УДК 624.131 + 532.529

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ВЯЗКИХ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕДАХ

Г. М. Ляхов, В. Н. Охитин

(*Москва*)

Изучение волновых процессов в многокомпонентных средах (жидкость и водонасыщенный грунт с пузырьками газа, суспензии и др.) проводилось в работах [1—20] и др.

В [1] предполагалось, что пространство заполнено несколькими сплошными средами, каждая из которых соответствует компоненту среды. Исследовались взаимопроникающие движения этих сред (в общем случае каждая смещается со своей скоростью и давлением). В соответствии с моделью [2] многокомпонентная среда рассматривалась как однородная сплошная среда с уравнением сжимаемости, учитывающим сжимаемость и содержание компонентов, которые находятся в равновесном состоянии. В [3] многокомпонентная среда рассматривалась как однородная, сжимаемость газообразного компонента определялась адиабатой Гюгонио. Отражение плоской волны от твердой преграды при разных углах падения на основе [2] с помощью ЭВМ исследовано в [4]. Задача о распространении волны, создаваемой взрывом сферического заряда ВВ, на основе модели [2] решена с помощью ЭВМ в [5]. В [6] предложена модель однородной среды, аналогичная [2], получены решения задач о прохождении волны через слой воды с пузырьками газа и об отражении ее от неподвижной границы. Особенности структуры волн в воде с пузырьками газа и влияние вязкостной диссипации, связанной с движением пузырьков относительно жидкости, рассмотрены в [7]. В модели [8] пульсация пузырьков принята соответствующей уравнению Ламба, т. е. учитывается неравновесие между фазами. Случай сильных ударных волн на основе [8] рассмотрен в [9]. В [10, 11] показано, что в жидкости с пузырьками газа при определенных соотношениях между вязкостью, нагрузкой и радиусом пузырька формируется волна с осцилляторной структурой. В [12] на основе модели [13] исследована структура волны с учетом осцилляций. Уравнения механики двухскоростной, двухтемпературной среды с двумя давлениями предложены в [14]. В [15] на основе [14] исследована структура стационарной волны с учетом теплопроводности. Показано, что характер пульсации существенно зависит от межфазного теплообмена. Отмечено, что опыты [11] следует анализировать с учетом изменения структуры во времени. Опытами [16] установлено, что увеличение интенсивности волны приводит к увеличению частоты и амплитуды колебаний на фронте, а увеличение диаметра пузырька — к уменьшению частоты и увеличению амплитуды. Рассмотрены слабые волны. В [17] получены численные решения, позволяющие определить амплитудные осцилляции на фронте волны, скорость ее распространения и время установления стационарной структуры. Волны в насыщенных водой горных породах рассматривались в [18]. Получено уравнение, описывающее слабые продольные волны с учетом инерционной релаксации. В [19] исследовалось влияние поверхностного натяжения. В [20] модель [2] усовершенствована введением нелинейных диаграмм динамического и статического сжатия многокомпонентной среды, что позволяет ввести объемную вязкость. Несколько иначе учитывается влияние вязкости в [21].

Ниже, на основе [20], получено решение задачи о распространении плоской волны, создаваемой ударной стационарной нагрузкой в многокомпонентной среде. Решение выполнено с помощью ЭВМ методом характеристик, применявшихся к средам без вязкости [5, 20, 22], а также приближенным аналитическим методом.

1. Модель среды, метод численного решения. Воспользуемся моделью [20]. При начальном (атмосферном) давлении α_1, α_2, α_3 — содержание по объему газообразного, жидкого и твердого компонентов; V_{10}, V_{20}, V_{30} — удельный объем; ρ_{10}, ρ_{20}, ρ_{30} — плотность; c_{10}, c_{20}, c_{30} — скорость звука в каждом из них; ρ_0 — плотность среды; V_0 — удельный объем

$$\rho_0 = 1/V_0 = \alpha_1\rho_{10} + \alpha_2\rho_{20} + \alpha_3\rho_{30}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1.$$

При давлении p объем, плотность и скорость звука — V_1, V_2, V_3, ρ_1, ρ_2, ρ_3, c_1 c_2, c_3 соответственно, плотность среды ρ, ее удельный объем V.

