega > 0)$. Задача о пограничном слое вблизи Γ принимает вид

$$\frac{\partial^4 \Psi_2}{\partial s^4} + \beta\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - U(0)\frac{\partial^3 \Psi_2}{\partial x \partial s^2} = 0, \tag{7}$$

$$\Psi_2|_{s=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial s^2}\bigg|_{s=0} = T_* e^{-\omega x} \quad (x > 0), \quad \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial s^2}\bigg|_{s=0} = 0 \quad (x < 0),$$

$$\Psi_2 = \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} = 0 \quad (s = -\infty).$$

Здесь учтено, что $\zeta_1 = 0$, $\rho_0(0) = 1$, $\beta = \lambda^{-1}\rho_0'(0)/U(0)$. Далее считаем, что задана устойчивая стратификация плотности $\rho_0'(0) < 0$ [2] и $U(0) > 0$, поэтому $\beta < 0$. Задача (7) решается с помощью преобразования Фурье по x. Решение Ψ_2 запишем как

$$\Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widetilde{T}(\sigma)}{\nu_1^2 - \nu_2^2} \left(e^{-\nu_1 s} - e^{-\nu_2 s}\right) e^{-i\sigma x} d\sigma, \tag{8}$$

где $\widetilde{T}(\sigma) = (\omega - i\sigma)^{-1}(2\pi)^{-1/2}$; ν_1 и ν_2 удовлетворяют уравнению $\nu^4 + i\sigma U(0)\nu^2 - i\sigma\beta = 0$ и имеют вид

$$\nu_{1,2} = \sqrt{\frac{U(0)}{2}} \sqrt{-i\sigma \pm \sqrt{-\sigma^2 + \frac{4i\sigma\beta}{U^2(0)}}},$$

причем берутся те ветви корней, для которых $\mathrm{Real}\,\nu_1 < 0$ и $\mathrm{Real}\,\nu_2 < 0$. Интеграл (8) вычисляется с помощью теории вычетов, при $x > 0$ выбирается область интегрирования G в нижней полуплоскости $\mathrm{Real}\,\sigma \leqslant 0$, ограниченная полуокружностью большого радиуса R с центром в начале координат, полуокружностью бесконечно малого радиуса δ_0 с тем же центром и отрезками действительной оси σ $(-R, -\delta_0)$, (δ_0, R). Аналитически продолжая подынтегральную функцию в $\overline{G}$, применяя теорему Коши о вычетах, лемму Жордана и устремляя $R \to \infty$, $\delta_0 \to 0$, находим

$$\Psi_2 = -\frac{2T_* e^{-\alpha s} \sin \gamma s}{U(0)\sqrt{\omega}\sqrt{\sigma_0 - \omega}} e^{-\omega x} \quad (x > 0), \tag{9}$$

где $\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{U(0)}\sqrt{\sqrt{\sigma_0\omega} - \omega}$; $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{U(0)}\sqrt{\omega + \sqrt{\sigma_0\omega}}$; $\sigma_0 = 4|\beta|U^{-2}(0)$ $(\sigma_0 > \omega)$.
При $x < 0$ также применяем теорему Коши, учитывая, что $\sigma = 0$ — точка ветвления. Вводим область интегрирования G_1 в верхней полуплоскости $\mathrm{Real}\,\sigma \geqslant 0$, ограниченную полуокружностями радиусов R и δ_0 с разрезом вдоль мнимой полуоси от точки $\sigma = 0$. В результате интегрирования по G_1 и перехода к пределу при $R \to \infty$, $\delta_0 \to 0$ получим

$$\Psi_2 = -\frac{1}{\pi U(0)} \int_0^{\infty} \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{U(0)}{2}}\sqrt{\sqrt{\xi(\sigma_0 + \xi)} - \xi}\right)s}{U(0)(\omega + \xi)\sqrt{\xi(\sigma_0 + \xi)}} e^{\xi x} d\xi \quad (x < 0). \tag{10}$$

При $x \to -\infty$ и фиксированном s интеграл (10) имеет асимптотическое представление [6]

$$\Psi_2 = \frac{1{,}226}{\pi\omega\sigma_0^{1/4}\sqrt{2U(0)}} \frac{s}{(-x)^{3/4}} + o\left(\frac{1}{(-x)^{3/4}}\right).$$

Из формул (9), (10) следует, что профиль скорости в пограничном слое осциллирует по координате z.