Примем, что в свободном состоянии компоненты сжимаются по уравнениям

$$p = p_0 (\rho_1/\rho_{10})^{\gamma_1} \text{ — газообразный,}$$
$$(1.1)\qquad p = p_0 + \frac{\rho_{20}c_{20}^2}{\gamma_2}\left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_{20}}\right)^{\gamma_2} - 1\right] \text{ — жидкий,}$$
$$p = p_0 + \frac{\rho_{30}c_{30}^2}{\gamma_3}\left[\left(\frac{\rho_3}{\rho_{30}}\right)^{\gamma_3} - 1\right] \text{ — твердый.}$$

Первое уравнение в (1.1) приводится к виду уравнения Тэта. Поэтому для всех компонентов

$$(1.2)\qquad p = p_0 + \frac{\rho_{i0}c_{i0}^2}{\gamma_i}\left[\left(\frac{V_{i0}}{V_i}\right)^{\gamma_i} - 1\right],\ i = 1, 2, 3,\ p_0 = \frac{\rho_{10}c_{10}^2}{\gamma_1}.$$

Газообразный компонент содержится в виде мелких пузырьков. Сжатие пузырьков газа, изолированных друг от друга остальными компонентами, при прохождении волны протекает не мгновенно, а в конечное время — при смещении остальных компонентов и заполнения ими начального объема пузырьков. Поэтому в соответствии с [20] принимается, что сжатие газа в среде вместо (1.2) подчиняется уравнению

$$(1.3)\qquad p = p_0 + \frac{\rho_{10}c_{10}^2}{\gamma_1}\left[\left(\frac{V_1}{V_{10}}\right)^{-\gamma_1} - 1\right] - \eta\frac{\dot V_1}{V_{10}},$$

где η — коэффициент объемной вязкости среды.

Остальные компоненты сжимаются по тем же уравнениям, что и в свободном состоянии.

Уравнение сжимаемости трехкомпонентной среды при этих предпосылках принимает вид

$$(1.4)\qquad \frac{\dot V}{V_0} = \varphi(p)\,\dot p - \frac{\alpha_1}{\eta}\psi(p, V),$$

где

$$\varphi(p) = -\sum_{i=2}^{3}\frac{\alpha_i}{\rho_{i0}c_{i0}^2}\left[\frac{\gamma_i(p-p_0)}{\rho_{i0}c_{i0}^2} + 1\right]^{-(1+\gamma_i)/\gamma_i};$$
$$\psi(p, V) = p - p_0\alpha_1^{\gamma_1}\left\{\frac{V}{V_0} - \sum_{i=2}^{3}\left[\frac{\gamma_i(p-p_0)}{\rho_{i0}c_{i0}^2} + 1\right]^{-1/\gamma_i}\right\}^{-\gamma_i}.$$

При $\dot V \to \infty$ и $\dot p \to \infty$ из (1.4) получим уравнение динамической сжимаемости среды

$$(1.5)\qquad \frac{V_D}{V_0} = \alpha_1 + \sum_{i=2}^{3}\alpha_i\left[\frac{\gamma_i(p-p_0)}{\rho_{i0}c_{i0}^2} + 1\right]^{-1/\gamma_i},\ \varphi(p) = \rho_0\frac{dV}{dp}.$$

При $\dot V \to 0$ и $\dot p \to 0$ получим уравнение статической сжимаемости среды

$$(1.6)\qquad \frac{V_s}{V_0} = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i\left[\frac{\gamma_i(p-p_0)}{\rho_{i0}c_{i0}^2} + 1\right]^{-1/\gamma_i}.$$

Последнее уравнение совпадает с уравнением сжимаемости модели [2], не учитывающей объемной вязкости. Модель [2] соответствует предельному равновесному состоянию среды, соответствующему статическому сжатию в модели [20].

Воспользуемся переменными Лагранжа: r — пространственная координата, t — время.

Найдем параметры волны, которая создается нагрузкой, заданной в начальном сечении $r = 0$ полупространства (или трубы, заполненной средой), возрастающей при $t = 0$ скачком до p_S, а затем сохраняющей это значение.

Основные уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \rho_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} = 0. \tag{1.7}$$

Система (1.7), замыкающая (1.4), гиперболического типа. Характеристические соотношения

$$\begin{gathered} dp \pm \left(\frac{\rho_0}{\varphi(p)}\right)^{1/2} du = \frac{\alpha_1 \psi(p, V)}{\eta \varphi(p)} dt \text{ при } \dot{r} = \pm(-\rho_0 \varphi(p))^{-1/2}; \\ dp - \frac{\rho_0}{\varphi(p)} dV = \frac{\alpha_1 \psi(p, V)}{\eta \varphi(p)} dt \text{ при } \dot{r} = 0. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Характеристики первого и второго семейств нелинейные.

Граничные условия в начальном сечении $r = 0$ и на скачке (фронте предвестника), где сжатие происходит по динамической диаграмме и вязкость не проявляется, имеют вид

$$p = p_0 \text{ при } t \leqslant 0, \; p = p_S \text{ при } t \geqslant 0,$$

$$p - p_0 = \rho_0 u D, \; (\rho - \rho_0) D = \rho u.$$

Решение проведено при помощи ЭВМ БЭСМ-6 для трех значений нагрузки $p_S/p_0 = 5000$, 1000 и 50 и шести сред, характеристики которых даны в табл. 1 (1—3 — водонасыщенный грунт, 4—6 — вода с пузырьками воздуха).

Таблица 1

Номер среды	α_1	α_2	α_3
1	0,01	0,39	0,6
2	0,02	0,38	0,6
3	0,04	0,36	0,6
4	0,01	0,99	0
5	0,04	0,96	0
6	0,10	0,90	0

В расчетах принято $\rho_{10} = 1{,}29$, $\rho_{20} = 10^3$, $\rho_{30} = 2{,}65 \cdot 10^3$ кг/м³, $c_{10} = 330$, $c_{20} = 1500$, $c_{30} = 5000$ м/с, $\gamma_1 = 1{,}4$, $\gamma_2 = 7$, $\gamma_3 = 4$.

В рассматриваемой задаче в плоскости r, t имеются четыре типа точек, в каждом из которых параметры рассчитываются по своим алгоритмам: на предвестнике, в областях нарастания и постоянного давления, в начальном сечении.

Рассмотрим последовательность расчета параметров в области нарастания давления. Пусть точки A, B, D лежат на одном временном слое, параметры в них известны, $r(A) < r(B) < r(D)$. Определяются параметры в точке C, лежащей на следующем временном слое и имеющей ту же пространственную координату, что и точка B. Шаг по времени Δt от слоя к слою меняется. Из точки C на предыдущий временной слой опускаются характеристики всех трех семейств. Их пересечение с линией AD обозначим L, B, M. Координаты точек L и M находятся из уравнений

$$r_L = r_C - [-\rho_0 \varphi(p)]_{CL}^{-1/2} \Delta t, \quad r_M = r_C + [-\rho \varphi(p)]_{CM}^{-1/2} \Delta t.$$

Индекс CL указывает, что величины в скобках принимаются средними между их значениями в точках C и L. В первом счете параметры в точке C берутся такими же, как в точке B. С помощью интерполяции по значениям параметров в точках A, B и D рассчитываются значения p, V

и u в точках L и M. Затем по найденным значениям определяются уточненные величины p, u, V в точке C

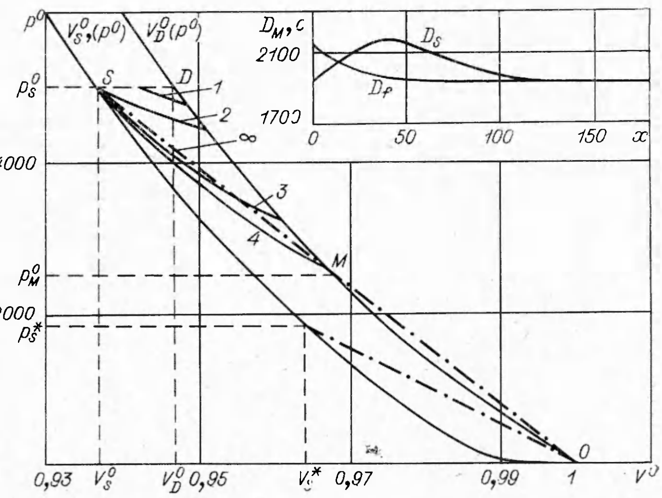
$$p_C - p_L = -[-\rho_0/\varphi(p)]^{1/2}_{CL}(u_C - u_L) - \frac{\alpha_1}{\eta}\left(\frac{\psi(p, V)}{\varphi(p)}\right)_{CL}\Delta t,$$

$$p_C - p_M = \left[-\frac{\rho_0}{\varphi(p)}\right]^{1/2}_{CM}(u_C - u_M) - \frac{\alpha_1}{\eta}\left(\frac{\psi(p, V)}{\varphi(p)}\right)_{CL}\Delta t,$$

$$p_C - p_B = -\left(\frac{\rho_0}{\varphi(p)}\right)_{CB}(V_C - V_B) - \frac{\alpha_1}{\eta}\left(\frac{\psi(p, V)}{\varphi(p)}\right)_{CB}\Delta t.$$

Уравнения соответствуют соотношениям, выполняющимся вдоль трех характеристик. Расчет повторяется заданное число раз. Аналогично проводится расчет параметров в остальных типах точек.

2. Результаты численного решения. На фиг. 1 приведены диаграммы динамического $V_D^0(p^0)$ и статического $V_S^0(p^0)$ сжатия среды 1 (см. табл. 1), построенные по уравнениям (1.5), (1.6). Здесь и в дальнейшем $p^0 = p/p_0$,



Фиг. 1

$V^0 = V/V_0$. При малых давлениях, когда сжимаемость среды определяется сжимаемостью воздуха, ход кривых существенно различен. Начиная с давлений порядка десятка атмосфер, воздух сжат до состояния, близкого к предельному, и ход кривых становится подобным, диаграмма $V_S^C(p^0)$ отклоняется от $V_D^0(p^0)$ на величину α_1.