Заметим, что если $F = O(1)$ в области пограничного слоя D_Γ, то в уравнении (7) надо положить $\beta = 0$. Уравнение (7) легко решается с помощью преобразования Лапласа. Теперь функция $\Psi_2(x, s)$ монотонна по s и $\Psi_2 = 0$ при $x < 0$, т. е. возмущения не передаются вверх по потоку. Таким образом, действие сил плавучести приводит к передаче возмущений вверх по потоку и наличию колебаний по координате z в профиле скорости в пограничном слое вблизи свободной границы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Батищев В. А.** Об асимптотике течений жидкости со свободной границей при исчезающей вязкости.— ПМТФ, 1980, № 1.
2. **Океанология.** Физика океана. Т. 1. Гидрофизика океана/Под ред. В. М. Каменковича, А. С. Монина. М.: Наука, 1978.
3. **Океанология.** Физика океана. Т. 2. Гидродинамика океана/Под ред. В. М. Каменковича, А. С. Монина. М.: Наука, 1978.

4. **Штокман В. Б.** Избранные труды по физике моря. Л.: Гидрометеоиздат, 1970.
5. **Вишик М. И., Люстерник Л. А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— Успехи мат. наук, 1957, т. 12, № 5(77).
6. **Олвер Ф.** Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978.

Поступила 28/II 1984 г.

УДК 532.517

О РЕЗОНАНСНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

М. Б. Зельман, И. И. Масленникова

(Новосибирск)

Изучение механизмов нелинейного развития возмущений представляет важную задачу теории перехода к турбулентности.

В эксперименте [1] обнаружен субгармонический режим перехода, особенностями которого являются быстрое возбуждение субгармоники задающей частоты, заполнение низкочастотного спектра и формирование пространственного распределения уже при малых амплитудах возмущений. Некоторые особенности начальной стадии такого процесса могут быть объяснены [2] усилением волн Толлмина — Шлихтинга в симметричных триплетах крайковского типа [3]. Механизм их развития — волновой резонанс. Полученные экспериментальные [4—6] и теоретические [7—12] данные подтверждают связь субгармонического перехода с эволюцией синхронизированных возмущений.

В известных моделях рассматриваются параметрическая неустойчивость пары пространственных волн в поле заданной двумерной волны [9, 10], ветвление автоколебательных триплетных состояний [8], нелинейная эволюция резонансных волн Толлмина — Шлихтинга [2, 3, 7, 11], но они ограничены анализом симметричных относительно направления основного движения конфигураций.

Цель данной работы — изучение взаимодействия возмущений в несимметричных триплетах, их роли в формировании пространственной структуры и спектра начальной стадии перехода и интерпретация экспериментальных данных.

Элементарной моделью для такого изучения является изолированный триплет волн Толлмина — Шлихтинга. В первом нелинейном приближении слабонелинейной теории поле возмущений потока может быть выражено через функцию тока

$$\psi(x, y, t, z) = \sum_{j=1}^{m} A_j \varphi_j e^{i\theta_j(x,t,z)}, \tag{1}$$

где $\theta_j = -\omega_j t + \int \alpha_j dx + \beta_j z$; $\varphi_j(y)$ и дисперсионное соотношение $\omega_j + i\gamma_j = \Omega(\alpha_j, \beta_j)$ определяются локально-параллельной задачей Орра — Зоммерфельда, а комплексная амплитуда $A_j(x) = A_j^0 e^{\gamma_j t}$ удовлетворяет системе (при $m = 3$) нелинейных уравнений [2]. В условиях стационарности и трансверсальной (по оси z) однородности $\frac{\partial}{\partial t} A_j^0 = \frac{\partial}{\partial z} A_j^0 = 0$ такая система принимает вид

$$\left(v_1 \frac{\partial}{\partial x} - \gamma_1\right) b_1 = S_1 b_2 b_3, \quad \left(v_{2,3} \frac{\partial}{\partial x} - \gamma_{2,3} - i\Delta\theta_{2,3}\right) b_{2,3} = S_{2,3} b_1 b_{3,2}^*, \tag{2}$$
$$b_{j0} = b_j(x_0) = a_j(x_0) \exp(i\Phi_j(x_0)),$$

где $\Delta\theta_{2,3} = -(1/2)(\Delta\omega - v_{2,3}\Delta\alpha - w_{2,3}\Delta\beta)$; $\Delta(\omega, \alpha, \beta) = (\omega, \alpha, \beta)_1 - (\omega, \alpha, \beta)_2 - (\omega, \alpha, \beta)_3$; проведена замена $b_1 = A_1$, $A_{2,3} = b_{2,3} \times \exp\left[(-i/2)\left(\Delta\omega t - \int \Delta\alpha dx - \Delta\beta z\right)\right]$.

Коэффициенты v_j, w_j, S_j строятся из решений однородного и неоднородного уравнений Орра — Зоммерфельда [2]. Расчеты данной работы проводились для возмущений в пограничном слое Блазиуса. Размерные z-компоненты волновых векторов и частоты оставались инвариантными,