Расчеты показывают, что в момент приложения нагрузки $t = 0$ от сечения $r = 0$ начинает распространяться ударный фронт (предвестник). Начальное давление на предвестнике $p_S^0 = 5 \cdot 10^3$, его скорость $D_f = \left[\left(p_S^0 - 1\right)p_0/\rho_0\left(1 - V_D^0\right)\right]^{1/2}$. С расстоянием величина скачка на предвестнике и его скорость убывают. За скачком следует область постепенного нарастания давления до p_S^0.

С течением времени состояние на предвестнике по кривой $V_D^0(p^0)$ переходит из точки D в точку M, а в начальном сечении из точки D в точку S. В области нарастания давления состояние определяется линиями *1* — ∞. Возрастание цифр соответствует возрастанию времени. Кривая *2* относится к моменту времени, когда состояние в начальном сечении достигает диаграммы статического сжатия. При этом от начального сечения начинает распространяться фронт области постоянного давления p_S^0 со скоростью $D_S < D_f$. Со временем D_f убывает, а D_S сначала растет, а потом убывает (см. фиг. 1). При $t \to \infty$ диаграмма состояния в области нарастания давления стремится к прямой OMS, давление на предвестнике — к p_M^0, скорость предвестника и фронта области постоянного давления и состояний между ними — к D_M (течение становится стационарным)

$$D_M = \left[(p_M^0 - 1)\, p_0/\rho_0\, (1 - V_M^0)\right]^{1/2}.$$

Введем безразмерное расстояние

$$x = Ar/3\eta; \tag{2.1}$$

$$A = \left(\frac{\alpha_2\rho_{20} + \alpha_3\rho_{30}}{1 - \alpha_1}\right)^{1/2} \left(\frac{\alpha_2}{\rho_{20}c_{20}^2} + \frac{\alpha_3}{\rho_{30}c_{30}^2}\right)^{-1/2} \tag{2.2}$$

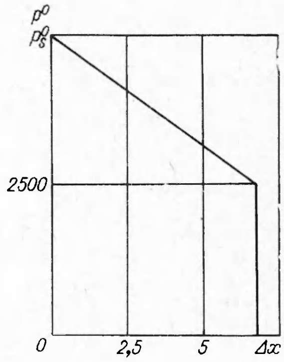
(A — акустическое сопротивление среды, окружающей пузырьки газа). Значения A, вычисленные по (2.2), даны в табл. 2. Пренебрегая массой воздуха по сравнению с массой других компонентов, при малых α_1 получим

$$A = \rho_0^{1/2} \left(\frac{\alpha_2}{\rho_{20}c_{20}^2} + \frac{\alpha_3}{\rho_{30}c_{30}^2}\right)^{-1/2}.$$

На фиг. 2 дано распределение давления для среды 1 при $p_S^0 = 5000$. Зависимость $p^0(x)$ близка к линейной. Протяженность области нарастания

Таблица 2

Номер среды	$A \cdot 10^{-6}$, кг/м²·с	p_S^*/p_0	$\eta \cdot 10^{-3}$, кг/м·с
1	3,28	1850	1,09
2	3,34	3000	1,11
3	3,39	4750	1,13
4	1,52	1250	0,51
5	1,53	2930	0,52
6	1,58	5420	0,53



Фиг. 2

давления $\Delta x = 6{,}8$, $p_M^0 \cong p_S^0/2$. Принимая в соответствии с [20] $\eta = 1{,}09 \times \times 10^3$ кг/м·с, получим размерную протяженность области нарастания давления $\Delta r = 6{,}8 \cdot 10^{-3}$ м и время нарастания в фиксированной точке среды $\Delta t = 3{,}5 \cdot 10^{-6}$ с. Время нарастания мало.

Рассмотренный случай, когда скачок на предвестнике уменьшается до конечного значения, возникает лишь при достаточно большой нагрузке $p_S^0 > p_S^*$. Если прямая OS (см. фиг. 1) не пересекает динамическую диаграмму еще в одной точке, то величина скачка на предвестнике в пределе стремится к нулю; p_S^* определяется из условия

$$p_S^* - 1 = -c_0^2\rho_0 (V_S^* - 1), \quad V_S^* = V_S^0(p_S^*); \tag{2.3}$$

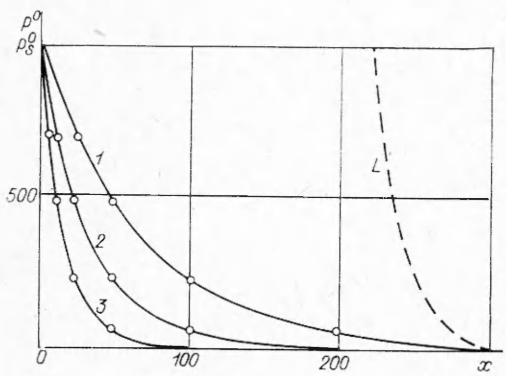
$$c_0^2\rho_0 = \left(\frac{\alpha_2}{\rho_{20}c_{20}^2} + \frac{\alpha_3}{\rho_{30}c_{30}^2}\right)^{-1}, \quad c_0\rho_0 \approx A. \tag{2.4}$$

Значения p_S^*, вычисленные по (2.3), (2.4), даны в табл. 2.

С увеличением содержания газообразного компонента p_S^* возрастает. В среде вода — воздух p_S^* меньше, чем в водонасыщенном грунте при том же значении α_1. Скорость предвестника стремится к скорости звука c_0. Для первой среды $c_0 = 1640$ м/с.

Зависимость давления на предвестнике от расстояния в водонасыщенных грунтах при $p_S^0 = 1000 < p_S^*$ представлена на фиг. 3, где нумерация сред табл. 1.

Кривая L определяет распределение давления в среде 1, когда предвестник достигает точки $x = 303$. Давление на предвестнике практически равно нулю. Протяженность области нарастания давления $\Delta x = 83$. При $\eta = 1{,}09 \cdot 10^3$ кг/м·с получим $r = 30{,}3 \cdot 10^{-2}$ м, $\Delta r = 8{,}3 \cdot 10^{-2}$ м. Время нарастания давления до максимума $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5}$ с еще мало. С уменьшением p_S^0 протяженность области нарастания давления растет. При увеличении содержания газообразного компонента интенсивность угасания на предвестнике возрастает.

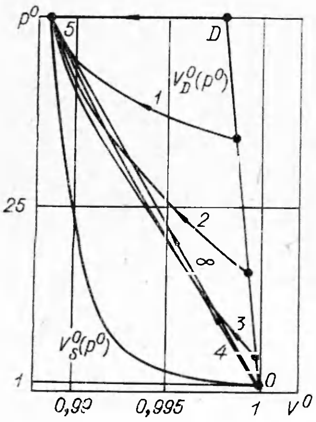


Фиг. 3

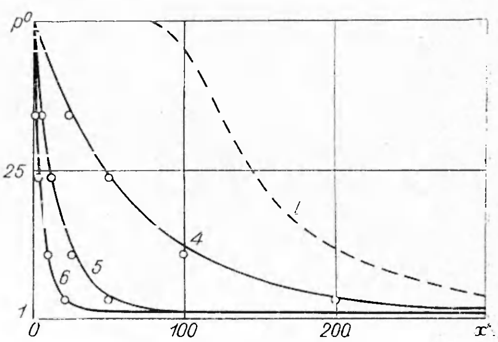
На фиг. 4 приведены диаграммы динамического $V_D^0(p^0)$ и статического $V_S^0(p^0)$ сжатия воды с пузырьками газа (среда 4), кривые $1 - \infty$ определяют изменение состояния в частицах среды при нарастании давления. Нумерация возрастает с удалением частиц от начального сечения. Кривые стремятся к прямой OS.

На фиг. 5 представлена зависимость давления на предвестнике от расстояния в среде вода — воздух при $p_S^0 = 50$. Нумерация кривых соответствует нумерации сред в табл. 1. Давление на предвестнике стремится к нулю. Кривая L определяет распределение давления в среде 4, когда предвестник достигает $x = 398$.

3. Приближенные значения коэффициента вязкости. Решения волновых задач [20] показали, что объемная вязкость приводит к размыва-



Фиг. 4



Фиг. 5

нию ударной волны. Значения коэффициента объемной вязкости η должны определяться экспериментально. Найдем приближенные значения η из анализа сжатия пузырьков, принимая уравнения сжимаемости твердого и жидкого компонентов линейными. Пусть все пузырьки сферической формы и одного радиуса r_0. Начальный объем пузырька $V_0^* = 4\pi r_0^3/3$. При сжатии в момент приложения нагрузки

$$\dot{V}^* = -4\pi r_0^2 u,$$

где u — скорость среды, окружающей пузырьки. Изменение объема всех пузырьков в единице объема среды

$$\frac{\dot{V}_1}{V_{10}} = \frac{\dot{V}^*}{V_0^*} = -\frac{4\pi r_0^2 u}{V_0^*} = -\frac{3u}{r_0}.$$

Из (1.3) следует, что в этот момент времени

$$p - p_0 = -\eta\dot{V}_1/V_{10} = 3\eta u/r_0. \tag{3.1}$$

Если твердый и жидкий компоненты — линейно-упругие среды, т. е. $\gamma_2 = \gamma_3 = -1$, то

$$p - p_0 = Au,\ A = \left(\frac{\alpha_2\rho_{20} + \alpha_3\rho_{30}}{1 - \alpha_1}\right)^{1/2} \times \left(\frac{\alpha_2}{\rho_{20}c_{20}^2} + \frac{\alpha_3}{\rho_{30}c_{30}^2}\right)^{-1/2}. \tag{3.2}$$

Из сопоставления (3.1), (3.2) найдем коэффициент вязкости

$$\eta = Ar_0/3. \tag{3.3}$$

Значения η при $r_0 = 10^{-3}$ м, вычисленные по (3.3), даны в табл. 2. При рассмотренных изменениях α_1 величины A и η меняются незначительно.

В водонасыщенном грунте A и η выше, чем в среде вода — воздух при одинаковом содержании воздуха и тех же радиусах пузырьков.

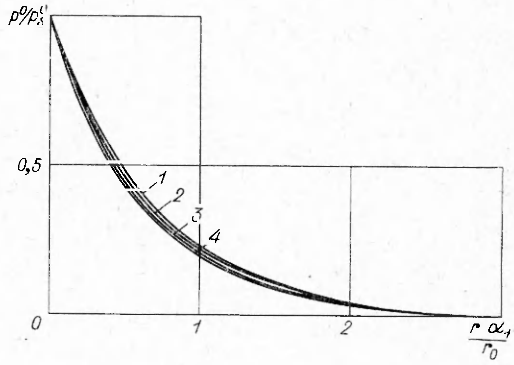
Изменение содержания газообразного компонента приводит к изменению статической и динамической диаграмм, изменение радиуса пузырьков меняет коэффициент вязкости среды.

Из (2.1), (3.3) следует

$$x = r/r_0.$$

На фиг. 6 кривые *1—4* определяют давление на предвестнике при $p_S^0 = 50$; 500, 1000 и 3000 соответственно. Они построены для водонасыщенного грунта, но практически совпадают с кривыми для воды с пузырьками воздуха. Различие кривых не превышает 10%. Из этого следует, что при $p_S^0 < p_S^*$ в первом приближении можно принять

$$p^0/p_S^0 = f(r\alpha_1/r_0).$$



Фиг. 6

4. Аналитические решения. Рассмотрим случай $p_S^0 < p_S^*$. Аппроксимируем диаграмму динамического сжатия прямой OD (см. фиг. 4). При линеаризации характеристики прямолинейны, линия фронта совпадает с характеристикой первого семейства, а параметры на предвестнике соответствуют первому из уравнений (1.8). Функцию $\psi(p, V)$ можно представить в виде

$$(4.1)\qquad \psi(p, V) = p - p_0\left[1 - \left(V_D^0 - V^0\right)/\alpha_1\right]^{-\gamma_1}.$$

При $V^0 \to V_D^0$ и $V^0 \to V_S^0$ соответственно $\psi \to p - p_0$, $\psi \to 0$. На диаграмме динамического сжатия, а следовательно, и на скачке $\psi = p - p_0 = p_0(p^0 - 1)$. В соответствии с (1.5) при линеаризации получим

$$\varphi(p) = \rho_0 dV/dp, \quad \varphi(p) = \left(1 - V_D^0\right)/p_0\left(1 - p_S^0\right) = \text{const}.$$

Соотношение на скачке

$$p = (-dp/dV)^{1/2}u = (-\rho_0/\varphi(p))^{1/2}u.$$

Отсюда первое из уравнений (1.8) принимает вид

$$dp^0/\left(p^0 - 1\right) = -\alpha_1 p_0\left(p_S^0 - 1\right)/\eta\left(1 - V_D^0\right)dt.$$

Интегрируя при начальном условии $p_S^0 = p^0(0)$, получим изменение давления на предвестнике со временем

$$\ln\left[\left(p^0 - 1\right)/\left(p_S^0 - 1\right)\right] = -\alpha_1 p_0\left(p_S^0 - 1\right)t/2\eta\left(1 - V_D^0\right).$$

Уравнение движения предвестника

$$r = \left[p_0\left(p_S^0 - 1\right)/\left(1 - V_D^0\right)\rho_0\right]^{1/2}t.$$

Изменение давления на предвестнике с расстоянием

$$(4.2)\qquad \ln\left[\left(p^0 - 1\right)\left(p_S^0 - 1\right)\right] = -\alpha_1\left[\left(p_S^0 - 1\right)p_0\rho_0\right]^{1/2} \times \times r/2\eta\left(1 - V_D^0\right)^{1/2}.$$

На фиг. 3, 5 точки соответствуют давлению на предвестнике, вычисленному по (4.2). Аналитическое решение при линеаризации динамической диаграммы сжатия близко к решению, полученному с помощью ЭВМ без линеаризации (линии *1*—*6*). Это связано с малым отклонением диаграммы динамического сжатия от линейной зависимости (см. фиг. 1, 4) у рассматриваемых сред.

Рассмотрим изменение давления в фиксированной точке среды при $p_S^0 < p_S^*$. При $\dot{r} = 0$ выполняется третье уравнение (1.8). После скачка на предвестнике до p_f^0 состояние в частице меняется по линиям *1* — ∞ (см. фиг. 4). При линеаризации этих кривых и диаграммы динамического сжатия получим

$$(4.3)\qquad \frac{dV}{dp} = \frac{V_S^0 - V_f^0}{\left(p_S^0 - p_f^0\right)p_0\rho_0}, \quad \varphi(p) = -\frac{1 - V_D^0}{p_0\left(p_S^0 - 1\right)},$$

где p_f^0 — давление на скачке; $V_S^0 = V_S^0(p_S^0)$; $V_D^0 = V_D^0(p_S^0)$.

Между динамической и статической диаграммами, за исключением малой области вблизи статической кривой, приближенно можно принять (см. (4.1)) условие $\psi = p - p_0$. Отсюда, учитывая (4.3), получим третье уравнение (1.8) в виде

$$dp^0/\left(p^0 - 1\right) = \alpha_1\left(p_S^0 - p_f^0\right)p_0/\eta\left(V_S^0 - V_D^0\right)dt.$$

Интегрируя, найдем изменение давления в фиксированной точке среды (частице) за фронтом предвестника

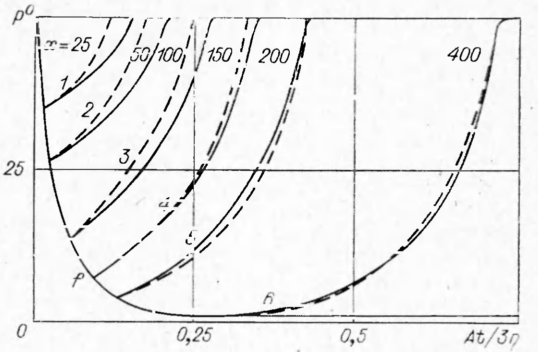
$$(4.4)\qquad \ln\left[\left(p^0 - 1\right)\left(p_f^0 - 1\right)\right] = \alpha_1\left(p_S^0 - p_f^0\right)p_0/\eta\left(V_S^0 - V_D^0\right)(t - t_f)$$

(t_f — время прихода предвестника в рассматриваемую точку).

Время нарастания давления до p_S^0

$$\Delta t = \ln[(p_S^0 - 1)/(p_f^0 - 1)]\,\eta \times \times (V_S^0 - V_D^0)/\alpha_1(p_S^0 - p_f^0).$$

При не слишком малых p_S^0 можно принять $\alpha_1 = V_S^0 - V_D^0$.



Фиг. 7

На фиг. 7 кривая f соответствует изменению давления на предвестнике со временем в воде с пузырьками газа при $\alpha_1 = 0{,}01$ и $p_S^0 = 50$. Кривые *1—6* определяют изменение давления в фиксированных точках среды на расстояниях $x = 25, 50, 100, 150, 200$ и 400 соответственно. Сплошные кривые получены по расчетам на ЭВМ, а штриховые — по (4.4). Различия между ними невелики.

Полученные аналитические выражения можно применять для приближенного определения давления на предвестнике и его изменения в период нарастания до p_S^0, а также для определения времени нарастания давления.

Поступила 22 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Рахматулин Х. А.** Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред.— ПММ, 1956, т. 20, вып. 27.
2. **Ляхов Г. М.** Ударные волны в многокомпонентных средах.— «Изв. АН СССР. Механика и машиностроение», 1959, № 1.
3. **Рахматулин Х. А.** О распространении волн в многокомпонентных средах.— ПММ, 1969, т. 33, вып. 4.
4. **Legowski Z., Wlodaczyk E.** Regular reflection of an oblique stationary shock wave from an indeformable plane partition in saturated soil.— «Proc. Vibr. Probl.», 1974, vol. 15, N 2.
5. **Ляхов Г. М., Охитин В. Н.** Сферические взрывные волны в многокомпонентных средах.— ПМТФ, 1974, 2.
6. **Паркин Б. Р., Гильмор Ф. Р., Броуд Г. Л.** Ударные волны в воде с пузырьками воздуха.— В кн.: Подводные и подземные взрывы. М., «Мир», 1974.
7. **Бетчлер Г. К.** Волны сжатия в суспензиях газовых пузырьков.— Сб. пер. Механика, 1968, № 3.
8. **Иорданский С. В.** Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа.— ПМТФ, 1960, № 3.
9. **Кедринский В. К.** Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа.— ПМТФ, 1968, № 4.
10. **Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. Р.** Длинноволновые возмущения в газожидкостной смеси.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1972, № 5.
11. **Noordzij L.** Shock waves in bubble-liquid mixtures.— «Phys. Communs», 1971, vol. 3, N 1.
12. **Van Wijngaarden L.** On the structure of shock waves in liquid-bubble mixtures.— «Appl. Sci. Res.», 1970, vol. 22, N 5.
13. **Van Wijngaarden L.** On equations of motion for mixtures of fluid an gas bubbles.— «J. Fluid Mech.», 1968, vol. 33, N 3.
14. **Нигматулин Р. И.** Мелкомасштабные течения и поверхностные эффекты в гидромеханике многофазных сред.— ПММ, 1971, т. 35.
15. **Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С., Шагапов В. Ш.** Об ударных волнах в жидкости с пузырьками газа.— «Докл. АН СССР», 1974, т. 214, № 4.
16. **Кутателадзе С. С., Бурдуков А. П., Кузнецов В. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.** О структуре слабой ударной волны в газожидкостной среде.— «Докл. АН СССР», 1972, т. 207, № 2.

17. Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. Р. Динамика ударных волн в жидкости, содержащей пузырьки газа.— ПМТФ, 1974, № 5.
18. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Г., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М., «Недра», 1970.
19. Копытов Г. Ф. Затухание ударных волн в газожидкостной среде.— «Вестн. Ленингр. ун-та», 1968, № 1.
20. Ляхов Г. М. Основы динамики взрывных волн в грунтах и горных породах. М., «Недра», 1974.
21. Кошелев Э. А. О развитии камуфлетной полости при взрыве в мягком грунте.— ПМТФ, 1975, № 2.
22. Хоскин Н. Э. Метод характеристик для решения уравнений одномерного неустановившегося течения.— В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. М., «Мир», 1967.

УДК 624.131 + 539.215

О МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ДИАГРАММ СЖАТИЯ ДЛЯ ГРУНТОВ И ПОРИСТЫХ СРЕД, ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ К СКОРОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

А. И. Котов, Г. В. Рыков

(*Москва*)

Для сред типа грунтов, чувствительных к скорости деформирования, существенным является вопрос об определении предельных динамических диаграмм сжатия, соответствующих мгновенному нагружению ($\dot{\varepsilon} = \infty$) [1, 2]. Такие диаграммы до настоящего времени определялись на фронте ударной волны, распространяющейся в массиве грунта при взрывах зарядов ВВ [3—5] или при ударе по образцу грунта массы, имеющей достаточно большую начальную скорость [6]. При распространении в грунтах непрерывных волн сжатия указанный метод не может быть использован.

Для упругих и упругопластических сред с нелинейными характеристиками для определения динамических диаграмм растяжения использовалась связь диаграмм одноосного сжатия (растяжения) со скоростью распространения слабых возмущений [7, 8].

1. Рассматриваемый метод основан на связи скоростей распространения слабых возмущений в сжатой среде с предельной динамической диаграммой $\varphi(\varepsilon)$ ($\dot{\varepsilon} = \infty$) в вязкопластической среде. Предполагается, что основные свойства грунтов и рассматриваемых пористых сред при кратковременных динамических нагрузках с достаточной точностью описываются при одноосном сжатии законом деформирования типа [9, 10]

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = G(\sigma_1 - f(\varepsilon)) + \begin{cases} \dfrac{1}{E(\varepsilon)}\dfrac{\partial\sigma_1}{\partial t}, & \dfrac{\partial\sigma_1}{\partial t} \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{E_*(\varepsilon)}\dfrac{\partial\sigma_1}{\partial t}, & \dfrac{\partial\sigma_1}{\partial t} < 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где σ_1 — наибольшее главное напряжение; $E(\varepsilon)$ — переменный модуль деформаций при нагружении ($\partial\sigma_1/\partial t \geqslant 0$); $E_*(\varepsilon)$ — переменный модуль деформаций при разгрузке ($\partial\sigma_1/\partial t < 0$); $G > 0$ при $\sigma_1 > f(\varepsilon)$ и $G \equiv 0$ при $\sigma_1 \leqslant f(\varepsilon)$; $f(\varepsilon)$ — статистическая диаграмма сжатия при $\dot{\varepsilon} = 0$.